Cvičení 7

Systémy lineárních rovnic 1. řádu

Vzorce:

Systém lineárních rovnic 1. řádu s konstantní maticí A:

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

Řešení obecně nehomogenního systému s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{A}^{t-t_0}\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1} \mathsf{A}^{t-i-1}\boldsymbol{b}(i)$$

- Matice A lze zapsat pomocí svého Jordanova kanonického tvaru J jako: $\mathsf{A} = \mathsf{P} \cdot \mathsf{J} \cdot \mathsf{P}^{-1}$
- Mocnina matice A má poté tvar: $\mathsf{A}^k = \mathsf{P} \cdot \mathsf{J}^k \cdot \mathsf{P}^{-1}$
- Matice P: matice přechodu; její sloupce jsou vlastní vektory matice A, resp. jejich zobecnění.
- Matice J: blokově diagonální s bloky J_i na diagonále: $\begin{pmatrix} \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$
- Mocniny bloků J_i^k dimenze d_i: $\begin{pmatrix} \lambda_i^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_i^k \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda_i^{k-2} & \dots & \frac{k^{(d_i-1)}}{(d_i-1)!}\lambda_i^{k-d_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & & & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i^k \end{pmatrix}$

Příklady:

$\boxed{1.}$ Vyřešte zadané homogenní úlohy.

a) $\boldsymbol{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)$

c) $\boldsymbol{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)$

d) $\boldsymbol{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{2.}$ Nalezněte řešení nehomogenního systému:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= -x(t) + y(t) \\ y(t+1) &= \phantom{-x(t) + {}} 2y(t) + t \end{aligned}$$

Výsledky:

1. a) $\begin{pmatrix} 2^{t+1} - 4^t \\ 2 \cdot 4^t \end{pmatrix}$

   b) $A \cdot 2^t \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos \frac{\pi}{2} t \\ \cos \frac{\pi}{2} t + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} t \end{pmatrix} + B \cdot 2^t \begin{pmatrix} 5 \cdot \sin \frac{\pi}{2} t \\ \sin \frac{\pi}{2} t - 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} t \end{pmatrix}$

   c) $A \cdot 4^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + B \cdot 4^t \begin{pmatrix} \frac{t}{4} \\ 3 - \frac{t}{2} \\ \frac{t}{4} - 1 \end{pmatrix} + C \cdot 4^t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 3 - 2^{t+1} \\ 2 - 2^t \\ 2^{t+1} - 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} A \cdot (-1)^t + B \cdot 2^t - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \\ 3B \cdot 2^t - t - 1 \end{pmatrix}$