

CVIČENÍ 6

Transformace na lineární rovnice

Vzorce:

1. Riccatiho rovnice:

$$x(t+1)x(t) + p(t)x(t+1) + q(t)x(t) = b(t) \iff x(t+1) = \frac{b(t) - q(t)x(t)}{x(t) + p(t)}$$

2. Homogenní rovnice:

$$f\left(t, \frac{x(t+1)}{x(t)}\right) = 0$$

(a) Speciální typ: implicitní rovnice

$$x(t+1)^2 + a(t)x(t+1)x(t) + b(t)x(t)^2 = 0$$

Příklady:

1. Vyřešte zadané úlohy s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$.

a) $x(t+1)x(t) - x(t+1) + x(t) = 0$

f) $x(t+1) = 5 - \frac{6}{x(t)}$

b) $x(t+1) = \frac{2x(t)}{x(t) + 3}$

g) $x(t+1) = \frac{a \cdot x(t)}{1 + b \cdot x(t)}, \quad a, b > 0$

c) $x(t+1) = \frac{2x(t) + 3}{3x(t) + 2}$

h) $x(t+1)^2 - 3x(t+1)x(t) + 2x(t)^2 = 0$

d) $x(t+1)x(t) - x(t+1) - 2x(t) = 4$

i) $x(t+1)^2 - 2x(t+1)x(t) - 3x(t)^2 = 0$

e) $x(t+1) = \frac{x(t)(1-x(t))}{2x(t)(1-x(t)) + (1-x(t))^2}$

j) $x(t+1)^2 - (2-t)x(t+1)x(t) - 2t \cdot x(t)^2 = 0$

Výsledky:

1. a) $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 \cdot t}$

f) $x(t) = \frac{3^{t+1} + C \cdot 2^{t+1}}{3^t + C \cdot 2^t}, \quad C = \frac{3 - x_0}{x_0 - 2}$

b) $x(t) = -\frac{2^t}{C \cdot 3^t + 2^t}, \quad C = -\frac{x_0 + 1}{x_0}$

g) Pro $a = 1$: $x(t) = \frac{x_0}{1 + b \cdot t \cdot x_0}$
Jinak: $x(t) = \frac{a^t(a-1)x_0}{(a-1) + b \cdot x_0 \cdot (a^t - 1)}$

c) $x(t) = \frac{C \cdot 5^t - (-1)^t}{C \cdot 5^t + (-1)^t}, \quad C = \frac{1 + x_0}{1 - x_0}$

h) $x_1(t) = x_0, \quad x_2(t) = x_0 \cdot 2^t$

d) $x(t) = \frac{4 \cdot 3^t - C \cdot (-2)^t}{3^t + C \cdot (-2)^t}, \quad C = \frac{4 - x_0}{x_0 + 1}$

i) $x_1(t) = x_0 3^t, \quad x_2(t) = x_0 (-1)^t$

e) $x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0 \cdot t}$

j) $x_1(t) = x(t_0)(-1)^{t-t_0} \prod_{i=t_0}^{t-1} i \equiv 0,$
 $x_2(t) = x_0 2^t$