M8230

Cvičení 4

Lineární rovnice vyšších řádů: homogenní

Vzorce:

Lineární homogenní rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty:

$$a_k x(t+k) + a_{k-1}x(t+k-1) + \cdots + a_1 x(t+1) + a_0 x(t) = 0$$

Charakteristický polynom příslušné rovnice v proměnné λ:

$$L(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Příklady:

$\boxed{1.}$ Nalezněte obecné řešení zadané rovnice.

a) $x(t+2) - 16x(t) = 0$

b) $x(t+2) + 16x(t) = 0$

c) $\Delta^3 x(t) = 0$

d) $\left(\sigma^2 + 2\right)^2 x(t) = 0$

e) $(\sigma - 3)^2 \left(\sigma^2 + 4\right) x(t) = 0$

$\boxed{2.}$ Najděte řešení počáteční úlohy $x(t+3) - 7x(t+2) + 16x(t+1) - 12x(t) = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, $x(2) = 1$.

$\boxed{3.}$ Najděte obecnou formuli pro výpočet t-tého člene *Fibonacciho posloupnosti* $F(t), t \geq 0$, pro níž platí rekurentní vztah:

$$F(t+2) = F(t+1) + F(t), \quad F(0) = 0, F(1) = 1.$$

Najděte limitu $\lim_{t\to\infty} \frac{F(t+1)}{F(t)}$.

$\boxed{4.}$ (*Model 2-letých rostlin*) Předpokládejme, že chceme modelovat populaci rostlin, které první rok svého vývoje rostou a s pravděpodobností α přežívají do druhého roku, v němž každá z nich vyprodukuje právě s semen. Ty následně s pravděpodobností β dají vzniknout novým rostlinám v následujícím roku. Sestavte model pomocí lineární homogenní rovnice 2. řádu a rovnici vyřešte. Jak bude řešení vypadat, pokud v čase $t = 1$ vysadíme do prostředí jednotkové množství těchto rostlin v prvním roku svého vývoje?

$\boxed{5.}$ (*Gamblerův problém*) Gambler hraje se svým protivníkem následující hru: pokud gambler zvítězí v daném kole (s pravděpodobností q), získá 1 Kč; pokud prohraje (s pravděpodobností $1 - q$), ztrácí 1 Kč. Hra končí v případě, že gamblerovi dojdou peníze (prohrál), nebo když dosáhne předem stanovené hranice N Kč (vyhrál). Vyjádřete pravděpodobnost $p(k)$, že gambler prohraje (dojdou mu peníze), pokud začínal s k Kč.

Výsledky:

1. a) $4^t\big(A+(-1)^tB\big)$

   b) $4^t\left(A\cos\frac{1}{2}\pi t+B\sin\frac{1}{2}\pi t\right)$

   c) $A+Bt+Ct^2$

   d) $\sqrt{2^t}\left((A+Bt)\cos\frac{1}{2}\pi t+(C+Dt)\sin\frac{1}{2}\pi t\right)$

   e) $3^t(A+Bt)+2^t\left(C\cos\frac{1}{2}\pi t+D\sin\frac{1}{2}\pi t\right)$

2. $(3+2t)2^t-3^{t+1}$

3. $F(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t\right)$, $\lim_{t\to\infty}\frac{F(t+1)}{F(t)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Hint: vyděl rovnici výrazem $F(t+1)$)

4. Rovnice: $N(t+2)-\gamma N(t)=0, \quad N(0)=0, N(1)=1,$
   Řešení: $N(t)=\gamma^t(A+B(-1)^t)$, pro $A=\frac{1}{2\gamma}, B=-\frac{1}{2\gamma}$

5. Rovnice: $p(k)=q\cdot p(k+1)+(1-q)\cdot p(k-1), \quad p(0)=1, p(N)=0,$
   Řešení: $p(k)=A+B\left(\frac{1-q}{q}\right)^k$, pro $q\neq\frac{1}{2}$ a vhodné A,B; $\quad p(k)=1-\frac{k}{N}$, pro $q=\frac{1}{2}$