Cvičení 5

Lineární rovnice vyšších řádů: nehomogenní

Vzorce:

Lineární nehomogenní rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty:

$$a_k x(t+k) + a_{k-1} x(t+k-1) + \cdots + a_1 x(t+1) + a_0 x(t) = b(t)$$

Tvary řešení pro různé speciální pravé strany $b(t)$:

$b(t)$	tvar řešení
a^t	$C_1 a^t$
t^m	$C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_m t^m$
$t^m a^t$	$a^t \left(C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_m t^m\right)$
$\sin \psi t,\ \cos \psi t$	$C_1 \sin \psi t + C_2 \cos \psi t$
$a^t \sin \psi t,\ a^t \cos \psi t$	$a^t \left(C_1 \sin \psi t + C_2 \cos \psi t\right)$
$a^t t^m \sin \psi t,\ a^t t^m \cos \psi t$	$a^t \left[(C_0 + C_1 t + \cdots + C_m t^m) \sin \psi t + \right.$ $\left. + (D_0 + D_1 t + \cdots + D_m t^m) \cos \psi t\right]$

Příklady:

$\boxed{1.}$ Nalezněte obecné řešení zadané rovnice.

a) $x(t+2) + 8x(t+1) + 12x(t) = \mathrm{e}^t$

b) $x(t+2) - x(t+1) - 6x(t) = 5 \cdot 3^t$

c) $x(t+2) + x(t+1) - 6x(t) = 5 \cdot 3^t$

d) $x(t+2) + x(t+1) - 12x(t) = t \cdot 2^t$

e) $x(t+2) + 4x(t) = 8 \cdot 2^t \cos(\frac{\pi}{2} t)$

f) $x(t+2) - 5x(t+1) + 6x(t) = t + 1$

g) $x(t+2) - 5x(t+1) + 4x(t) = 4^t - t^2$

h) $x(t+3) + 4x(t+2) + 4x(t+1) + 16x(t) = 160(-4)^t$

i) $x(t+2) - x(t) = t \cdot \cos(\frac{\pi}{2} t)$

j) $x(t+2) - 4x(t+1) + 4x(t) = 2^t$

Výsledky:

1. a) $(-2)^t \left(A + 3^t B\right) + \dfrac{\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}+2)(\mathrm{e}+6)}$

b) $3^{t-1}(3A + t) + (-2)^t B$

c) $2^t A + (-3)^t B + \frac{5}{2} 3^{t-1}$

d) $3^t A + (-4)^t B - \frac{1}{6} \left(t + \frac{5}{3}\right) 2^t$

e) $2^t \left(A \sin \frac{1}{2}\pi t + (B - t) \cos \frac{1}{2}\pi t\right)$

f) $3^t A + 2^t B + \frac{1}{2} t + \frac{5}{4}$

g) $A + \left(B + \frac{1}{12} t\right) 4^t + \frac{1}{9} t^3 - \frac{1}{18} t^2 + \frac{7}{54} t$

h) $(A - 2t)(-4)^t + 2^t (B \cos(\frac{\pi}{2} t) + C \sin(\frac{\pi}{2} t))$

i) $A + B(-1)^t + \frac{1-t}{2} \cos(\frac{\pi}{2} t)$

j) $2^t (A + B \cdot t + \frac{t^2}{8})$