

M9BCF

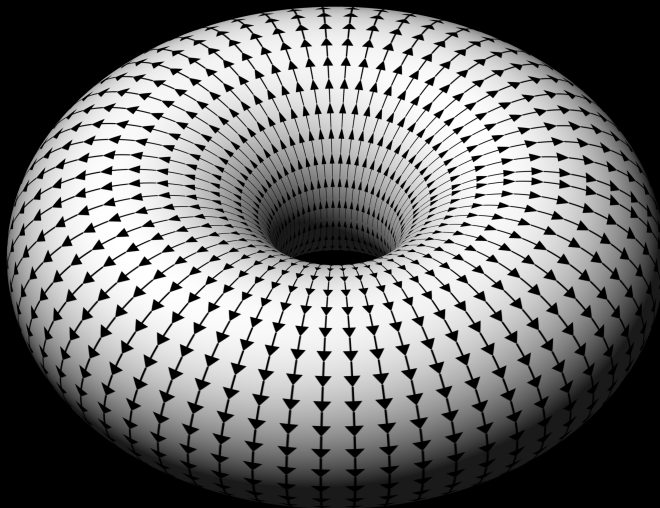
Teorie bifurkací, chaos a fraktály

Lenka Příbylová
pribylova@math.muni.cz

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

7. listopadu 2022

Dynamické systémy na varietách



Co se naučíme:

- zopakovat si základní pojmy teorie dynamických systémů a rozšířit je na variety

Co se naučíme:

- zopakovat si základní pojmy teorie dynamických systémů a rozšířit je na variety
- zopakovat Grobmanovu–Hartmanovu větu

Definice 1

Dynamickým systémem rozumíme trojici $\{T, \mathbf{X}, \phi^t\}$, kde číselná množina T je monoid (čas), \mathbf{X} je metrický prostor, který nazýváme **fázovým prostorem**, a ϕ^t je parametrický systém evolučních operátorů s parametrem $t \in T$ definovaných jako zobrazení $\phi^t: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$, které zobrazuje počáteční stav $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ na nějaký stav $\mathbf{x}_t = \phi^t \mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$.

Definice 1

Dynamickým systémem rozumíme trojici $\{T, \mathbf{X}, \phi^t\}$, kde číselná množina T je monoid (čas), \mathbf{X} je metrický prostor, který nazýváme **fázovým prostorem**, a ϕ^t je parametrický systém evolučních operátorů s parametrem $t \in T$ definovaných jako zobrazení $\phi^t: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$, které zobrazuje počáteční stav $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ na nějaký stav $\mathbf{x}_t = \phi^t \mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$.

Definice 2

Deterministickým dynamickým systémem rozumíme systém $\{T, \mathbf{X}, \phi^t\}$ splňující podmínku

$$\phi^0 = id,$$

kde id je identita na \mathbf{X} , tj. $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}: id \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Tato vlastnost říká, že systém spontánně nemění svůj stav.

Definice 3

Invariantní množinou S rozumíme podmnožinu X splňující

$$\mathbf{x}_0 \in S \Rightarrow \phi^t \mathbf{x}_0 \in S \quad \forall t \in T.$$

Definice 4

- Jestliže $\forall U \supset S$ libovolně malé okolí invariantní množiny S existuje okolí $V \supset S$ takové, že $\forall \mathbf{x} \in V$ a $\forall t > 0$ platí $\phi^t \mathbf{x} \in U$, nazýváme S **ljapunovsky stabilní**.
- Jestliže existuje okolí $U_0 \supset S$ invariantní množiny S takové, že $\varrho(\phi^t \mathbf{x}, S) \rightarrow 0$ pro $\mathbf{x} \in U_0$ a $t \rightarrow \infty$, kde ϱ je metrikou ve fázovém prostoru, nazýváme S **asymptoticky stabilní**.

Invariantní množina S se nazývá **stabilní**, jestliže je ljapunovsky i asymptoticky stabilní.

Definice 5

Lineárním autonomním systémem m diferenciálních rovnic rozumíme systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1)$$

kde matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ je vektor stavových proměnných, které jsou funkcemi času, tj. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))^T$, kde přitom $x_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, \dots, m\}$.

Definice 5

Lineárním autonomním systémem m diferenciálních rovnic rozumíme systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1)$$

kde matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ je vektor stavových proměnných, které jsou funkcemi času, tj. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))^T$, kde přitom $x_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, \dots, m\}$.

Poznámka

Řešením (1) rozumíme vektorovou funkci $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ splňující počáteční podmínku $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Dynamický systém reprezentovaný rovnicí (1) je tedy dán evolučním operátorem neboli **tokem** ϕ^t , pro který platí

$$\phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t).$$

Připomeňme, že maticová exponenciální funkce je definována nekonečnou řadou

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}\mathbf{A}^n + \dots$$

Připomeňme, že maticová exponenciální funkce je definována nekonečnou řadou

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}\mathbf{A}^n + \dots$$

Tato řada konverguje pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Zkuste si sami ověřit, že

Věta 1

Řešením rovnice (1) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ je vektorová funkce proměnné t tvaru

$$\phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0.$$

Pokud má \mathbf{A} m lineárně nezávislých vlastních vektorů \mathbf{v}^j s vlastními čísly λ_j , je

$$\mathbf{x}^j(t) = e^{\lambda_j t} \mathbf{v}^j, \quad \text{pro } j \in \{1, \dots, m\}$$

m nezávislých vektorových funkcí, které jsou řešením rovnice (1) s počáteční podmínkou

$$\mathbf{x}^j(0) = \mathbf{v}^j.$$

Pokud má \mathbf{A} m lineárně nezávislých vlastních vektorů \mathbf{v}^j s vlastními čísly λ_j , je

$$\mathbf{x}^j(t) = e^{\lambda_j t} \mathbf{v}^j, \quad \text{pro } j \in \{1, \dots, m\}$$

m nezávislých vektorových funkcí, které jsou řešením rovnice (1) s počáteční podmínkou

$$\mathbf{x}^j(0) = \mathbf{v}^j.$$

Obecné řešení rovnice (1) splňující počáteční podmínku $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ tak lze napsat jako

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^m c_j \mathbf{x}^j(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} c_j \mathbf{v}^j,$$

kde koeficienty c_j jsou souřadnice vektoru \mathbf{x}_0 v bázi tvořené vlastními vektory, protože

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{j=1}^m c_j \mathbf{v}^j = \mathbf{x}_0.$$

V případě násobných vlastních čísel může být nezávislých vlastních vektorů méně a lze definovat zobecněné vlastní vektory (viz Braun 1978 a **PřF:M6201 Nelineární dynamika a její aplikace**) a m lineárně nezávislých řešení rovnice (1). Tato řešení tvoří tzv. fundamentální matici řešení rovnice (1)

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^m(t)].$$

V případě násobných vlastních čísel může být nezávislých vlastních vektorů méně a lze definovat zobecněné vlastní vektory (viz Braun 1978 a **PřF:M6201 Nelineární dynamika a její aplikace**) a m lineárně nezávislých řešení rovnice (1). Tato řešení tvoří tzv. fundamentální matici řešení rovnice (1)

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^m(t)].$$

Zřejmě platí

$$e^{tA} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(0)^{-1}.$$

Rovnici (1) můžeme řešit také transformací $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ splňující

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T},$$

která matici \mathbf{A} převádí do Jordanova kanonického tvaru a rovnici do tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\mathbf{y}.$$

Matice \mathbf{T} je po sloupcích tvořena vlastními vektory \mathbf{v}^j , případně zobecněnými vlastními vektory.

Rovnici (1) můžeme řešit také transformací $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ splňující

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T},$$

která matici \mathbf{A} převádí do Jordanova kanonického tvaru a rovnici do tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\mathbf{y}.$$

Matice \mathbf{T} je po sloupcích tvořena vlastními vektory \mathbf{v}^j , případně zobecněnými vlastními vektory.

Ověřte si, že platí

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{T}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{T}^{-1}.$$

Matice e^{tA} reprezentuje zobrazení $\phi^t: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Každý bod $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ je zobrazen do bodu $\phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = e^{tA}\mathbf{x}_0$. Operátor e^{tA} tak nese informaci o množině všech řešení rovnice (1) a definuje tok generovaný vektorovým polem \mathbf{Ax} na \mathbb{R}^m . V teorii Lieových grup je tento operátor základním spojením mezi Lieovou algebrou a odpovídající Lieovou grupou¹.

¹Lieova grupa je grupa, která je zároveň diferencovatelnou varietou. Lieova algebra je vektorový prostor doplněný bilineární antisymetrickou operací, která se nazývá Lieova závorka (ta představuje zjednodušeně změnu vektorového pole vzhledem k jinému), která splňuje Jacobiho identitu. Celá ta věc velmi dobře slouží k popisu infinitezimálních změn vektorového pole, které je dáno systémem diferenciálních rovnic. O tom asi jinde později.

Tok $e^{tA}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je také množinou řešení rovnice (1), přitom některá řešení mají významné vlastnosti. Rovnováha $\mathbf{0}$ je první takové významné řešení. Je invariantní vzhledem k operátoru e^{tA} . Jsou ale i jiné podmnožiny – vektorové podprostory \mathbb{R}^m – invariantní vzhledem k operátoru e^{tA} .

Tok $e^{tA} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je také množinou řešení rovnice (1), přitom některá řešení mají významné vlastnosti. Rovnováha $\mathbf{0}$ je první takové významné řešení. Je invariantní vzhledem k operátoru e^{tA} . Jsou ale i jiné podmnožiny – vektorové podprostory \mathbb{R}^m – invariantní vzhledem k operátoru e^{tA} .

Každý vlastní vektor \mathbf{v}^j generuje vektorový podprostor, který je invariantní vzhledem k operátoru e^{tA} . Je jím samozřejmě jeho lineární obal $\text{span}\{\mathbf{v}^j\}$. Pro řešení rovnice (1) totiž platí

$$\mathbf{x}(c_j \mathbf{v}^j, t) = e^{t\lambda_j} c_j \mathbf{v}^j \in \text{span}\{\mathbf{v}^j\}.$$

Podobně jsou významné a invariantní také vektorové podprostory z následující definice:

Definice 6

Stabilním podprostorem operátoru (toku) e^{tA} nebo rovnice (1) rozumíme

$$E^s = \text{span}\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{m_-}\},$$

kde $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{m_-}$ je m_- vlastních vektorů (případně zobecněných), jejichž vlastní čísla mají zápornou reálnou část. Podobně **nestabilním podprostorem** rozumíme

$$E^u = \text{span}\{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{m_+}\},$$

kde $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{m_+}$ je m_+ vlastních vektorů (případně zobecněných), jejichž vlastní čísla mají kladnou reálnou část a **centrálním podprostorem** rozumíme

$$E^c = \text{span}\{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{m_0}\},$$

kde $\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{m_0}$ je m_0 vlastních vektorů (případně zobecněných), jejichž vlastní čísla mají nulovou reálnou část. Platí $m_- + m_+ + m_0 = m$.

Definice 7

Autonomním systémem diferenciálních rovnic rozumíme systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^m$ a vektorová funkce $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je dostatečně hladká.

Definice 7

Autonomním systémem diferenciálních rovnic rozumíme systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^m$ a vektorová funkce $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je dostatečně hladká.

Poznámka

Řešením (2) rozumíme vektorovou funkci $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ splňující počáteční podmínku $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Pro dynamický systém reprezentovaný rovnicí (2) můžeme alespoň v okolí $t = 0$ lokálně definovat tok ϕ^t , pro který platí

$$\phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t).$$

Křivku $\gamma(t) = \phi^t(\mathbf{x}_0)$ pak nazýváme **trajektorií**.

Definice 8

Pro systém (2) s konstantním řešením neboli **rovnováhou** $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_0$ se lineární systém

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x} \quad (3)$$

s tokem $e^{tD\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}$ nazývá **linearizací** systému (2) v okolí rovnováhy \mathbf{x}_0 .

Definice 8

Pro systém (2) s konstantním řešením neboli **rovnováhou** $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_0$ se lineární systém

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x} \quad (3)$$

s tokem $e^{tD\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}$ nazývá **linearizací** systému (2) v okolí rovnováhy \mathbf{x}_0 .

Poznámka

Rovnovážné body autonomního systému (2) splňují systém rovnic

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Definice 9

Dynamický systém $\mathbf{D}_1 = \{T, \mathbb{R}^m, \phi^t\}$ se nazývá **topologicky ekvivalentní** dynamickému systému $\mathbf{D}_2 = \{T, \mathbb{R}^m, \psi^t\}$, jestliže existuje homeomorfismus $\mathbf{h}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, které zobrazuje trajektorie systému \mathbf{D}_1 na trajektorie systému \mathbf{D}_2 , přičemž zachovává jejich orientaci. Často v takovém případě mluvíme také o (topologicky) **ekvivalentních fázových portrétech**.

Definice 9

Dynamický systém $\mathbf{D}_1 = \{T, \mathbb{R}^m, \phi^t\}$ se nazývá **topologicky ekvivalentní** dynamickému systému $\mathbf{D}_2 = \{T, \mathbb{R}^m, \psi^t\}$, jestliže existuje homeomorfismus $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, které zobrazuje trajektorie systému \mathbf{D}_1 na trajektorie systému \mathbf{D}_2 , přičemž zachovává jejich orientaci. Často v takovém případě mluvíme také o (topologicky) **ekvivalentních fázových portrétech**.

Definice 10

Dynamický systém $\mathbf{D}_1 = \{T, \mathbb{R}^m, \phi^t\}$ se nazývá **lokálně topologicky ekvivalentní** v okolí O_1 bodu \mathbf{x}_1 dynamickému systému $\mathbf{D}_2 = \{T, \mathbb{R}^m, \psi^t\}$ v okolí O_2 bodu \mathbf{x}_2 , jestliže existuje homeomorfismus $h: O_1 \rightarrow O_2$, které zobrazuje trajektorie systému \mathbf{D}_1 v okolí O_1 na trajektorie systému \mathbf{D}_2 v okolí O_2 , přičemž zachovává jejich orientaci.

Definice 11

Rovnováha \mathbf{x}_0 systému (2) se nazývá **hyperbolická**, jestliže centrální vektorový podprostor jeho linearizace v jejím okolí má dimenzi $m_0 = 0$.

Definice 11

Rovnováha \mathbf{x}_0 systému (2) se nazývá **hyperbolická**, jestliže centrální vektorový podprostor jeho linearizace v jejím okolí má dimenzi $m_0 = 0$.

Věta 2 (Grobmanova–Hartmanova věta, věta o linearizaci)

Systém (2) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ je v okolí své hyperbolické rovnováhy \mathbf{x}_0 lokálně topologicky ekvivalentní se svou linearizací (3).

Grobmanova–Hartmanova věta zaručuje, že v okolí hyperbolické rovnováhy existuje homeomorfismus h , který zobrazuje trajektorie nelineárního toku ϕ^t na trajektorie lineárního toku $e^{tDf(x_0)}$. Tento homeomorfismus jako spojitě a invertibilní zobrazení zaručuje lokálně také existenci **stabilní** a **nestabilní variety** v okolí U hyperbolické rovnováhy, pro které platí

$$W_{\text{loc}}^s(x_0) = h^{-1}(E^s) = \{x \in U \mid \phi^t(x) \rightarrow x_0 \text{ pro } t \rightarrow \infty \\ \text{a } \phi^t(x) \in U \quad \forall t: t \geq 0\},$$

$$W_{\text{loc}}^u(x_0) = h^{-1}(E^u) = \{x \in U \mid \phi^t(x) \rightarrow x_0 \text{ pro } t \rightarrow -\infty \\ \text{a } \phi^t(x) \in U \quad \forall t: t \leq 0\}.$$

Věta 3

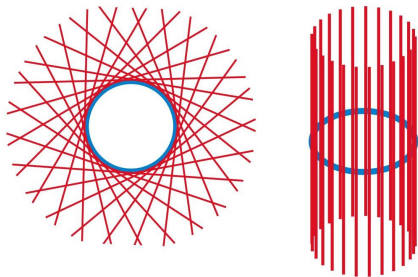
Předpokládejme, že systém (2) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ má hyperbolickou rovnováhu \mathbf{x}_0 . Pak existuje lokálně stabilní varieta $\mathbf{W}_{loc}^s(\mathbf{x}_0)$ dimenze m_- tečná v bodě \mathbf{x}_0 k podprostoru \mathbf{E}^s lineárního toku $e^{tD\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}$ a nestabilní varieta $\mathbf{W}_{loc}^u(\mathbf{x}_0)$ dimenze m_+ tečná v bodě \mathbf{x}_0 k podprostoru \mathbf{E}^u lineárního toku $e^{tD\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}$.

