M8230

Cvičení 3

Lineární rovnice 1. řádu

Vzorce:

Lineární rovnice 1. řádu:

$$x(t+1) = a(t)x(t) + b(t)$$

Řešení počáteční úlohy s podmínkou $x(t_0) = x_0$:

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} a(i) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} a(j).$$

Pro *konstantní* posloupnosti $a(t) \equiv \alpha, b(t) \equiv \beta$ získáme:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^{t-t_0} + \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Příklady:

$\boxed{1.}$ Nalezněte řešení zadané počáteční úlohy pro $t \geq 0$:

a) $x(t+1) = (t+1)x(t), \quad x(0) = 1,$

b) $x(t+1) = 3^t x(t), \quad x(0) = 1,$

c) $x(t+1) = \mathrm{e}^{2t} x(t), \quad x(0) = 1,$

d) $x(t+1) = \frac{1}{2}x(t) + 2, \quad x(0) = 1,$

e) $x(t+1) = x(t) + \mathrm{e}^t, \quad x(0) = 1,$

f) $x(t+1) = \frac{t}{t+1}x(t) + 4, \quad x(0) = 1.$

$\boxed{2.}$ Nechť je na konci každého období do banky ukládána částka \$ 200 a banka platí každé období úrok 0,8%. Jaká je uložená částka po n obdobích.

$\boxed{3.}$ Dluh \$ 12 000 má být amortizována splátkami \$ 380 na konci každého měsíce, plus jedna závěrečná splátka menší. Úrok 12% p.a. je připisován každý měsíc. Určete čas splácení (v měsících) a závěrečnou splátku.

$\boxed{4.}$ Úvěr \$ 80 000 má být splacen pravidelnými měsíčními splátkami. Úroková sazba je 10% p.a. Jaká je měsíční splátka, aby byl dluh splacen do 30 měsíců.

$\boxed{5.}$ Hypotéka na 30 let má úrokovou sazbu 8% p.a. Jste schopni splácet \$ 1 000 měsíčně. Kolik si můžete půjčit?

$\boxed{6.}$ Pokud organismus žije, je v jeho tkáních zastoupení radioaktivního uhlíku ^{14}C stejné jako v atmosféře. Po uhynutí organismu se radioaktivní uhlík rozkládá s poločasem rozpadu 5 700 let. Ve vzorku je ^{14}C zastoupen ze 70% ve srovnání s atmosférou. Jak je vzorek starý?

$\boxed{7.}$ Populace lasiček roste o 3% ročně, přičemž nyní má velikost 350 jedinců. Modelujte tuto populaci lineární rovnicí 1. řádu. Za jak dlouho se velikost populace zdvojnásobí? Co se změní, když v prostředí začnou působit pytláci, kteří ročně uloví 6 lasiček?

Výsledky:

1. a) $t!$

   b) $3^{\frac{t(t-1)}{2}}$

   c) $\mathrm{e}^{t(t-1)}$

   d) $4 - \dfrac{3}{2^t}$

   e) $1 + \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e} - 1}$

   f) $x(t) = \begin{cases} c, & t = 0 \\ 2(t+1), & t \geq 1 \end{cases}$

2. Rovnice: $x(t+1) = 1{,}008x(t) + 200,\ x(0) = 0,$
   Řešení: $x(n) = 25\,000\big(1{,}008^n - 1\big)$

4. Rovnice: $x(t+1) = \sqrt[12]{1{,}1}\,x(t) - b,\ x(0) = 80\,000,$
   Řešení: $x(t) = (80000 - 125,4 \cdot S) \cdot 1,1^{t/12} - 125,4 \cdot S,$
   Měsíční splátka: $b \doteq 3\,009$

6. Řešení: $x(t) = exp(-t \ln 2/5700),$
   $t = \frac{5\,700}{\ln 2} \ln \frac{100}{70} \doteq 2933$

3. Rovnice: $x(t+1) = \sqrt[12]{1{,}12}\,x(t) - 380,\ x(0) = 12\,000,$
   Řešení: $x(t) = -28047,2 \cdot 1,12^{t/12} + 40047,2,$
   Závěrečná splátka: $x(37) \doteq 269$

5. Rovnice: $x(t+1) = \sqrt[12]{1{,}08}\,x(t) - 1\,000,$ $x(360) = 0,$
   Řešení: $x(t) = (x_0 - 155424) \cdot 1,08^{t/12} + 155424,$
   Hypotéka: $x(0) \doteq 139978$

7. Rovnice: $x(t+1) = 1,03x(t),$
   Řešení: $x(t) = 350 \cdot 1,03^t,$
   Zdvojnásobí se za cca 23 let.
   Model s pytláky: $x(t+1) = 1,03x(t) - 6$
   Řešení: $x(t) = 150 \cdot 1,03^t + 200,$
   Zdvojnásobí se za cca 40 let.