Věta 3

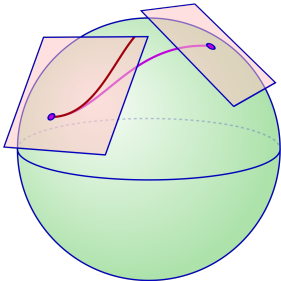
Předpokládejme, že systém (2) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ má hyperbolickou rovnováhu \mathbf{x}_0 . Pak existuje lokálně stabilní varieta $\mathbf{W}_{loc}^s(\mathbf{x}_0)$ dimenze m_- tečná v bodě \mathbf{x}_0 k podprostoru \mathbf{E}^s lineárního toku $e^{tD\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}$ a nestabilní varieta $\mathbf{W}_{loc}^u(\mathbf{x}_0)$ dimenze m_+ tečná v bodě \mathbf{x}_0 k podprostoru \mathbf{E}^u lineárního toku $e^{tD\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}$.

Lokální stabilní a nestabilní varieta jsou invariantní množiny a stejně jako podprostory \mathbf{E}^s a \mathbf{E}^u mají v ryzím okolí hyperbolické rovnováhy prázdný průnik. Právě případný průnik stabilních a nestabilních variet vede ke složitému – komplexnímu – chování dynamických systémů.

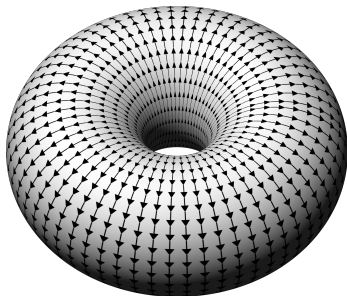
Metrický prostor $X = \mathbb{R}^m$, ve kterém jsme doposud pracovali s dynamickým systémem, můžeme nahradit m -rozměrnou (hladkou) varietou. Naprosto analogicky totiž můžeme všechny předchozí lokální pojmy definovat na varietě M . Hladká varieta je totiž opatřena atlasem map – lokálními zobrazeními (difeomorfismy) do \mathbb{R}^m . Protože lokální difeomorfismus je také homeomorfismus, můžeme definovat lokální pojmy skrze tečné m -rozměrné vektorové prostory na tzv. tečném bandlu variety M .



Metrický prostor $X = \mathbb{R}^m$, ve kterém jsme doposud pracovali s dynamickým systémem, můžeme nahradit m -rozměrnou (hladkou) varietou. Naprosto analogicky totiž můžeme všechny předchozí lokální pojmy definovat na varietě M . Hladká varieta je totiž opatřena atlasem map – lokálními zobrazeními (difeomorfismy) do \mathbb{R}^m . Protože lokální difeomorfismus je také homeomorfismus, můžeme definovat lokální pojmy skrze tečné m -rozměrné vektorové prostory na tzv. tečném bandlu variety M .



Torus z úvodního obrázku kapitoly je příkladem 2-rozměrné variety a na něm vidíme vektorové pole představující tok ϕ^t . Zobrazený tok je na toru velmi jednoduchým zobrazením (lineárním), přestože ve 3-rozměrném prostoru bychom jej popisovali velice složitě. Pro hyperbolickou rovnováhu na hladké varietě platí Grobmanova–Hartmanova věta ([Irw01], str. 113).



Na tok ϕ^t nelineárního systému nebo e^{tA} lineárního systému diferenciálních rovnic je možné nahlížet také jako na zobrazení. Pokud zvolíme například pevné $t = \tau$, je konstantní matice $\mathbf{B} = e^{\tau A}$ maticí diferenčního systému

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{B}\mathbf{x}(n), \quad (4)$$

který reprezentuje diskretní dynamický systém indukovaný spojitým tokem. Stejně tak mluvíme o iteracích zobrazení $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$.

Na tok ϕ^t nelineárního systému nebo e^{tA} lineárního systému diferenciálních rovnic je možné nahlížet také jako na zobrazení. Pokud zvolíme například pevné $t = \tau$, je konstantní matice $\mathbf{B} = e^{\tau A}$ maticí diferenčního systému

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{B}\mathbf{x}(n), \quad (4)$$

který reprezentuje diskretní dynamický systém indukovaný spojitým tokem. Stejně tak mluvíme o iteracích zobrazení $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$.

Protože je tok ϕ^t hladká vektorová funkce, je takto definované diskretní zobrazení difeomorfismus. Dalším příkladem, kdy tok indukuje diskretní zobrazení, je Poincarého zobrazení (viz [PřF:M6201 Nelineární dynamika a její aplikace](#)).

S lineárními zobrazeními $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$ umíme pracovat. Známe pojem vlastního čísla a vektoru, Jordanův kanonický tvar matice zobrazení, atd. Podobně jako v předchozím případě můžeme i pro diskrétně definovaný dynamický systém s nulovou rovnováhou definovat

stabilní vektorový podprostor

$$\mathbf{E}^s = \text{span}\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{m_-}\},$$

kde $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{m_-}$ je m_- vlastních vektorů (případně zobecněných), jejichž vlastní čísla mají velikost menší než 1. Podobně **nestabilním podprostorem** rozumíme

$$\mathbf{E}^u = \text{span}\{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{m_+}\},$$

kde $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{m_+}$ je m_+ vlastních vektorů (případně zobecněných), jejichž vlastní čísla mají velikost větší než 1 a **centrálním podprostorem** rozumíme

$$\mathbf{E}^c = \text{span}\{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{m_0}\},$$

kde $\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^{m_0}$ je m_0 vlastních vektorů (příp. zobecněných), jejichž vl. čísla mají jednotkovou velikost. Platí $m_- + m_+ + m_0 = m$.

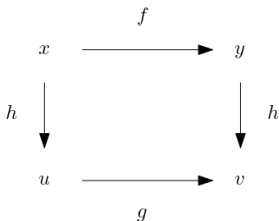
Definice 12

Iterace zobrazení $f: X \rightarrow X$ určují **autonomní diskrétní dynamický systém** s evolučním operátorem $\phi^n \mathbf{x} = f^{(n)}(\mathbf{x})$, $n \in \mathbb{N}$.

Definice 13

Zobrazení f a g se nazývají **topologicky konjugovaná**, jestliže existuje homeomorfismus h a platí $h \circ f = g \circ h$.

Komutativní diagram možná lépe ukáže, že jde vlastně o spojitě „přeznačení“:



Věta 4 (Grobmanova–Hartmanova věta, věta o linearizaci)

Nechť $\mathbf{G}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je (C^1) difeomorfismus a \mathbf{x}_0 je jeho hyperbolický pevný bod^a. Pak existuje homeomorfismus \mathbf{h} definovaný na nějakém okolí \mathbf{x}_0 tak, že platí

$$\mathbf{h} \circ \mathbf{G} = D\mathbf{G}(\mathbf{x}_0) \circ \mathbf{h}.$$

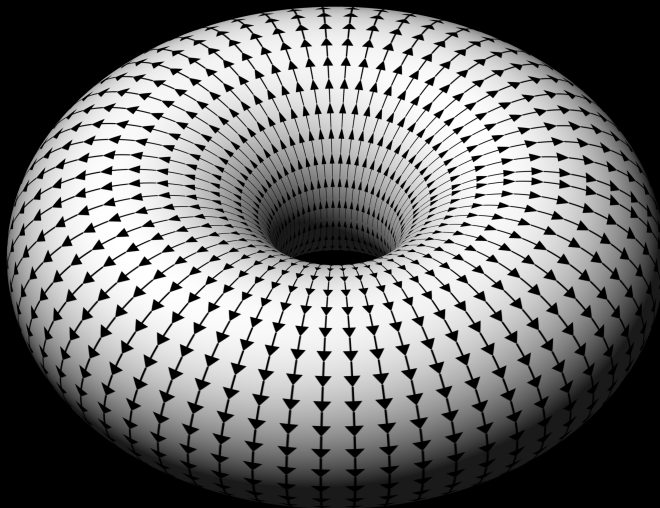
Zobrazení \mathbf{G} a jeho linearizace $D\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$ jsou v okolí pevného bodu \mathbf{x}_0 topologicky konjugovaná.

^aRovnováha je hyperbolická, jestliže centrální vektorový podprostor linearizovaného systému v jejím okolí má dimenzi $m_0 = 0$.

Věta 5

Předpokládejme, že $\mathbf{G}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je (C^1) difeomorfismus a \mathbf{x}_0 je jeho pevný bod (rovnováha). Pak existuje lokálně stabilní varieta $\mathbf{W}_{loc}^s(\mathbf{x}_0)$ dimenze m_- tečná v bodě \mathbf{x}_0 k podprostoru \mathbf{E}^s zobrazení $D\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$ a nestabilní varieta $\mathbf{W}_{loc}^u(\mathbf{x}_0)$ dimenze m_+ tečná v bodě \mathbf{x}_0 k podprostoru \mathbf{E}^u zobrazení $D\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$.

Redukce na centrální varietu



Co se naučíme:

- porozumět pojmu centrální varieta

Co se naučíme:

- porozumět pojmu centrální varietu
- umět redukovat dynamický systém na centrální varietu

Věta 6 (Věta o centrální varietě)

Nechť $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ je rovnováha systému (2) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{f} \in C^r$ ($r \geq 2$), která není hyperbolická (tj. počet vlastních čísel $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ s nulovou reálnou částí $m_0 \neq 0$). Pak v okolí počátku existuje hladká invariantní varietu $\mathbf{W}_{loc}^c(\mathbf{0})$, která je lokálně dána grafem funkce $\nu: \mathbb{R}^{m_0} \rightarrow \mathbb{R}^{m_-} \times \mathbb{R}^{m_+}$, která splňuje $\nu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a $D\nu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Varietu $\mathbf{W}_{loc}^c(\mathbf{0})$ nazýváme centrální varietou.

Důkaz této věty je založen na Banachově větě o pevném bodě. Lze jej nalézt např. v Chicone: Ordinary Differential Equations with Applications, Springer 1999 str. 286-297.

Věta 6 (Věta o centrální varietě)

Nechť $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ je rovnováha systému (2) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{f} \in C^r$ ($r \geq 2$), která není hyperbolická (tj. počet vlastních čísel $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ s nulovou reálnou částí $m_0 \neq 0$). Pak v okolí počátku existuje hladká invariantní varieta $\mathbf{W}_{loc}^c(\mathbf{0})$, která je lokálně dána grafem funkce $\nu: \mathbb{R}^{m_0} \rightarrow \mathbb{R}^{m_-} \times \mathbb{R}^{m_+}$, která splňuje $\nu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a $D\nu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Varietu $\mathbf{W}_{loc}^c(\mathbf{0})$ nazýváme centrální varietou.

Důkaz této věty je založen na Banachově větě o pevném bodě. Lze jej nalézt např. v Chicone: Ordinary Differential Equations with Applications, Springer 1999 str. 286-297.

V okolí počátku existují stejně jako v hyperbolickém případě také hladké invariantní variety $\mathbf{W}_{loc}^s(\mathbf{0})$ a $\mathbf{W}_{loc}^u(\mathbf{0})$ dimenze m_- a m_+ tečné k E^s , resp. E^u .

Uvažujme systém (2) s rovnováhou \mathbf{x}_0 a vlastními hodnotami $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ s nekladnými reálnými částmi (tj. $m_0 \neq 0$, $m_- \neq 0$ a $m_+ = 0$) převedený do tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}_s \mathbf{y} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\end{aligned}\tag{5}$$

kde matice \mathbf{A}_c a \mathbf{A}_s mají m_0 , resp. m_- vlastních čísel s nulovou reálnou částí, resp. se zápornou reálnou částí, $\mathbf{g}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $D\mathbf{g}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $D\mathbf{g}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Nulové řešení je v takovém případě stabilní (ne nutně asymptoticky).

Podle věty o centrální varietě existuje v okolí počátku invariantní lokální centrální varieta $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ daná grafem funkce $\nu: \mathbb{R}^{m_0} \rightarrow \mathbb{R}^{m-}$, tj. $\mathbf{y} = \nu(\mathbf{x})$. Dynamika na centrální varietě bude v okolí počátku dána rovnicí

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}_c \mathbf{u} + \mathbf{g}_1(\mathbf{u}, \nu(\mathbf{u})), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m_0}. \quad (6)$$

Trajektorie systému (5), které neleží na centrální varietě, se k ní exponenciálně přibližují pro $t \rightarrow \infty$. Chování takového systému je tudíž možné redukovat na chování na jeho atraktoru, kterým je invariantní centrální varieta.

Definice 14

Rovnice (6) se nazývá redukcí systému (5) na centrální varietu.

Poznámka

Je evidentní, že pokud je stabilní počátek redukovaného systému, je stabilní také rovnováha \mathbf{x}_0 původního systému (2) s $m_+ = 0$.

Vzhledem k tomu, že centrální varietu je v okolí počátku hladká, bude platit

$$\dot{\mathbf{y}} = D\nu(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}},$$

tj. dosazením $\mathbf{y} = \nu(\mathbf{x})$ a pravých stran rovnic systému (5) dostáváme rovnici pro centrální varietu

$$\mathbf{A}_s\nu(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \nu(\mathbf{x})) = D\nu(\mathbf{x})(\mathbf{A}_c\mathbf{x} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \nu(\mathbf{x}))). \quad (7)$$

Řešení $\mathbf{y} = \nu(\mathbf{x})$ můžeme aproximovat Taylorovým polynomem alespoň 2. stupně (pro dostatečně hladkou \mathbf{f} máme lokálně zaručenu dostatečnou hladkost), navíc nutně $\nu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a $D\nu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Obdobně můžeme využít redukce na centrální varietu i v případě, že dynamický systém závisí na parametrech.

Obdobně můžeme využít redukce na centrální varietu i v případě, že dynamický systém závisí na parametrech.

Uvažujme soustavu systémů

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (8)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^m$ je stavová proměnná, $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^k$ je vektor parametrů a funkce $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ je dostatečně hladká.

Nyní předpokládejme, že (8) má rovnováhu $\mathbf{x}_0(\varepsilon)$ v nějakém okolí $\varepsilon = \mathbf{0}$ a Jacobiho matice $Df(\mathbf{x}_0, \mathbf{0})$ má vlastní čísla s nekladnými reálnými částmi (tj. $m_0 \neq 0$, $m_- \neq 0$ a $m_+ = 0$). Posunutím rovnováhy do počátku můžeme převést systém (8) do tvaru:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}_s \mathbf{y} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon),\end{aligned}\tag{9}$$

kde matice \mathbf{A}_c a \mathbf{A}_s mají pro $\varepsilon = \mathbf{0}$ m_0 , resp. m_- vlastních čísel s nulovou reálnou částí, resp. se zápornou reálnou částí,

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, D\mathbf{g}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, D\mathbf{g}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Doplněním parametrů mezi stavové závislé proměnné můžeme využít předchozího postupu.

Dynamiku na centrální varietě systému (9)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}_s \mathbf{y} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \\ \dot{\varepsilon} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

pak popisuje systém

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{u} + \mathbf{g}_1(\mathbf{u}, \nu(\mathbf{u}, \varepsilon), \varepsilon), \\ \dot{\varepsilon} &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

kde $(\mathbf{u}, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{m_0} \times \mathbb{R}^k$.

Obdobně lze redukovat na centrální varietu i dynamiku obecného systému (2) (resp. systémů (8), které závisejí na parametrech). V obecném případě mají stabilní i nestabilní variety nenulové dimenze $m_- > 0$ a $m_+ > 0$ a dynamiku na centrální varietě musíme redukovat na rozloženém systému

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}_s \mathbf{y} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}_u \mathbf{z} + \mathbf{g}_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}),\end{aligned}$$

kde matice \mathbf{A}_c , \mathbf{A}_s a \mathbf{A}_u mají m_0 , m_- , resp. m_+ vlastních čísel s nulovou, zápornou, resp. kladnou reálnou částí, přičemž centrální varietu pak splňuje:

$$\begin{aligned}W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0}) &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{m_0} \times \mathbb{R}^{m_-} \times \mathbb{R}^{m_+} \mid \mathbf{y} = \boldsymbol{\nu}_1(\mathbf{x}), \mathbf{z} = \boldsymbol{\nu}_2(\mathbf{x}), \\ &\quad \boldsymbol{\nu}_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\nu}_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, D\boldsymbol{\nu}_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, D\boldsymbol{\nu}_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\}\end{aligned}$$

a pro dostatečně hladké funkce $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\nu}_2$ platí

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \nu_1(\mathbf{x}), \nu_2(\mathbf{x})), \\ \dot{\mathbf{y}} &= D\nu_1(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_s \nu_1(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \nu_1(\mathbf{x}), \nu_2(\mathbf{x})), \\ \dot{\mathbf{z}} &= D\nu_2(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_u \nu_2(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_3(\mathbf{x}, \nu_1(\mathbf{x}), \nu_2(\mathbf{x})).\end{aligned}$$

Lokální dynamiku na centrální varietě popisuje první rovnice, aproximaci variety v okolí rovnováhy můžeme vypočítat porovnáním koeficientů z druhé a třetí rovnice, pokud funkce ν_1 , ν_2 v blízkosti $\mathbf{0}$ nahradíme Taylorovým rozvojem.

Příklady na redukci na centrální varietu

Všechny úlohy si vyzkoušejte zobrazit v programech XPPAUT a Maple.

Maple worksheets:

- Výpočet centrální variety v rovině
- Výpočet centrální variety v prostoru
- Výpočet centrální variety pro Lorenzův systém v okolí vidličkové bifurkace

Lorenzův model – PŘF:M6201 Nelineární dynamika a její aplikace

Obdobná tvrzení platí pro zobrazení (viz např. [Wig03] str. 257), uvedeme jen to první, ostatní tvrzení lze analogicky odvodit (pro $m_+ \neq 0$, parametrizovaná zobrazení).

Věta 7 (Věta o centrální varietě)

Nechť $\mathbf{G}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je difeomorfismus z C^r ($r \geq 2$) a \mathbf{x}_0 je jeho pevný bod, který není hyperbolický (tj. počet vlastních čísel $D\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$ s jednotkovou velikostí $m_0 \neq 0$). Pak v okolí počátku existuje hladká invariantní varieta $\mathbf{W}_{loc}^c(\mathbf{0})$, která je lokálně dána grafem funkce $\nu: \mathbb{R}^{m_0} \rightarrow \mathbb{R}^{m_-} \times \mathbb{R}^{m_+}$, která splňuje $\nu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a $D\nu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Varietu $\mathbf{W}_{loc}^c(\mathbf{0})$ nazýváme centrální varietou.

Uvažujme difeomorfismus $\mathbf{G}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (C^r , $r \geq 2$) s pevným bodem \mathbf{x}_0 a vlastními hodnotami $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ s maximálně jednotkovou velikostí (tj. $m_0 \neq 0$, $m_- \neq 0$ a $m_+ = 0$) a jeho iterace převedené do tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(n) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}(n), \mathbf{y}(n)), \\ \mathbf{y}(n+1) &= \mathbf{A}_s \mathbf{y}(n) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}(n), \mathbf{y}(n)),\end{aligned}\tag{10}$$

kde matice \mathbf{A}_c a \mathbf{A}_s mají m_0 , resp. m_- vlastních čísel s jednotkovou velikostí, resp. s velikostí menší než 1, $\mathbf{g}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $D\mathbf{g}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $D\mathbf{g}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Nulová rovnováha je v takovém případě stabilní (ne nutně asymptoticky).

Podle věty o centrální varietě existuje v okolí počátku invariantní lokální centrální varieta $W_{\text{loc}}^c(\mathbf{0})$ daná grafem funkce $\nu: \mathbb{R}^{m_0} \rightarrow \mathbb{R}^{m-}$, tj. $\mathbf{y} = \nu(\mathbf{x})$. Dynamika na centrální varietě bude v okolí počátku dána rovnicí

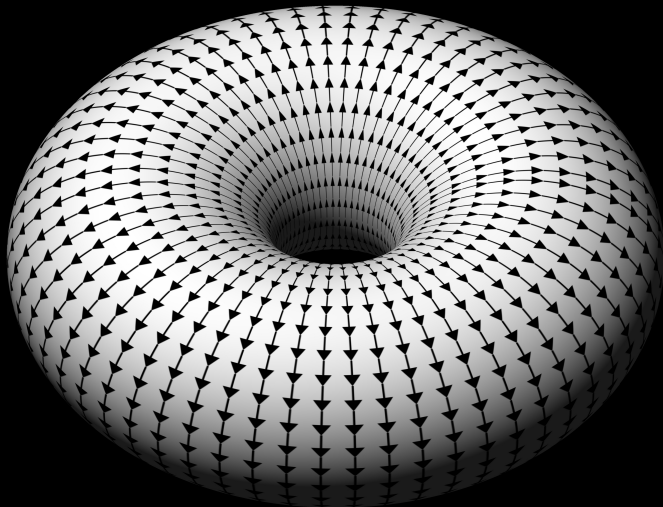
$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{A}_c \mathbf{u}(n) + \mathbf{g}_1(\mathbf{u}(n), \nu(\mathbf{u}(n))), \quad \mathbf{u}(n) \in \mathbb{R}^{m_0}. \quad (11)$$

Iterace systému (10), které neleží na centrální varietě, se k ní exponenciálně přibližují pro $n \rightarrow \infty$. Chování takového systému je tudíž možné redukovat na chování na jeho atraktoru, který leží na invariantní centrální varietě.

Definice 15

Rovnice (11) se nazývá redukcí systému (10) na centrální varietu.

Normální formy



Co se naučíme:

- porozumět principu a využití normálních forem

Co se naučíme:

- porozumět principu a využití normálních forem
- umět převést systém do vhodného tvaru

Dynamické systémy, které jsme viděli, jsou definovány v konečně-dimenzionálním prostoru \mathbb{R}^m nebo na m -rozměrných varietách, kde můžeme lokálně přejít do takového prostoru pomocí zavedení nějaké souřadné soustavy a zobrazení na tečný prostor izomorfní s \mathbb{R}^m . Pro jednoduchost tedy zůstaneme přímo v \mathbb{R}^m .

Dynamické systémy, které jsme viděli, jsou definovány v konečně-dimenzionálním prostoru \mathbb{R}^m nebo na m -rozměrných varietách, kde můžeme lokálně přejít do takového prostoru pomocí zavedení nějaké souřadné soustavy a zobrazení na tečný prostor izomorfní s \mathbb{R}^m . Pro jednoduchost tedy zůstaneme přímo v \mathbb{R}^m .

Dynamický systém ale lze i v takovém případě zapsat různě – můžeme zvolit různé souřadné soustavy a můžeme přecházet k zápisu systému pomocí matice přechodu od jedné báze k jiné. Viděli jsme, že v okolí rovnováhy je velmi výhodným zápisem blokový Jordanův tvar linearizace, ve kterém vidíme dimenze stabilní, nestabilní a centrální variety. V případě $m_0 = 0$, kdy je rovnováha hyperbolická, máme navíc k dispozici Grobmanovu–Hartmannovu větu a nelineární dynamiku si můžeme lokálně „nahradit“ tou lineární.

Podívejme se na systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

kde $x, y \in \mathbb{R}$ s triviální rovnováhou. Matice linearizovaného systému je matice rotace, vlastní čísla jsou $1 \pm i$. Počátek je nestabilní.

Podívejme se na systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

kde $x, y \in \mathbb{R}$ s triviální rovnováhou. Matice linearizovaného systému je matice rotace, vlastní čísla jsou $1 \pm i$. Počátek je nestabilní.

Zavedením komplexní proměnné $z = x + iy$ dostaneme

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = x + iy + i(x + iy) - (x + iy)(x^2 + y^2),$$

tj.

$$\dot{z} = (1 + i)z - z|z|^2.$$

Eulerův tvar komplexního čísla $z = \rho e^{i\varphi}$ pak dává polární tvar

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(1 - \rho^2), \\ \dot{\varphi} &= 1\end{aligned}$$

téhož dynamického systému, který byl původně zapsán v kartézských souřadnicích.

Eulerův tvar komplexního čísla $z = \rho e^{i\varphi}$ pak dává polární tvar

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(1 - \rho^2), \\ \dot{\varphi} &= 1\end{aligned}$$

téhož dynamického systému, který byl původně zapsán v kartézských souřadnicích.

V takto zapsaném systému vidíme kromě nestability rovnováhy v počátku typu ohniska i nelokální chování trajektorií. Limitní cyklus (kružnici) s poloměrem $\rho = 1$, dokonce vidíme, že je stabilní invariantní množinou. Můžeme také najít explicitní řešení systému.

Mohli bychom to stejné udělat pro parametrický systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - \varepsilon x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + y - \varepsilon y(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ je nule blízký parametr?

Mohli bychom to stejné udělat pro parametrický systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - \varepsilon x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + y - \varepsilon y(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ je nule blízký parametr?

V takovém případě dostaneme polární tvar

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(1 - \varepsilon\rho^2), \\ \dot{\varphi} &= 1.\end{aligned}$$

Samozřejmě, že lokálně se v okolí počátku nic nemění, je nestabilním ohniskem. Přesto pro $\varepsilon = 0$ dostáváme kvalitativně jinou dynamiku než v případě $\varepsilon > 0$. V okolí rovnováhy neexistuje cyklus. Tuto věc nijak nepostihuje a ani nemůže postihnout Grobmanova–Hartmanova věta, ale nás samozřejmě tato informace velmi zajímá.

- Umíme dynamický systém vždy převést alespoň v okolí rovnováhy do nějakého jednoduchého tvaru, který kvalitativně zachová dynamiku?

- Umíme dynamický systém vždy převést alespoň v okolí rovnováhy do nějakého jednoduchého tvaru, který kvalitativně zachová dynamiku?
- Lokálně nám zaručuje Grobmanova–Hartmanova věta, že můžeme přejít k linearizaci v blízkosti hyperbolické rovnováhy. Dokážeme najít podobný jednoduchý tvar systému i pro nehyperbolickou rovnováhu?

- Umíme dynamický systém vždy převést alespoň v okolí rovnováhy do nějakého jednoduchého tvaru, který kvalitativně zachová dynamiku?
- Lokálně nám zaručuje Grobmanova–Hartmanova věta, že můžeme přejít k linearizaci v blízkosti hyperbolické rovnováhy. Dokážeme najít podobný jednoduchý tvar systému i pro nehyperbolickou rovnováhu?
- Nalezneme nějaký algoritmus, který by systém upravil do „hezkého“ tvaru a našel tyto významné situace alespoň lokálně?

- Umíme dynamický systém vždy převést alespoň v okolí rovnováhy do nějakého jednoduchého tvaru, který kvalitativně zachová dynamiku?
- Lokálně nám zaručuje Grobmanova–Hartmanova věta, že můžeme přejít k linearizaci v blízkosti hyperbolické rovnováhy. Dokážeme najít podobný jednoduchý tvar systému i pro nehyperbolickou rovnováhu?
- Nalezneme nějaký algoritmus, který by systém upravil do „hezkého“ tvaru a našel tyto významné situace alespoň lokálně?
- Z předchozího příkladu jsme viděli, že i v případě, že centrální varieta má nulovou dimenzi a lokálně se dynamika nemění, z globálního pohledu to tak nemusí být. Pomůže nám ten „hezký“ tvar k nalezení nějakých typických nelokálních chování systému?

Otázky, které si klademe, nemají jednoduché odpovědi a uvidíte, že povedou k dalším otázkám. Ale začněme tak, jak to v minulém století dělalo mnoho tvůrců dnešní teorie dynamických systémů – od singulární matice linearizace.

Otázky, které si klademe, nemají jednoduché odpovědi a uvidíte, že povedou k dalším otázkám. Ale začněme tak, jak to v minulém století dělalo mnoho tvůrců dnešní teorie dynamických systémů – od singulární matice linearizace.

Slovo **bifurkace** – větvení – použil poprvé Henri Poincaré ve smyslu rozvětvení variety rovnováh dynamického systému (8)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$$

závislého na parametru (dnes se nazývá fold bifurkace, transkritická a vidličková bifurkace). Větvení tedy znamená, že rovnovážná varieta v kritickém rovnovážném bodě \mathbf{x}_0 bifurkace nemůže být funkcí parametru, tj. není hladkou varietou implicitně zadanou předpisem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{0}$$

a nesplňuje podmínku regularity matice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ z věty o implicitně dané funkci, ale rovnováhy se v kritickém bodě „větví“.

„Hezký“ tvar systému v okolí rovnováhy v případě hyperbolické rovnováhy a regulární matice $Df(\mathbf{x}_0)$ zaručuje alespoň lokálně Grobmanova–Hartmanova věta, singulární matice implikuje existenci nulového vlastního čísla a nás napadne, že do hry vstoupí asi další nelineární členy funkce f v Taylorově rozvoji této funkce v okolí rovnováhy.

„Hezký“ tvar systému v okolí rovnováhy v případě hyperbolické rovnováhy a regulární matice $Df(\mathbf{x}_0)$ zaručuje alespoň lokálně Grobmanova–Hartmanova věta, singulární matice implikuje existenci nulového vlastního čísla a nás napadne, že do hry vstoupí asi další nelineární členy funkce f v Taylorově rozvoji této funkce v okolí rovnováhy.

Fakticky se tak dostáváme do algebraické geometrie a teorie singularit, respektive k teorii katastrof. Pokud se chcete dozvědět víc, můžete si zapsat předmět doc. Šilhana **PřF:M4190 Diferenciální geometrie křivek a ploch** nebo doc. Vokřínka **PřF:M8140 Algebraická geometrie** a **PřF:MD140 Teorie singularit** nebo se začíst do prací Reného Thoma či Vladimira Arnolda.

V roce 1965 navštěvoval Vladimír Arnold seminář Reného Thoma o teorii katastrof v Institut des hautes études scientifiques v Paříži. Tyto přednášky jej natolik ovlivnily, že se teorie singularit stala jednou z významných vědeckých oblastí studia pro něj i mnoho jeho studentů. Jedním z jeho významných výsledků je klasifikace jednoduchých singularit v článku *Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k , D_k , E_k and Lagrangian singularities* (rusky).

Pro praktické využití má tato klasifikace obrovský význam. Ukazuje, že v případě, že měníme parametry systému (v Arnoldově článku až 5), můžeme jak v okolí hyperbolické rovnováhy, tak v případě nehyperbolických rovnováh klasifikovat topologicky ekvivalentní dynamické systémy v okolí rovnováh. Navíc uvidíme, že určuje typické (generické) chování systému a možné změny tohoto chování při změně jednoho či více parametrů. V reálných dynamických systémech tak porozumíme typickým jevům jako jsou zánik rovnováh, hysterese, vznik oscilací, zánik oscilací splynutím cyklů nebo na separatrix sedla apod., které se objevují napříč všemi vědními obory – od neuronů, přes ekonomické cykly až po biochemické přepínače apod. Více se aplikacemi zabývá předmět **PřF:M6201 Nelineární dynamika a její aplikace**.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že je systém (2) již ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (12)$$

kde $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ je Jacobiho matice linearizace (2) v okolí jeho izolované rovnováhy \mathbf{x}_0 a nelineární část $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ má Taylorův rozvoj k -tého stupně v okolí počátku tvaru

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_3(\mathbf{x}) + \cdots + \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) + O(\|\mathbf{x}\|^k).$$

Uvažujme nyní lokální transformaci souřadnic, která bude blízká identitě (to můžeme udělat jak v \mathbb{R}^m , tak na m -rozměrné varietě), tj.

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{h}_2(\mathbf{y}), \quad (13)$$

kde \mathbf{h}_2 je polynom 2. stupně, tedy má nulovou funkční hodnotu i první parciální derivace.

Uvažujme nyní lokální transformaci souřadnic, která bude blízká identitě (to můžeme udělat jak v \mathbb{R}^m , tak na m -rozměrné varietě), tj.

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{h}_2(\mathbf{y}), \quad (13)$$

kde \mathbf{h}_2 je polynom 2. stupně, tedy má nulovou funkční hodnotu i první parciální derivace.

Dynamický systém (12) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x})$, můžeme v nových souřadnicích napsat jako

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} + D\mathbf{h}_2(\mathbf{y}))\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\mathbf{y} + \mathbf{J}\mathbf{h}_2(\mathbf{y}) + \mathbf{F}(\mathbf{y} + \mathbf{h}_2(\mathbf{y})). \quad (14)$$

Pro dostatečně malé \mathbf{y} je matice $I + Dh_2(\mathbf{y})$ regulární a existuje k ní inverzní matice, pro kterou platí

$$(I + Dh_2(\mathbf{y}))^{-1} = I - Dh_2(\mathbf{y}) + O(\|\mathbf{y}\|^2),$$

Pro dostatečně malé \mathbf{y} je matice $I + Dh_2(\mathbf{y})$ regulární a existuje k ní inverzní matice, pro kterou platí

$$(I + Dh_2(\mathbf{y}))^{-1} = I - Dh_2(\mathbf{y}) + O(\|\mathbf{y}\|^2),$$

takže

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= (I + Dh_2(\mathbf{y}))^{-1} (\mathbf{Jy} + \mathbf{Jh}_2(\mathbf{y}) + \mathbf{F}(\mathbf{y} + \mathbf{h}_2(\mathbf{y}))) = \\ &= (I - Dh_2(\mathbf{y}) + O(\|\mathbf{y}\|^2)) (\mathbf{Jy} + \mathbf{Jh}_2(\mathbf{y}) + \mathbf{F}(\mathbf{y} + \mathbf{h}_2(\mathbf{y}))) = \\ &= \mathbf{Jy} + \mathbf{Jh}_2(\mathbf{y}) + \mathbf{F}(\mathbf{y} + \mathbf{h}_2(\mathbf{y})) - \\ &\quad - Dh_2(\mathbf{y})(\mathbf{Jy} + \mathbf{Jh}_2(\mathbf{y}) + \mathbf{F}(\mathbf{y} + \mathbf{h}_2(\mathbf{y}))) + O(\|\mathbf{y}\|^3) = \\ &= \mathbf{Jy} + \mathbf{Jh}_2(\mathbf{y}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{y} + \mathbf{h}_2(\mathbf{y})) - Dh_2(\mathbf{y})\mathbf{Jy} + O(\|\mathbf{y}\|^3) \\ &= \mathbf{Jy} + \mathbf{Jh}_2(\mathbf{y}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{y}) - Dh_2(\mathbf{y})\mathbf{Jy} + O(\|\mathbf{y}\|^3) \end{aligned}$$

Volbou h_2 tak, aby platilo

$$F_2(\mathbf{y}) = Dh_2(\mathbf{y})J\mathbf{y} - Jh_2(\mathbf{y}), \quad (15)$$

se umíme zbavit kvadratických členů a dynamický systém budeme umět převést do mnohem jednoduššího tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^3).$$

Volbou h_2 tak, aby platilo

$$F_2(\mathbf{y}) = Dh_2(\mathbf{y})J\mathbf{y} - Jh_2(\mathbf{y}), \quad (15)$$

se umíme zbavit kvadratických členů a dynamický systém budeme umět převést do mnohem jednoduššího tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^3).$$

Jak najít řešení tzv. homologické rovnice (15)?

Volbou \mathbf{h}_2 tak, aby platilo

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{y}) = D\mathbf{h}_2(\mathbf{y})\mathbf{J}\mathbf{y} - \mathbf{J}\mathbf{h}_2(\mathbf{y}), \quad (15)$$

se umíme zbavit kvadratických členů a dynamický systém budeme umět převést do mnohem jednoduššího tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^3).$$

Jak najít řešení tzv. homologické rovnice (15)?

Ve správném vektorovém prostoru je to jen lineární algebraická rovnice :-)

Ve vektorovém prostoru V_k polynomů stupně k můžeme každý polynom zapsat jako lineární kombinaci homogenních polynomů, které tvoří jeho bázi. Stejně tak můžeme najít bázi vektorového prostoru polynomů k -tého stupně. Například pro dvojrozměrné systémy, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, je prostor

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ve vektorovém prostoru V_k polynomů stupně k můžeme každý polynom zapsat jako lineární kombinaci homogenních polynomů, které tvoří jeho bázi. Stejně tak můžeme najít bázi vektorového prostoru polynomů k -tého stupně. Například pro dvojrozměrné systémy, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, je prostor

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Protože $\mathbf{h}_2(\mathbf{y}) \in V_2$ a $D\mathbf{h}_2(\mathbf{y})\mathbf{J}\mathbf{y} - \mathbf{J}\mathbf{h}_2(\mathbf{y}) \in V_2$, řešíme vlastně lineární úlohu v prostoru V_2 .

Obecněji platí, že také $\mathbf{h}_k(\mathbf{y}) \in V_k$ a

$$L_j^k(\mathbf{h}_k(\mathbf{y})) = -(D\mathbf{h}_k(\mathbf{y})\mathbf{J}\mathbf{y} - \mathbf{J}\mathbf{h}_k(\mathbf{y})) \in V_k,$$

přičemž operátor L_j^k se nazývá Lieova derivace a značí se také pomocí Lieovy závorky:

$$[\mathbf{h}_k(\mathbf{y}), \mathbf{J}\mathbf{y}] = \mathbf{J}\mathbf{h}_k(\mathbf{y}) - D\mathbf{h}_k(\mathbf{y})\mathbf{J}\mathbf{y}.$$

Arnold nazýval Lieovu derivaci jako rybářovu derivaci. Transformaci blízkou identitě $\text{id} + \mathbf{h}_2$, kterou jsme změnil souřadnice v \mathbb{R}^m na nové si totiž můžeme představit jako tok (vektorový tok) řeky, ve které se pohybuje ryba (dynamický systém, jiný vektorový tok). Zvenku rybář vidí pohyb ryby v toku řeky (změna vektorového toku vůči jinému).

Vraťme se nyní k naší původní úloze

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{y}) = D\mathbf{h}_2(\mathbf{y})\mathbf{J}\mathbf{y} - \mathbf{J}\mathbf{h}_2(\mathbf{y}) = -L_J^2(\mathbf{h}_2(\mathbf{y})).$$

Z lineární algebry víme, že vektorový prostor V_2 lze rozložit na $L_J^2(V_2)$ a jeho komplement W_2 , tedy

$$V_2 = L_J^2(V_2) \oplus W_2.$$

Pokud je $\mathbf{F}_2(\mathbf{y}) \in L_J^2(V_2)$, umíme \mathbf{h}_2 najít a eliminovat všechny kvadratické členy. Pokud ne, pak $\mathbf{F}_2(\mathbf{y}) = \mathbf{F}_2^{elim}(\mathbf{y}) + \mathbf{F}_2^r(\mathbf{y})$, kde $\mathbf{F}_2^{elim}(\mathbf{y})$ lze eliminovat a $\mathbf{F}_2^r(\mathbf{y}) \in W_2$ ne. Tyto členy se nazývají (historicky) rezonanční.

Naprosto analogicky pak lze pokračovat s dalšími nelineárními členy v prostorech V_k a eliminovat nelineární členy až na rezonanční členy v prostoru W_k .

Naprosto analogicky pak lze pokračovat s dalšími nelineárními členy v prostorech V_k a eliminovat nelineární členy až na rezonanční členy v prostoru W_k .

Věta 8 (Normální tvar)

System (12), resp. (2), lze převést konečným počtem analytických transformací souřadnic v okolí počátku do tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\mathbf{y} + \mathbf{F}_2^r(\mathbf{y}) + \mathbf{F}_3^r(\mathbf{y}) + \cdots + \mathbf{F}_k^r(\mathbf{y}) + O(\|\mathbf{y}\|^{k+1}), \quad (16)$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{F}_i^r(\mathbf{y}) \in W_i$ pro $i \in \{2, \dots, k\}$.

Několik poznámek, které by měly být vyřčeny.

- Rozklad prostoru $V_k = L_J^k(V_2) \oplus W_k$ není jednoznačný, a proto ani normální tvar systému (12), resp. (2) není jednoznačně určen.

Několik poznámek, které by měly být vyřčeny.

- Rozklad prostoru $V_k = L_J^k(V_2) \oplus W_k$ není jednoznačný, a proto ani normální tvar systému (12), resp. (2) není jednoznačně určen.
- Pevně je ale dána dimenze prostorů V_k i W_k , a tedy i počet rezonančních nelineárních homogenních vektorových polynomů.

Několik poznámek, které by měly být vyřčeny.

- Rozklad prostoru $V_k = L_J^k(V_2) \oplus W_k$ není jednoznačný, a proto ani normální tvar systému (12), resp. (2) není jednoznačně určen.
- Pevně je ale dána dimenze prostorů V_k i W_k , a tedy i počet rezonančních nelineárních homogenních vektorových polynomů.
- Místo variety v \mathbb{R}^m je někdy vhodné pracovat v prostoru $\mathbb{C}^{m/2}$, jak uvidíme např. u Hopfovy bifurkace

Několik poznámek, které by měly být vyřčeny.

- Rozklad prostoru $V_k = L_J^k(V_2) \oplus W_k$ není jednoznačný, a proto ani normální tvar systému (12), resp. (2) není jednoznačně určen.
- Pevně je ale dána dimenze prostorů V_k i W_k , a tedy i počet rezonančních nelineárních homogenních vektorových polynomů.
- Místo variety v \mathbb{R}^m je někdy vhodné pracovat v prostoru $\mathbb{C}^{m/2}$, jak uvidíme např. u Hopfovy bifurkace
- V případě, že lineární zobrazení z \mathbb{R}^m do \mathbb{R}^m reprezentované maticí J zachovává nějakou symetrii (mluvíme pak o ekvivariantním zobrazení), pak lze W_k volit tak, aby byly invariantní vůči této symetrii (např. záměna stavových proměnných, rotace apod.).

Několik poznámek, které by měly být vyřčeny.

- Rozklad prostoru $V_k = L_J^k(V_2) \oplus W_k$ není jednoznačný, a proto ani normální tvar systému (12), resp. (2) není jednoznačně určen.
- Pevně je ale dána dimenze prostorů V_k i W_k , a tedy i počet rezonančních nelineárních homogenních vektorových polynomů.
- Místo variety v \mathbb{R}^m je někdy vhodné pracovat v prostoru $\mathbb{C}^{m/2}$, jak uvidíme např. u Hopfovy bifurkace
- V případě, že lineární zobrazení z \mathbb{R}^m do \mathbb{R}^m reprezentované maticí J zachovává nějakou symetrii (mluvíme pak o ekvivariantním zobrazení), pak lze W_k volit tak, aby byly invariantní vůči této symetrii (např. záměna stavových proměnných, rotace apod.).
- Postup lze použít i pro parametrické systémy tvaru (8).

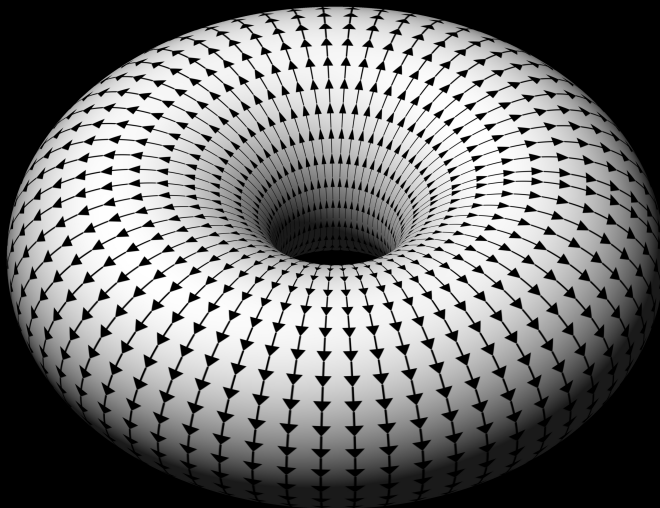
Několik poznámek, které by měly být vyřčeny.

- Rozklad prostoru $V_k = L_J^k(V_2) \oplus W_k$ není jednoznačný, a proto ani normální tvar systému (12), resp. (2) není jednoznačně určen.
- Pevně je ale dána dimenze prostorů V_k i W_k , a tedy i počet rezonančních nelineárních homogenních vektorových polynomů.
- Místo variety v \mathbb{R}^m je někdy vhodné pracovat v prostoru $\mathbb{C}^{m/2}$, jak uvidíme např. u Hopfovy bifurkace
- V případě, že lineární zobrazení z \mathbb{R}^m do \mathbb{R}^m reprezentované maticí J zachovává nějakou symetrii (mluvíme pak o ekvivariantním zobrazení), pak lze W_k volit tak, aby byly invariantní vůči této symetrii (např. záměna stavových proměnných, rotace apod.).
- Postup lze použít i pro parametrické systémy tvaru (8).
- Analogický postup i tvrzení o existenci normální formy platí pro zobrazení, přičemž lineárním operátorem je $J \circ h - h \circ J$, přičemž eliminaci členů zaručíme zobrazením $\text{id} + h$, kde h je řešením homologické rovnice $J \circ h - h \circ J + F = 0$.

Příklady na normální formy

Normální formy Hopfovy a Neimarkovy-Sackerovy bifurkace v programu Maple

Normální formy jednoparametrických lokálních bifurkací – spojité systémy



Co se naučíme:

- zopakovat základní jednoparametrické bifurkace rovnováh spojitých dynamických systémů

Co se naučíme:

- zopakovat základní jednoparametrické bifurkace rovnováh spojitých dynamických systémů
- využít znalosti redukce na centrální varietu

Co se naučíme:

- zopakovat základní jednoparametrické bifurkace rovnováh spojitých dynamických systémů
- využít znalosti redukce na centrální varietu
- zopakovat a rozšířit metodiku výpočtu základních bifurkačních variet

Co se naučíme:

- zopakovat základní jednoparametrické bifurkace rovnováh spojitých dynamických systémů
- využít znalosti redukce na centrální varietu
- zopakovat a rozšířit metodiku výpočtu základních bifurkačních variet
- metodu průměrování

Věta 9

Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrický systém (rovnice)

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

kde f je hladká funkce, má pro $\alpha = \alpha_0$ rovnovážný bod $x = x_0$ a $\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 0$. Předpokládejme, že jsou splněny

$$f_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{podmínka nedegenerovanosti,}$$

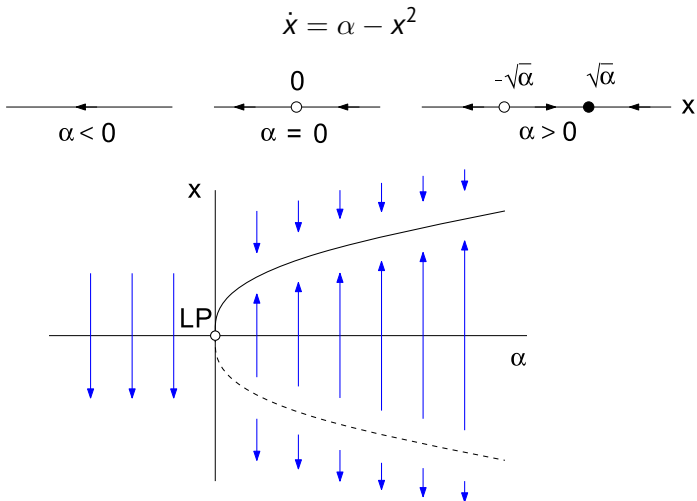
$$f_\alpha(x_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{podmínka transversality.}$$

Pak je (17) v okolí rovnováhy lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **fold bifurkace**

$$\dot{y} = \pm \varepsilon \pm y^2$$

v okolí počátku.

Normální forma bifurkace typu fold:



Domácí úkol:

Ověřte podmínky nedegenerovanosti a transversality nalezením vhodné funkce $\delta(\alpha)$ tak, aby transformace souřadnic $y = x + \delta(\alpha)$ převedla rovnici (17) na její normální formu (tentokrát eliminujeme lineární členy). Proč se nemusíme zabývat členy $O(y^3)$? Návod viz [Kuz13] str. 83.

Věta 10

Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrická rovnice

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

kde f je hladká funkce, která má pro $\alpha = \alpha_0$ nehyperbolickou rovnováhu $x = x_0$ ($\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 0$), která leží na průsečíku dvou větví rovnováh, tj. platí také $f_\alpha(x_0, \alpha_0) = 0$. Předpokládejme, že jsou navíc splněny podmínky

$$f_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{podmínka nedegenerovanosti,}$$

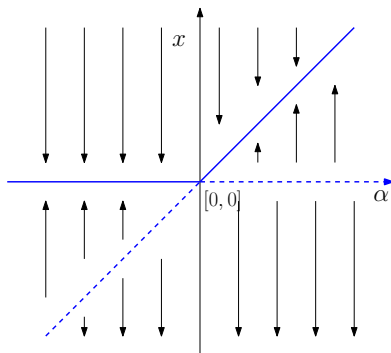
$$f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{podmínka transverzality.}$$

Pak je (18) v okolí rovnováhy x_0 lokálně topologicky ekvivalentní systému v okolí počátku v normální formě **transkritické bifurkace**

$$\dot{y} = \pm \varepsilon y \pm y^2.$$

Normální forma transkritické bifurkace:

$$\dot{x} = \alpha x - x^2$$



Věta 11

Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrická rovnice

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

kde $f(x - x_0)$ je v okolí počátku lichá funkce, která má pro $\alpha = \alpha_0$ nehyperbolickou rovnováhu $x = x_0$ ($\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 0$).

Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$f_{xxx}(x_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{podmínka nedegenerovanosti,}$$

$$f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{podmínka transversality.}$$

Pak je (19) v okolí rovnováhy lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **vidličkové bifurkace**

$$\dot{y} = \pm \varepsilon y \pm y^3$$

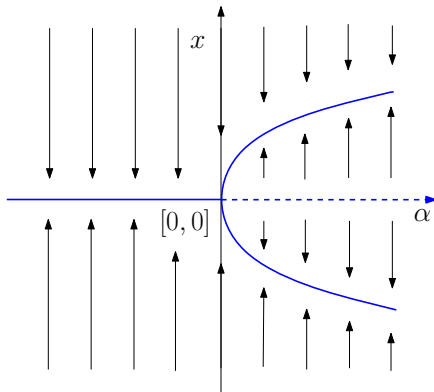
v okolí počátku.

Video prof. Ghrista **Vidličková superkritická a subkritická bifurkace**

Video prof. Ghrista **Vidličková superkritická a subkritická bifurkace**

Normální forma vidličkové (pitchfork) bifurkace:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3$$



- Co mají společného tyto typy bifurkací?

- Co mají společného tyto typy bifurkací?
- V čem se odlišují?

- Co mají společného tyto typy bifurkací?
- V čem se odlišují?
- Proč neuvádíme další typy normálních forem, např. $\dot{x} = \varepsilon - x^4$ nebo $\dot{x} = \varepsilon x - x^4$?

- Co mají společného tyto typy bifurkací?
- V čem se odlišují?
- Proč neuvádíme další typy normálních forem, např. $\dot{x} = \varepsilon - x^4$ nebo $\dot{x} = \varepsilon x - x^4$?
- Existují tyto bifurkace pouze v prostoru \mathbb{R}^1 ? Můžeme je nalézt ve vícerozměrných prostorech nebo na varietách?

Odpověď na poslední otázku nám dává aparát, který jsme vybudovali dříve – redukce na centrální varietu. Na jednorozměrné centrální varietě nalezneme právě (topologicky vzato) tyto tři typy lokálních jednoparametrických bifurkací: fold, transkritickou a vidličkovou.

Odpověď na poslední otázku nám dává aparát, který jsme vybudovali dříve – redukce na centrální varietu. Na jednorozměrné centrální varietě nalezneme právě (topologicky vzato) tyto tři typy lokálních jednoparametrických bifurkací: fold, transkritickou a vidličkovou. Vysvětlete, proč se fold bifurkaci v \mathbb{R}^2 říká také bifurkace sedlo-uzel.

Odpověď na poslední otázku nám dává aparát, který jsme vybudovali dříve – redukce na centrální varietu. Na jednorozměrné centrální varietě nalezneme právě (topologicky vzato) tyto tři typy lokálních jednoparametrických bifurkací: fold, transkritickou a vidličkovou.

Vysvětlete, proč se fold bifurkaci v \mathbb{R}^2 říká také bifurkace sedlo-uzel.

Můžeme tak jednoduše ověřit, že **příklad** vede opravdu na generickou vidličkovou bifurkaci s jednorozměrnou stabilní varietou.

Odpověď na poslední otázku nám dává aparát, který jsme vybudovali dříve – redukce na centrální varietu. Na jednorozměrné centrální varietě nalezneme právě (topologicky vzato) tyto tři typy lokálních jednoparametrických bifurkací: fold, transkritickou a vidličkovou.

Vysvětlete, proč se fold bifurkaci v \mathbb{R}^2 říká také bifurkace sedlo-uzel.

Můžeme tak jednoduše ověřit, že **příklad** vede opravdu na generickou vidličkovou bifurkaci s jednorozměrnou stabilní varietou.

Výpočet centrální variety pro Lorenzův systém v okolí vidličkové bifurkace

Věta 12

Předpokládejme, že dvoudimenzionální jednoparametrický systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha),$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ je hladká funkce, má pro α z okolí α_0 rovnováhu $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ a $D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$ má vlastní hodnoty $\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, kde $\mu(\alpha_0) = 0$ a $\omega(\alpha_0) = \omega_0 > 0$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{array}{ll} l_1(\alpha_0) \neq 0 & \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ \mu_\alpha(\alpha_0) \neq 0 & \text{podmínka transverzality.} \end{array}$$

Pak je (12) v okolí rovnovážného bodu lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **Hopfovy bifurkace**

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon u - v + \operatorname{sgn} l_1(\alpha_0) \cdot u(u^2 + v^2), \\ \dot{v} &= u + \varepsilon v + \operatorname{sgn} l_1(\alpha_0) \cdot v(u^2 + v^2). \end{aligned}$$

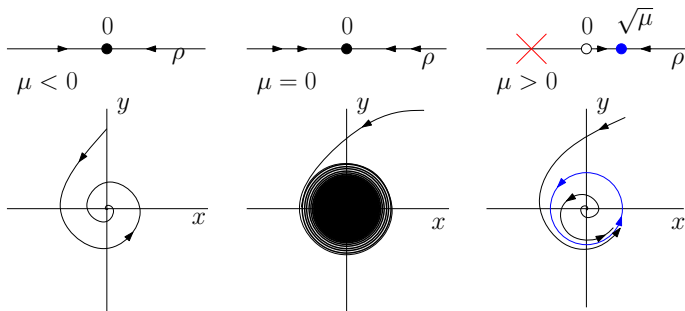
Poznámka

Číslo $l_1(\alpha_0) = \operatorname{Re}(c_1)/\omega_0$ se nazývá první Ljapunovův koeficient nebo první Ljapunovovo číslo, které jsme odvodili pomocí metody normálních forem. Jeho znaménko určuje znaménko u nelineárních členů v normálním tvaru. V případě, že $l_1(\alpha_0) < 0$, je systém ekvivalentní systému se vznikajícím stabilním limitním cyklem, mluvíme o **superkritické** Hopfově bifurkaci. V případě $l_1(\alpha_0) > 0$ jde o **subkritickou** Hopfovou bifurkaci s nestabilním limitním cyklem. Znaménko u ε určuje podmínka transversality.

$$\dot{z} = (\mu + i)z - z|z|^2, \quad \text{resp. pro } z = \rho e^{i\varphi}$$

$$\dot{\rho} = \rho(\mu - \rho^2),$$

$$\dot{\varphi} = 1.$$



video prof. Ghrista – fázový portrét

video prof. Ghrista – $\mu \times x \times y$

Tento typ bifurkace vzniká v případě, že právě dvě vlastní čísla genericky přecházejí přes imaginární osu.

Tento typ bifurkace vzniká v případě, že právě dvě vlastní čísla genericky přecházejí přes imaginární osu.

Perioda cyklu vznikajícího v okolí počátku je $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, protože vznikající periodické řešení je blízké funkci $e^{i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t$.

Tento typ bifurkace vzniká v případě, že právě dvě vlastní čísla genericky přecházejí přes imaginární osu.

Perioda cyklu vznikajícího v okolí počátku je $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, protože vznikající periodické řešení je blízké funkci $e^{i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t$.

Amplituda oscilací vznikajících Hopfovou bifurkací je úměrná změně parametru s jeho **druhou odmocninou**.

Pro nalezení prvního Ljapunovova čísla musíme provést následující transformace:

- převést rovnováhu systému do počátku

Pro nalezení prvního Ljapunovova čísla musíme provést následující transformace:

- převést rovnováhu systému do počátku
- nalézt redukci na dvojrozměrnou centrální varietu

Pro nalezení prvního Ljapunovova čísla musíme provést následující transformace:

- převést rovnováhu systému do počátku
- nalézt redukci na dvojrozměrnou centrální varietu
- transformovat do komplexního tvaru

Pro nalezení prvního Ljapunovova čísla musíme provést následující transformace:

- převést rovnováhu systému do počátku
- nalézt redukci na dvojrozměrnou centrální varietu
- transformovat do komplexního tvaru
- provést transformaci na normální formu

Matice J linearizace systému

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

převedeného na centrální varietu má podle předpokladů dvě ryze imaginární vlastní hodnoty $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Jim příslušné (komplexní) vlastní vektory \mathbf{v} , $\bar{\mathbf{v}}$ jsou také komplexně sdružené. Matice

$$\mathbf{T} = (2\operatorname{Re}\mathbf{v}, 2\operatorname{Im}\mathbf{v})$$

převádí

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice J linearizace systému

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

převedeného na centrální varietu má podle předpokladů dvě ryze imaginární vlastní hodnoty $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Jim příslušné (komplexní) vlastní vektory \mathbf{v} , $\bar{\mathbf{v}}$ jsou také komplexně sdružené. Matice

$$\mathbf{T} = (2\operatorname{Re}\mathbf{v}, 2\operatorname{Im}\mathbf{v})$$

převádí

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$$

a transformace

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{u}$$

pak převádí systém na centrální varietě na systém

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{u}). \quad (20)$$

Nelineární část $\begin{pmatrix} P(u_1, u_2) \\ Q(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{u})$ spolu s transformací

$z = u_1 + iu_2$ pak dává reálný tvar pro výpočet prvního Ljapunovova koeficientu $l_1(\alpha_0)$ a určuje stabilitu nebo nestabilitu limitního cyklu vznikajícího v okolí kritické hodnoty Hopfovy bifurkace.

Nelineární část $\begin{pmatrix} P(u_1, u_2) \\ Q(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{u})$ spolu s transformací

$z = u_1 + iu_2$ pak dává reálný tvar pro výpočet prvního Ljapunovova koeficientu $l_1(\alpha_0)$ a určuje stabilitu nebo nestabilitu limitního cyklu vznikajícího v okolí kritické hodnoty Hopfovy bifurkace.

Označme P_{111} 3. derivaci nelineární části prvního řádku podle první složky u_1 vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ v nule, tj.

$$P_{111} = \left. \frac{\partial^3 P(u_1, u_2)}{\partial u_1^3} \right|_{u_1=0, u_2=0}.$$

Podobně např. Q_{12} bude značit 2. derivaci nelineární části druhého řádku podle první a druhé složky vektoru \mathbf{u} v nule, tj.

$$Q_{12} = \left. \frac{\partial^2 Q(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{u_1=0, u_2=0}.$$

První Ljapunovův koeficient pak vypočteme podle vzorce

$$l_1(\alpha_0) = \frac{1}{16\omega_0}(P_{111} + P_{122} + Q_{112} + Q_{222}) \\ + \frac{1}{16\omega_0^2}[P_{12}(P_{11} + P_{22}) - Q_{12}(Q_{11} + Q_{22}) - P_{11}Q_{11} + P_{22}Q_{22}].$$

První Ljapunovův koeficient pak vypočteme podle vzorce

$$l_1(\alpha_0) = \frac{1}{16\omega_0}(P_{111} + P_{122} + Q_{112} + Q_{222}) \\ + \frac{1}{16\omega_0^2}[P_{12}(P_{11} + P_{22}) - Q_{12}(Q_{11} + Q_{22}) - P_{11}Q_{11} + P_{22}Q_{22}].$$

Můžete si ověřit, že toto číslo odpovídá reálné části koeficientu

$$c_1 = i\frac{f_{20}f_{11}}{\omega_0} - i\frac{|f_{11}|^2}{\omega_0} - i\frac{2|f_{02}|^2}{3\omega_0} + f_{21}$$

u rezonančního kubického členu z **příkladu** na výpočet normální formy Hopfovy bifurkace po vydělení ω_0 , což odpovídá časové normalizaci, tj. periodě 2π vznikajícího cyklu systému v normální formě.

První Ljapunovův koeficient pak vypočteme podle vzorce

$$l_1(\alpha_0) = \frac{1}{16\omega_0}(P_{111} + P_{122} + Q_{112} + Q_{222}) \\ + \frac{1}{16\omega_0^2}[P_{12}(P_{11} + P_{22}) - Q_{12}(Q_{11} + Q_{22}) - P_{11}Q_{11} + P_{22}Q_{22}].$$

Můžete si ověřit, že toto číslo odpovídá reálné části koeficientu

$$c_1 = i\frac{f_{20}f_{11}}{\omega_0} - i\frac{|f_{11}|^2}{\omega_0} - i\frac{2|f_{02}|^2}{3\omega_0} + f_{21}$$

u rezonančního kubického členu z **příkladu** na výpočet normální formy Hopfovy bifurkace po vydělení ω_0 , což odpovídá časové normalizaci, tj. periodě 2π vznikajícího cyklu systému v normální formě.

Všichni jste DŮ určitě udělali, tak zde je za odměnu Maple worksheet pro kontrolu ...

Odvození Ljapunovova prvního koeficientu.

Druhou možnost výpočtu nabízí přímo metoda nalezení řešení homologické rovnice v komplexním tvaru normální formy. Tento přístup je vhodný pro obecný zápis algoritmu, který používá k výpočtu např. Matcont (viz [Scholarpedia](#)). V obou případech je dobré mít k dispozici nějaký software.

Metody výpočtu Ljapunovova koeficientu Model Bruselátor

Druhou možnost výpočtu nabízí přímo metoda nalezení řešení homologické rovnice v komplexním tvaru normální formy. Tento přístup je vhodný pro obecný zápis algoritmu, který používá k výpočtu např. Matcont (viz [Scholarpedia](#)). V obou případech je dobré mít k dispozici nějaký software.

Metody výpočtu Ljapunova koeficientu Model Bruselátor

Je vhodné poznamenat, že první zmínky o této bifurkaci najdeme již kolem roku 1892 v pracích Henriho Poincarého a větu v dvojrozměrném případě zformuloval A. A. Andronov v roce 1929. Obecný n -rozměrný případ pak uvedl Eberhard Hopf v roce 1942 (což bylo před znalostí věty o centrální varietě). Stojí za mnoha jevy v neurovědě (opakující se vzruchy neuronů), biochemii (biochemické oscilace), fyzice (pískot), epidemiologii (vlny epidemií), ale také za vznikem vzorů (Turingova nestabilita) apod.

Metody hledání bifurkačních variet

Základní principy numerických kontinuačních metod a analytických metod pro hledání bifurkačních variet naleznete v 8. kapitole předmětu **PřF:M6201 Nelineární dynamika a její aplikace**. Zde si ukážeme spíše metodiku přístupu pro vícerozměrné systémy – pomocí bialternativního součinu a pomocí Routhova–Hurwitzova kritéria.

Nejprve definujeme zvláštní operátor a ukážeme si některé jeho vlastnosti.

Definice 16

Pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ s prvky $a_{ij}, b_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}$ ($n \geq 2$) definujeme jejich **bialternativní součin** jako matici $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, kde $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ a prvky jsou označeny multiindexy a splňují

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B}_{(p,q),(r,s)} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ b_{qr} & b_{qs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{pr} & b_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{bmatrix} \right),$$

kde multiindexy splňují $n \geq p > q \geq 1$ a $n \geq r > s \geq 1$ a řadí se lexikograficky pro $p > q$ a $r > s$.

Nejprve definujeme zvláštní operátor a ukážeme si některé jeho vlastnosti.

Definice 16

Pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ s prvky $a_{ij}, b_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}$ ($n \geq 2$) definujeme jejich **bialternativní součin** jako matici $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, kde $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ a prvky jsou označeny multiindexy a splňují

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B}_{(p,q),(r,s)} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ b_{qr} & b_{qs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{pr} & b_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{bmatrix} \right),$$

kde multiindexy splňují $n \geq p > q \geq 1$ a $n \geq r > s \geq 1$ a řadí se lexikograficky pro $p > q$ a $r > s$.

Poznámka

Lexikografickým řazením rozumíme řazení používané pro slova ve slovníku, tj. $(p_1, q_1) < (p_2, q_2)$, pokud $p_1 < p_2$ nebo $p_1 = p_2$ a zároveň $q_1 < q_2$.

Poznámka

Bialternativní součin reprezentuje antisymetrický operátor na bivektorech vektorového prostoru \mathbb{C}^n (tj. vnějších – wedge – součinech vektorů)

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \mapsto (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}\mathbf{w} - \mathbf{A}\mathbf{w} \wedge \mathbf{B}\mathbf{v}).$$

Vnější součin vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ je definován jako prvek \mathbb{C}^m splňující

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})_{(i,j)} = v_i w_j - v_j w_i \quad \text{pro } n \geq i > j \geq 1.$$

Platí např.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} &= -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}, \\ \mathbf{v} \wedge (\lambda \mathbf{w}) &= \lambda(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}), \\ \mathbf{v} \wedge (\mathbf{u} + \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Lemma 1

Pro jednotkovou matici stejného typu jako \mathbf{A} platí

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{A})(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{v} \wedge \mathbf{A}\mathbf{w}$$

a

$$(\mathbf{2A} \odot \mathbf{I})(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{A}\mathbf{w}.$$

Lemma 1

Pro jednotkovou matici stejného typu jako A platí

$$(A \odot A)(v \wedge w) = Av \wedge Aw$$

a

$$(2A \odot I)(v \wedge w) = Av \wedge w + v \wedge Aw.$$

Lemma 2

Platí

$$A \odot B = -B \odot A,$$

$$A \odot (\lambda B) = \lambda(A \odot B),$$

$$A \odot (B + C) = A \odot B + A \odot C,$$

$$(A \odot A)(B \odot B) = AB \odot AB.$$

Lemma 3

Nechť \mathbf{P} je regulární, pak platí

$$\begin{aligned}(\mathbf{P} \odot \mathbf{P})^{-1} &= \mathbf{P}^{-1} \odot \mathbf{P}^{-1}, \\(\mathbf{PAP}^{-1}) \odot (\mathbf{PAP}^{-1}) &= (\mathbf{P} \odot \mathbf{P})(\mathbf{A} \odot \mathbf{A})(\mathbf{P} \odot \mathbf{P})^{-1}, \\2(\mathbf{PAP}^{-1}) \odot \mathbf{I} &= (\mathbf{P} \odot \mathbf{P})(2\mathbf{A} \odot \mathbf{I})(\mathbf{P} \odot \mathbf{P})^{-1}.\end{aligned}$$

Lemma 3

Nechť \mathbf{P} je regulární, pak platí

$$\begin{aligned}(\mathbf{P} \odot \mathbf{P})^{-1} &= \mathbf{P}^{-1} \odot \mathbf{P}^{-1}, \\(\mathbf{PAP}^{-1}) \odot (\mathbf{PAP}^{-1}) &= (\mathbf{P} \odot \mathbf{P})(\mathbf{A} \odot \mathbf{A})(\mathbf{P} \odot \mathbf{P})^{-1}, \\2(\mathbf{PAP}^{-1}) \odot \mathbf{I} &= (\mathbf{P} \odot \mathbf{P})(2\mathbf{A} \odot \mathbf{I})(\mathbf{P} \odot \mathbf{P})^{-1}.\end{aligned}$$

Věta 13 (Stéphanos 1900)

Pokud má matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak matice $\mathbf{A} \odot \mathbf{A}$ má vlastní čísla $\lambda_i \lambda_j$ a matice $2\mathbf{A} \odot \mathbf{I}$ má vlastní čísla $\lambda_i + \lambda_j$, kde $n \geq i > j \geq 1$.

Uvažujme nyní náš parametrizovaný dynamický systém (8)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon).$$

Uvažujme nyní náš parametrizovaný dynamický systém (8)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon).$$

Věta 14

Funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ a det $D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ se nulují v bodech fold bifurkace, transkritické bifurkace i vidličkové bifurkace.

Uvažujme nyní náš parametrizovaný dynamický systém (8)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon).$$

Věta 14

Funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ a $\det D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ se nulují v bodech fold bifurkace, transkritické bifurkace i vidličkové bifurkace.

Poznámka

Fold bifurkace jako generická lokální bifurkace odpovídá jednonásobným kořenům determinantu, vzniká na ohybu variety rovnováh. Transkritická a vidličková bifurkace jsou průsečíkem dvou variet (větví) rovnováh.

Věta 15

Funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \epsilon)$ a $\det(2D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \epsilon) \odot I)$ se nulují v bodech Hopfovy bifurkace.

Věta 15

Funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \epsilon)$ a $\det(2D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \epsilon) \odot I)$ se nulují v bodech Hopfovy bifurkace.

Věta 15

Funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ a $\det(2D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) \odot I)$ se nulují v bodech Hopfovy bifurkace.

Poznámka

Je třeba si uvědomit, že uvedená podmínka nezaručuje existenci dvou komplexně sdružených opačných vlastních čísel, ale pouze existenci opačných vlastních čísel. Proto tato implicitně daná varieta může obsahovat body, kterým se říká neutrální sedla ($\lambda_1 = -\lambda_2 \in \mathbb{R}$) a bifurkační hraniční body se dvěma nulovými vlastními čísly. Tímto případem se budeme zabývat v následující kapitole o víceparametrických bifurkacích. Jde o Bogdanovovu–Takensovou bifurkaci, jejíž normální formy jsme si také již odvodili.

Maple worksheet pro výpočet bialternativního součinu a některé další vhodné funkce a příklady nalezení bifurkačních variet najdete již na Maplesoft Application Center (disertační práce dr. V. Hajnové):

Výpočet bialternativního součinu v Maple [Haj19]

Poznámka

V případě Hopfovy bifurkace odpovídá podmínka $\det(2D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) \odot I)$ vynulování jednoho z determinantů v Routhových–Hurwitzových podmínkách ($\text{tr } D\mathbf{f}$ pro $n = 2$). Tento postup je historicky starší a je stále běžně používán. Routhovy–Hurwitzovy podmínky se ale používají jako podmínky stability rovnováhy, tedy v případě nestabilního ohniska nejsou splněny.

Routhovo–Hurwitzovo kritérium

Předpokládejme, že Jacobiho matice systému (2) v rovnováze je tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a charakteristický polynom

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (21)$$

Definujme Hurwitzovu matici

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \vdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_n \end{pmatrix}$$

a její hlavní minory

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

Věta 16 (Routhova–Hurwitzova)

Kořeny charakteristického polynomu (21) (vlastní čísla \mathbf{A}) mají negativní reálné části právě tehdy, když jsou všechny hlavní minory Hurwitzovy matice \mathbf{H} kladné.

- *V případě, že jsou kladné až na $\Delta_n = 0$, což implikuje $a_n = \det \mathbf{A} = 0$, leží rovnováha na hranici aperiodické stability.*
- *V případě, že jsou kladné až na $\Delta_{n-1} = 0$, což implikuje existenci ryze komplexních sdružených vlastních čísel, leží rovnováha na hranici periodické stability.*

Metoda průměrování

Uvažujme úlohu

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), \quad (22)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m$, $0 < \varepsilon \ll 1$, \mathbf{f} je dostatečně hladká T -periodická funkce z C^r . Definujme k \mathbf{f} v čase průměrnou funkci

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{y}, t, \varepsilon) dt.$$

Pak obdobnou metodou, jako jsme používali při hledání normálních forem, tj. nalezením vhodné identitě blízké transformace, lze nahradit periodický systém průměrným systémem s obdobnou dynamikou.

Věta 17

Existuje $\mathbf{w} \in C^r$ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{w}(\mathbf{y}, t, \varepsilon)$ převádí systém (22) na

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{g}(\mathbf{y}, t, \varepsilon), \quad (23)$$

kde \mathbf{g} je T -periodická a řešení $\mathbf{x}(t)$ systému (22) a řešení $\mathbf{y}(t)$ systému (23) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, resp. $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, splňují $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| = O(\varepsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| = O(\varepsilon)$ pro $t \in \langle 0, \frac{1}{\varepsilon L} \rangle$, kde L je **lipschitzovská konstanta** $\bar{\mathbf{f}}$. Je-li \mathbf{y}^* rovnováha (23), pak existuje $\varepsilon_0 > 0$: $\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ systém (22) má periodické řešení (nebo konstatní) $\gamma_\varepsilon(t) = \mathbf{y}^* + O(\varepsilon)$ stejného typu stability. Stabilní (nestabilní) variety řešení \mathbf{y}^* a $\gamma_\varepsilon(t)$ se také liší maximálně o násobek ε pro $t \in \langle 0, \infty \rangle$.

Pokud f závisí na parametru α , může zprůměrovaný systém projít bifurkací. Pak platí následující tvrzení:

Věta 18

Nechť $\alpha = \alpha_0$ je kritická hodnota fold nebo Hopfovy bifurkace systému (23). Pak pro dost malé $\varepsilon > 0$ a α blízké α_0 prochází stejným typem bifurkace také Poincarého zobrazení systému (22).

Pokud f závisí na parametru α , může zprůměrovaný systém projít bifurkací. Pak platí následující tvrzení:

Věta 18

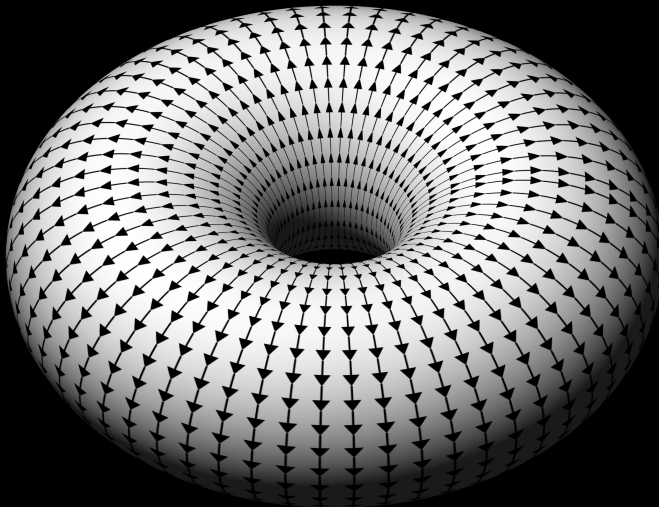
Nechť $\alpha = \alpha_0$ je kritická hodnota fold nebo Hopfovy bifurkace systému (23). Pak pro dost malé $\varepsilon > 0$ a α blízké α_0 prochází stejným typem bifurkace také Poincarého zobrazení systému (22).

Úlohy tohoto typu jsou běžné ve fyzice. Typickou úlohou jsou slabě nelineární buzené oscilátory s rovnicí tvaru

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t).$$

Konkrétní tvar pravé strany s kubickou nelinearitou vede např. na známou **Duffingovu rovnici**, kterou lze modelovat buzené kyvadlo, nucený oscilátor nebo také vetknutý nosník. Fold bifurkace s hysteresí zde vytváří přepínač mezi různými frekvencemi oscilací. Dynamika ale zahrnuje také **chaotické oscilace** – video prof. Ghrista.

Normální formy víceparametrických bifurkací – spojité systémy



Co se naučíme:

- znát základní typy víceparametrických bifurkací rovnováh spojitých systémů a jejich normální formy

Co se naučíme:

- znát základní typy víceparametrických bifurkací rovnováh spojitých systémů a jejich normální formy
- seznámit se s typickými aplikacemi a jevy, které s těmito bifurkacemi souvisí

Co se naučíme:

- znát základní typy víceparametrických bifurkací rovnováh spojitých systémů a jejich normální formy
- seznámit se s typickými aplikacemi a jevy, které s těmito bifurkacemi souvisí
- umět vytvořit bifurkační diagram složitějšího dynamického systému

Co se stane, pokud budeme měnit více než jeden parametr dynamického systému?

Co se stane, pokud budeme měnit více než jeden parametr dynamického systému? V okolí hyperbolické rovnováhy nic moc, rovnováha v nějakém okolí zůstane stále hyperbolická. Pokud ale budeme sledovat křivku kritického parametru nějaké jednoparametrické bifurkace, může druhý parametr způsobit

Co se stane, pokud budeme měnit více než jeden parametr dynamického systému? V okolí hyperbolické rovnováhy nic moc, rovnováha v nějakém okolí zůstane stále hyperbolická. Pokud ale budeme sledovat křivku kritického parametru nějaké jednoparametrické bifurkace, může druhý parametr způsobit

- že ještě další vlastní hodnoty dosáhnou kritické hodnoty, což je doprovázeno změnou dimenze centrální variety, tedy i změnou normální formy

Co se stane, pokud budeme měnit více než jeden parametr dynamického systému? V okolí hyperbolické rovnováhy nic moc, rovnováha v nějakém okolí zůstane stále hyperbolická. Pokud ale budeme sledovat křivku kritického parametru nějaké jednoparametrické bifurkace, může druhý parametr způsobit

- že ještě další vlastní hodnoty dosáhnou kritické hodnoty, což je doprovázeno změnou dimenze centrální variety, tedy i změnou normální formy
- nebo pouze narušením některé z podmínek zaručujících bifurkaci daného typu – podmínky nedegenerovanosti nebo transversality.

Ve spojitém případě může jít např. o

- bifurkaci typu **cusp** (bod vratu), kdy je narušena podmínka nedegenerovanosti bifurkace typu fold (sedlo-uzel),

Ve spojitém případě může jít např. o

- bifurkaci typu **cusps** (bod vratu), kdy je narušena podmínka nedegenerovanosti bifurkace typu fold (sedlo-uzel),
- **Bogdanovova–Takensova** bifurkace, kdy je nulové vlastní číslo dvojnásobné

Ve spojitém případě může jít např. o

- bifurkaci typu **cusp** (bod vratu), kdy je narušena podmínka nedegenerovanosti bifurkace typu fold (sedlo-uzel),
- **Bogdanovova–Takensova** bifurkace, kdy je nulové vlastní číslo dvojnásobné
- **Bautinova** neboli zobecněná Hopfova bifurkace, kdy je porušena podmínka nedegenerovanosti Hopfovy bifurkace

Ve spojitém případě může jít např. o

- bifurkaci typu **cusp** (bod vratu), kdy je narušena podmínka nedegenerovanosti bifurkace typu fold (sedlo-uzel),
- **Bogdanovova–Takensova** bifurkace, kdy je nulové vlastní číslo dvojnásobné
- **Bautinova** neboli zobecněná Hopfova bifurkace, kdy je porušena podmínka nedegenerovanosti Hopfovy bifurkace
- **fold-Hopf** bifurkace, kdy vzniká kromě ryze komplexního páru vlastních hodnot ještě další nulová vlastní hodnota,

Ve spojitém případě může jít např. o

- bifurkaci typu **cusp** (bod vratu), kdy je narušena podmínka nedegenerovanosti bifurkace typu fold (sedlo-uzel),
- **Bogdanovova–Takensova** bifurkace, kdy je nulové vlastní číslo dvojnásobné
- **Bautinova** neboli zobecněná Hopfova bifurkace, kdy je porušena podmínka nedegenerovanosti Hopfovy bifurkace
- **fold-Hopf** bifurkace, kdy vzniká kromě ryze komplexního páru vlastních hodnot ještě další nulová vlastní hodnota,
- **Hopf-Hopf** bifurkace se dvěma páry ryze imaginárních vlastních čísel spojená se vznikem toru a další a další ...

Ve spojitém případě může jít např. o

- bifurkaci typu **cusp** (bod vratu), kdy je narušena podmínka nedegenerovanosti bifurkace typu fold (sedlo-uzel),
- **Bogdanovova–Takensova** bifurkace, kdy je nulové vlastní číslo dvojnásobné
- **Bautinova** neboli zobecněná Hopfova bifurkace, kdy je porušena podmínka nedegenerovanosti Hopfovy bifurkace
- **fold-Hopf** bifurkace, kdy vzniká kromě ryze komplexního páru vlastních hodnot ještě další nulová vlastní hodnota,
- **Hopf-Hopf** bifurkace se dvěma páry ryze imaginárních vlastních čísel spojená se vznikem toru a další a další ...

Ve spojitém případě může jít např. o

- bifurkaci typu **cusp** (bod vratu), kdy je narušena podmínka nedegenerovanosti bifurkace typu fold (sedlo-uzel),
- **Bogdanovova–Takensova** bifurkace, kdy je nulové vlastní číslo dvojnásobné
- **Bautinova** neboli zobecněná Hopfova bifurkace, kdy je porušena podmínka nedegenerovanosti Hopfovy bifurkace
- **fold-Hopf** bifurkace, kdy vzniká kromě ryze komplexního páru vlastních hodnot ještě další nulová vlastní hodnota,
- **Hopf-Hopf** bifurkace se dvěma páry ryze imaginárních vlastních čísel spojená se vznikem toru a další a další ...

Při navyšování počtu parametrů a dimenze stavového prostoru se dynamika výrazně zesložituje a do hry vstupují další rezonance a symetrie. Vznikají tak jevy jako **blue-sky** katastrofa, **breathing torus** atd.

Ve spojitém případě může jít např. o

- bifurkaci typu **cuspl** (bod vratu), kdy je narušena podmínka nedegenerovanosti bifurkace typu fold (sedlo-uzel),
- **Bogdanovova–Takensova** bifurkace, kdy je nulové vlastní číslo dvojnásobné
- **Bautinova** neboli zobecněná Hopfova bifurkace, kdy je porušena podmínka nedegenerovanosti Hopfovy bifurkace
- **fold-Hopf** bifurkace, kdy vzniká kromě ryze komplexního páru vlastních hodnot ještě další nulová vlastní hodnota,
- **Hopf-Hopf** bifurkace se dvěma páry ryze imaginárních vlastních čísel spojená se vznikem toru a další a další ...

Při navyšování počtu parametrů a dimenze stavového prostoru se dynamika výrazně zesložituje a do hry vstupují další rezonance a symetrie. Vznikají tak jevy jako **blue-sky** katastrofa, **breathing torus** atd.

Uvedeme si pouze některé normální tvary a nakreslíme bifurkační diagramy v okolí počátku.

Věta 19

Předpokládejme, že jednodimenzionální dvoupametrický systém (rovnice)

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbb{R}^2,$$

kde f je hladká funkce, má pro $\alpha = \mathbf{0}$ rovnováhu $x = 0$ a platí $\lambda = f_x(0, \mathbf{0}) = 0, f_{xx}(0, \mathbf{0}) = 0$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$f_{xxx}(0, \mathbf{0}) \neq 0 \quad \text{podmínka nedegenerovanosti,}$$

$$(f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1})(0, \mathbf{0}) \neq 0 \quad \text{podmínka transversality.}$$

Pak je uvedený nelineární systém v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **bifurkace bodu vratu - cusp**

$$\dot{y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3$$

Na příkladu této bifurkace cusp (bodu vratu) si ukážeme, jak vypadá bifurkační diagram pro dva parametry.

Na příkladu této bifurkace cusp (bodu vratu) si ukážeme, jak vypadá bifurkační diagram pro dva parametry.

Rovnovážné body rovnice

$$\dot{y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3$$

leží na varietě

$$M: \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3 = 0,$$

Na příkladu této bifurkace cusp (bodu vratu) si ukážeme, jak vypadá bifurkační diagram pro dva parametry.

Rovnovážné body rovnice

$$\dot{y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3$$

leží na varietě

$$M: \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3 = 0,$$

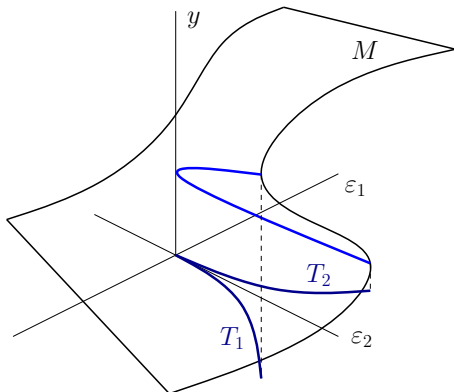
přítom nulová první derivace, tedy podmínka pro bifurkaci typu fold (sedlo-uzel) je splněna na křivce splňující navíc

$$\varepsilon_2 \pm 3y^2 = 0.$$

Pokud z těchto dvou rovnic vyloučíme y , dostaneme křivku typického tvaru V

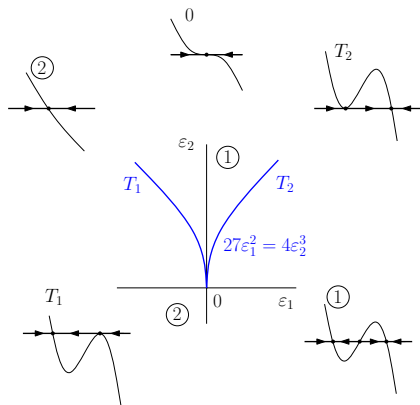
$$27\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_2^3 = 0 \quad \text{resp.} \quad 27\varepsilon_1^2 - 4\varepsilon_2^3 = 0$$

s bodem vratu v počátku.



Jednotlivé větve T_1 , T_2 odpovídají zánikům dvojice rovnovážných bodů v ohybech variety M bifurkací fold.

Bifurkace bodu vratu (cusp) implikuje vznik hystereze.



Oblasti označené 1 a 2 jsou strukturálně stabilní oblasti, ve kterých má systém 3, resp. 1, rovnovážný bod. T_1 a T_2 odpovídají jednoparametrické bifurkaci typu fold, jsou to hranice kodimenze 1 v 2-rozměrném prostoru parametrů. Jejich průnikem je bod vratu, který má dimenzi 0, tedy kodimenzi 2 v 2-rozměrném prostoru parametrů.

Varieta cusp bifurkace Hysterese

Obecně v k -rozměrném prostoru parametrů bude mít jednoparametrická bifurkace kodimenzi 1, bude tedy $(k - 1)$ -rozměrnou varietou. Průniky variet příslušných jednoparametrické bifurkaci budou variety příslušné víceparametrickým bifurkacím vyšší kodimenze.

Věta 20

Předpokládejme, že dvoudimenzionální dvouparametrický systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ je hladká funkce, má pro $\alpha = \mathbf{0}$ rovnováhu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a $J = D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ má vlastní hodnoty $\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, kde $\mu(\mathbf{0}) = 0$, $\omega(\mathbf{0}) = \omega_0 > 0$ a $l_1(\mathbf{0}) = 0$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$l_2(\mathbf{0}) \neq 0, \\ \alpha \rightarrow (\mu(\alpha), l_1(\alpha))^T \text{ je v } \alpha = \mathbf{0} \text{ regulární.}$$

Pak je uvedený nelineární systém v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému v komplexní normální formě **Bautinovy bifurkace**

$$\dot{z} = (\varepsilon_1 + i)z + \varepsilon_2 z|z|^2 + \text{sgn } l_2(\mathbf{0})z|z|^4.$$

Číslo $l_2(\mathbf{0})$ je tzv. druhý Ljapunovův koeficient a jeho výpočet je založen na podobném principu, jako výpočet prvního, tj. převodu komplexní normální formy s nulovým kubickým členem $z^2\bar{z}$ do polárních souřadnic. Všechny členy stupně 4 lze v kritické hodnotě parametru eliminovat a zbylý rezonantní člen v polárním tvaru přísluší $z^3\bar{z}^2$. Nebudeme jej zde uvádět, lze jej najít v literatuře (např. [Kuz13] str. 310.), Matcont jej umí numericky spočítat.

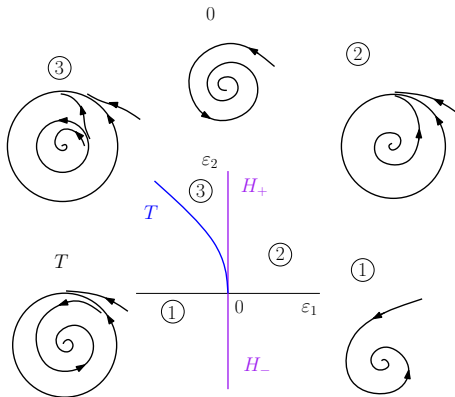
Číslo $l_2(\mathbf{0})$ je tzv. druhý Ljapunovův koeficient a jeho výpočet je založen na podobném principu, jako výpočet prvního, tj. převodu komplexní normální formy s nulovým kubickým členem $z^2\bar{z}$ do polárních souřadnic. Všechny členy stupně 4 lze v kritické hodnotě parametru eliminovat a zbylý rezonantní člen v polárním tvaru přísluší $z^3\bar{z}^2$. Nebudeme jej zde uvádět, lze jej najít v literatuře (např. [Kuz13] str. 310.), Matcont jej umí numericky spočítat.

Bautinova bifurkace způsobuje, že vlivem druhého parametru dochází k narušení podmínky nedegenerovanosti u Hopfovy bifurkace. V polárních souřadnicích tak dostáváme normální formu ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\rho^2 \pm \rho^4), \\ \dot{\varphi} &= 1,\end{aligned}$$

Přitom rovnovážná řešení první rovnice odpovídají limitním cyklům. Je zřejmé, že $\rho = 0$ odpovídající počátku je vždy rovnovážným bodem. Kvadratická rovnice ale může mít 0 až 2 řešení - mohou tedy vznikat a zanikat limitní cykly.

Bifurkační diagram normální formy superkritické Bautinovy bifurkace (případ $\text{sgn } l_2(\mathbf{0}) = -1$) ukazuje hraniční křivku Hopfovy bifurkace $H = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 = 0\}$ a křivku zániku dvou limitních cyklů $T = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2^2 + 4\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 > 0\}$ rozdělující parametrickou rovinu na strukturálně stabilní oblasti spolu s příslušnými fázovými portréty.



Věta 21

Předpokládejme, že dvoudimenzionální dvouparametrický systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2, \quad (24)$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ je hladká funkce, má pro $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ rovnováhu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ má dvě nulové vlastní hodnoty. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$s = \operatorname{sgn}(b_{20}(a_{20} + b_{11})) \neq 0,$$

$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \rightarrow (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \operatorname{tr} D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}))$ je v počátku regulární.

Pak je systém (24) v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **Bogdanovovy–Takensovy bifurkace**

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y_1 + y_1^2 + s y_1 y_2$$

Čísla a_{20} , b_{11} a b_{20} , z podmínky nedegenerovanosti jsou příslušné koeficienty Taylorových rozvoju

$$F_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2}a_{20}y_1^2 + \dots$$

a

$$F_2(y_1, y_2) = \frac{1}{2}b_{20}y_1^2 + b_{11}y_1y_2 + \dots$$

transformované pravé strany systému (24) transformací $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ na tvar

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(y_1, y_2) \\ F_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$$

pomocí matice \mathbf{T} složené z vlastních vektorů $D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Normální forma není jediná, jak jsme odvodili v příkladu na **odvození normální formy Bogdanovovy–Takensovy bifurkace**.

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y_1 + y_1^2 + s y_1 y_2\end{aligned}$$

Bogdanovova–Takensova bifurkace se někdy nazývá také double-zero, protože v kritické hodnotě parametrů $\varepsilon = 0$ má systém dvě nulové vlastní hodnoty. V okolí $\varepsilon = 0$ mohou tedy vlastní hodnoty měnit znaménko a mohou přecházet i přes imaginární osu. Dochází k degenerování Hopfovy bifurkace i bifurkace sedlo-uzel (fold), což způsobuje zánik limitního cyklu na tzv. smyčce separatrix sedla.

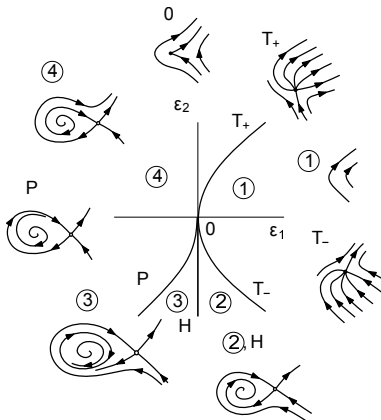
$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y_1 + y_1^2 + s y_1 y_2\end{aligned}$$

Analýzou systému v normálním tvaru Bogdanovovy–Takensovy bifurkace pro $s = -1$ získáme bifurkační diagram s hraniční křivkou Hopfovy bifurkace $H = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 < 0\}$ a křivkou zániku dvou rovnovážných bodů $T = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : 4\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2 = 0\}$ rozdělující parametrickou rovinu na strukturálně stabilní oblasti spolu s příslušnými fázovými portréty.

$$H = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2): \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 < 0\}, T = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2): 4\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2 = 0\}$$

Ve třetím kvadrantu musí dojít k nelokální bifurkaci zániku smyčky separatrix (jde o tzv. homoklinickou bifurkaci smyčky separatrix sedla), která má v okolí počátku tvar

$$P = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2): \varepsilon_1 = -\frac{6}{25}\varepsilon_2^2 + o(\varepsilon_2^2), \varepsilon_2 < 0\}.$$



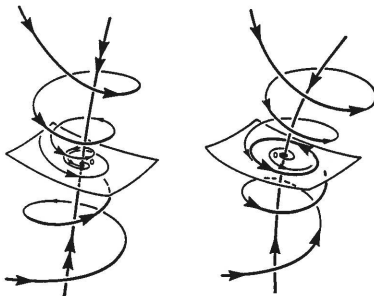
Všechny uvedené jedno a dvouparametrické bifurkace spojitých systémů byly lokálními bifurkacemi v okolí rovnovážných bodů. V jejich blízkosti ale obecně vznikají také nelokální bifurkace (zdvojení limitního cyklu, smyčka separatrix sedla). Další bifurkace mohou vznikat např. v okolí homoklinických a heteroklinických trajektorií, tedy trajektorií „vystupujících“ z jedné rovnováhy a navracejících se do její blízkosti nebo do blízkosti jiného bodového atraktoru. Samozřejmě mohou existovat trajektorie „spojující“ i jiné invariantní množiny. Obecný topologický přístup k takovým úlohám nabízí teorie Conleyho indexů, která je ovšem již nad rámec našeho učiva (viz [Encyklopedie matematiky – Conleyho index](#)).

V předchozím textu jsme se studiem lokálním bifurkací v okolí rovnováh seznámili s bifurkacemi dalších základních invariantních množin – cyklů. Zde si shrneme základní (jednoparametrické) bifurkace cyklů, které jsou známy a které mají významné aplikace. Jde o globální bifurkace (kromě Hopfovy), a proto nemáme jejich normální formy. V dalším textu o diskrétních bifurkacích ale uvidíme, že tomu může být jinak v případě popisu jejich Poincarého zobrazení.

V předchozím textu jsme se studiem lokálním bifurkací v okolí rovnováh seznámili s bifurkacemi dalších základních invariantních množin – cyklů. Zde si shrneme základní (jednoparametrické) bifurkace cyklů, které jsou známy a které mají významné aplikace. Jde o globální bifurkace (kromě Hopfovy), a proto nemáme jejich normální formy. V dalším textu o diskrétních bifurkacích ale uvidíme, že tomu může být jinak v případě popisu jejich Poincarého zobrazení.

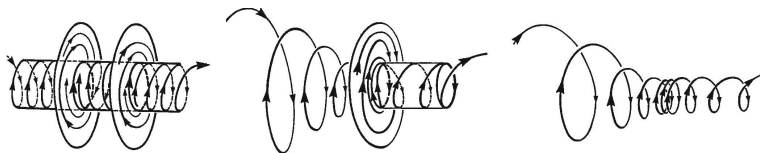
Uchýlíme se zde ke geometrickým představám – obrázkům (z knihy Leonida Shilnikova [Shi01]).

Hopfova bifurkace – vznik cyklu z ohniska



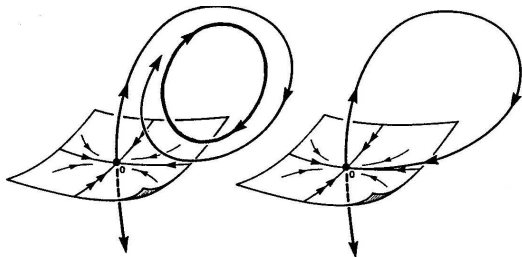
Vzniká v blízkosti slabého ohniska. Je příčinou vzniku oscilací – pískot, chvění, konvekční proudění, vibrace rotorů apod.

Fold bifurkace cyklu – zánik dvou cyklů ohybem



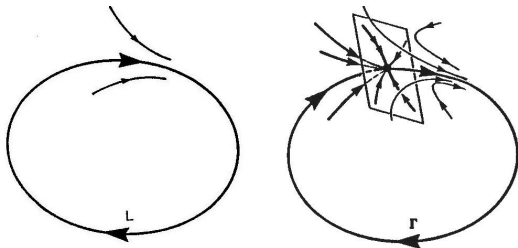
Vzniká v blízkosti Bautinovy (zobecněné Hopfovy) bifurkace. Je příčinou skokové změny z rovnováhy na oscilace – aeroelastický jev u letadel, mostů, odpovědi neuronů apod.

Homoklinická bifurkace – zánik cyklu na separatrix sedla



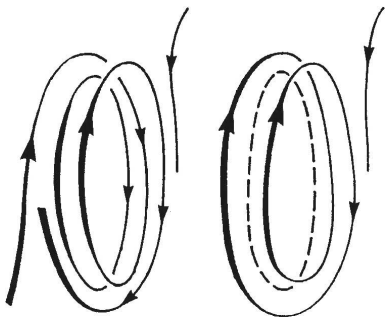
Vzniká v blízkosti Bogdanovovy–Takensovy bifurkace. Je příčinou globální změny dynamiky systému – vyhynutí populací, zánik vysílání vzruchu u neuronů, ale také umožňuje stabilitu masivního rotoru na magnetických ložiscích.

SNIPER – zánik cyklu vlivem fold bifurkace dvou rovnováh



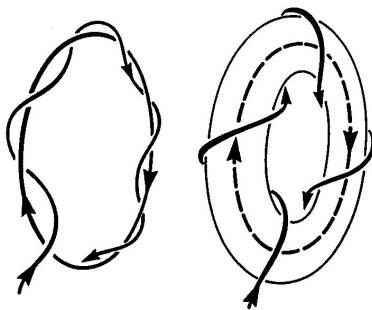
Vzniká v blízkosti fold bifurkace na cyklu. Je příčinou jevu synchronizace oscilátorů (společné oscilace neuronů, vázané rotace planet apod.).

Zdvojení periody cyklu



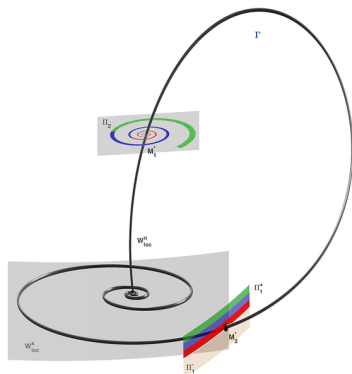
Vzniká flip bifurkací Poincarého zobrazení cyklu. Je předstupněm chaotického chování a objevuje se například při arytmií srdce, vzniku turbulencí apod.

Vznik toru



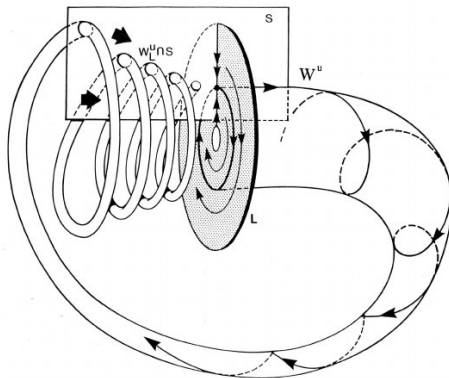
Vzniká v blízkosti Neimarkovy–Sackerovy bifurkace. Dynamika může být periodická, kvasiperiodická, je často předstupněm chaotického chování.

Shilnikovova bifurkace



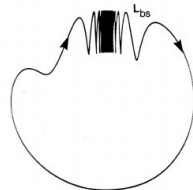
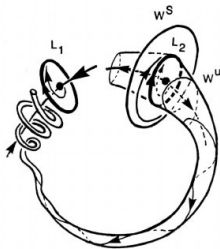
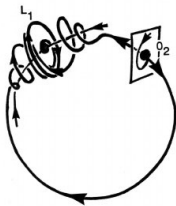
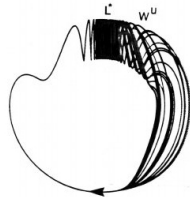
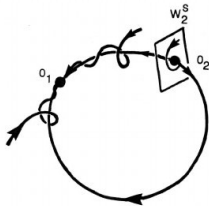
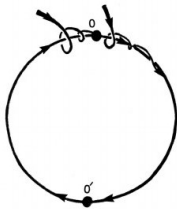
Exotická bifurkace cyklu, který vzniká z homoklinické trajektorie na sedlo-ohnisku v blízkosti fold–Hopfovy (ZH, zero-Hopf) bifurkace. Souvisí se vznikem chaotického chování známého jako Shilnikovův atraktor.

Shilnikovova bifurkace a blue-sky katastrofa

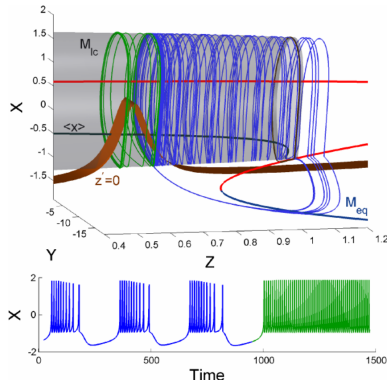
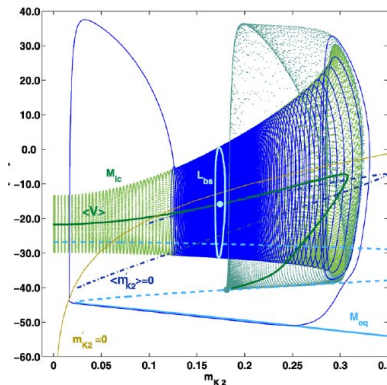


Torus vznikající ze ZH-bodu pro blízké parametry prochází **různými bifurkacemi** – např. fold bifurkace cyklu na toru, zánik toru nebo právě Shilnikovova bifurkace. Objevuje se ve slow-fast systémech (např. u **neuronů** s hysteresí při skoku z rovnováhy do stabilních oscilací.

Blue-sky katastrofa



Model neuronu



(obrázky z Andrey Shilnikov [Shi12], [SK08])

Poincarého řez a linearizace v okolí cyklu

Předpokládejme, že systém

$$(*) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$$

má pro $\alpha = \alpha_0$ periodické řešení $\mathbf{x}_0(t)$ s periodou T , které odpovídá limitnímu cyklu.

Poincarého řez a linearizace v okolí cyklu

Předpokládejme, že systém

$$(*) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$$

má pro $\alpha = \alpha_0$ periodické řešení $\mathbf{x}_0(t)$ s periodou T , které odpovídá limitnímu cyklu. Pokud zavedeme novou proměnnou $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)$, pak pro \mathbf{y} platí

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}_0, \alpha) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \alpha),$$

Poincarého řez a linearizace v okolí cyklu

Předpokládejme, že systém

$$(*) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$$

má pro $\alpha = \alpha_0$ periodické řešení $\mathbf{x}_0(t)$ s periodou T , které odpovídá limitnímu cyklu. Pokud zavedeme novou proměnnou $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)$, pak pro \mathbf{y} platí

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}_0, \alpha) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \alpha),$$

a v blízkosti \mathbf{x}_0 , tedy pro \mathbf{y} v okolí počátku je možné nahradit systém (*) linearizací

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \alpha_0)\mathbf{y}.$$

Poincarého řez a linearizace v okolí cyklu

Předpokládejme, že systém

$$(*) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$$

má pro $\alpha = \alpha_0$ periodické řešení $\mathbf{x}_0(t)$ s periodou T , které odpovídá limitnímu cyklu. Pokud zavedeme novou proměnnou $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)$, pak pro \mathbf{y} platí

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}_0, \alpha) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \alpha),$$

a v blízkosti \mathbf{x}_0 , tedy pro \mathbf{y} v okolí počátku je možné nahradit systém (*) linearizací

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \alpha_0)\mathbf{y}.$$

Přitom $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \alpha_0)$ je periodická funkce a jde tedy o LDR s periodickými koeficienty.

Teorie LDR s periodickými koeficienty se nazývá Floquetova teorie.
Lineární úloha

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

vede na nalezení periodické fundamentální matice

$$\Phi(t) = \Phi(0)e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} \text{ s periodou } T.$$

Teorie LDR s periodickými koeficienty se nazývá Floquetova teorie.
Lineární úloha

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

vede na nalezení periodické fundamentální matice

$$\Phi(t) = \Phi(0)e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} \text{ s periodou } T.$$

Protože $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T)$, platí také

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T).$$

Teorie LDR s periodickými koeficienty se nazývá Floquetova teorie.
Lineární úloha

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

vede na nalezení periodické fundamentální matice

$$\Phi(t) = \Phi(0)e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} \text{ s periodou } T.$$

Protože $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T)$, platí také

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T).$$

Matice $M = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ tak určuje diskrétní chování zobrazení v okolí cyklu na Poincarého řezu.

Teorie LDR s periodickými koeficienty se nazývá Floquetova teorie.
Lineární úloha

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

vede na nalezení periodické fundamentální matice

$$\Phi(t) = \Phi(0)e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} \text{ s periodou } T.$$

Protože $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T)$, platí také

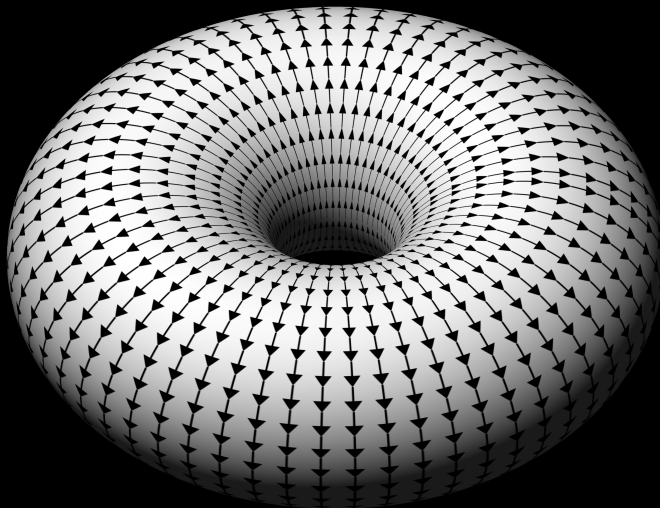
$$\Phi(t + T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T).$$

Matice $M = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ tak určuje diskrétní chování zobrazení v okolí cyklu na Poincarého řezu.

Matice M se nazývá matice monodromie a její vlastní čísla jsou tzv. Floquetovy multiplikátory cyklu. Jeden multiplikátor je nutně roven 1 (odpovídá směru cyklu), ostatní pak určují blízkou dynamiku.

V případě, že neleží na jednotkové kružnici, mluvíme o hyperbolickém cyklu.

Jednparametrické bifurkace rovnováh v diskrétních systémech



Co se naučíme:

- znát základní typy jednoparametrických bifurkací rovnoáh diskretních systémů

Co se naučíme:

- znát základní typy jednoparametrických bifurkací rovnováh diskretních systémů
- zopakovat a rozšířit souvislosti bifurkací rovnováh diskretních systémů s bifurkacemi cyklů spojitých systémů

Po spojitých bifurkacích podobně analyzujeme diskrétní jednoparametrické bifurkace. Znovu půjde o situaci, kdy se chování systému lokálně kvalitativně mění díky nehyperbolicitě pevného bodu. Začneme s bifurkacemi závislými na změně jednoho parametru, která způsobí, že některá z vlastních hodnot přechází přes hranici jednotkového kruhu v Gaussově rovině.

Věta 22

Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrický systém (rovnice)

$$x(n+1) = f(x(n), \alpha), \quad x(n) \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (25)$$

kde f je hladká funkce, má pro $\alpha = \alpha_0$ pevný bod $x = x_0$ a $\lambda = f_x(x_0, \alpha_0) = 1$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{array}{ll} f_{xx}(x_0, \alpha_0) \neq 0 & \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ f_\alpha(x_0, \alpha_0) \neq 0 & \text{podmínka transversality.} \end{array}$$

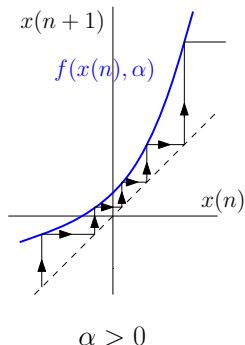
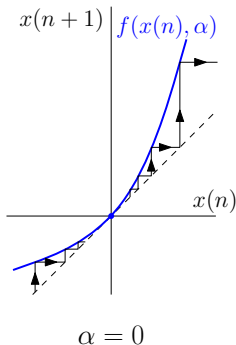
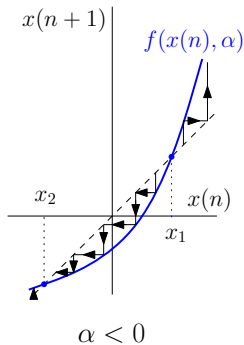
Pak je (25) v okolí rovnováhy lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **fold bifurkace**

$$y(n+1) = \pm \varepsilon + y(n) \pm y(n)^2$$

v okolí počátku.

Normální forma bifurkace typu fold ($x_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$):

$$x(n+1) = f(x(n), \alpha) \equiv \alpha + x(n) + x(n)^2$$



Věta 23

Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrický systém (rovnice)

$$x(n+1) = f(x(n), \alpha), \quad x(n) \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (26)$$

kde f je hladká funkce, má pro $\alpha = \alpha_0$ pevný bod $x = x_0$ a $\lambda = f_x(0, 0) = -1$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, \alpha_0))^2 + \frac{1}{3}f_{xxx}(x_0, \alpha_0) &\neq 0 && \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ f_{x\alpha}(x_0, \alpha_0) &\neq 0 && \text{podmínka transversality.} \end{aligned}$$

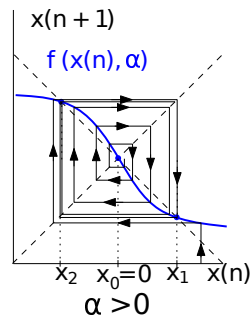
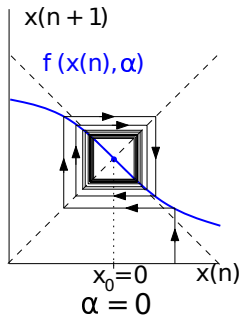
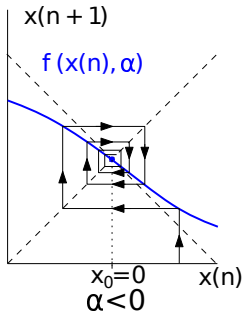
Pak je (26) v okolí rovnováhy lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **flip bifurkace**

$$y(n+1) = -(1 + \varepsilon)y(n) \pm y^3(n)$$

v okolí počátku.

Normální forma bifurkace typu flip ($x_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$):

$$x(n+1) = f(x(n), \alpha) \equiv -(1 + \alpha)x(n) + x(n)^3$$



Neimarkova–Sackerova bifurkace

Jde o analogii Hopfovy bifurkace pro spojité systémy. Vzniká při přechodu komplexně sdružených vlastních hodnot přes hranici jednotkového kruhu a v její souvislosti se objevuje invariantní smyčka.

Neimarkova–Sackerova bifurkace

Jde o analogii Hopfovy bifurkace pro spojité systémy. Vzniká při přechodu komplexně sdružených vlastních hodnot přes hranici jednotkového kruhu a v její souvislosti se objevuje invariantní smyčka.

Normální formu jsme již **odvodili** a našli jsme vyjíměčné rezonanční členy v prvních čtyřech odmocninách z jedné. V rezonančních hodnotách dochází k jistým symetriím a kvalitativně odlišnému chování.

Neimarkova–Sackerova bifurkace

Jde o analogii Hopfovy bifurkace pro spojité systémy. Vzniká při přechodu komplexně sdružených vlastních hodnot přes hranici jednotkového kruhu a v její souvislosti se objevuje invariantní smyčka.

Normální formu jsme již **odvodili** a našli jsme vyjíměčné rezonanční členy v prvních čtyřech odmocninách z jedné. V rezonančních hodnotách dochází k jistým symetriím a kvalitativně odlišnému chování.

Koeficient c_1 u členu $z^2\bar{z}$ v normální formě v komplexním tvaru má stejnou funkci jako první Ljapunovův koeficient u Hopfovy bifurkace a lze jej nalézt v [Kuz13] na str. 134 (nebo spočítat jako dobrovolnou domácí úlohu).

Věta 24

Předpokládejme, že dvojrozměrný jednoparametrický systém

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \alpha), \quad \mathbf{x}(n) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

kde dostatečně hladká funkce \mathbf{f} má pro $\alpha = \alpha_0$ pevný bod $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ a s vlastními čísly $\lambda_{\pm}(\alpha_0) = e^{\pm i\theta_0}$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{array}{ll} e^{ik\theta_0} \neq 1 \text{ pro } k \in \{1, 2, 3, 4\} & \text{nenastává rezonance,} \\ \frac{d|\lambda(\alpha)|}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0 & \text{podmínka transverzality,} \\ \operatorname{Re}(c_1(\alpha_0)e^{-i\theta_0}) \neq 0 & \text{podmínka nedegenerovanosti} \end{array}$$

Pak je (27) v okolí rovnováhy lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **Neimarkovy–Sackerovy bifurkace** v okolí počátku

$$z(n+1) = \lambda(\alpha)z(n) + c_1(\alpha)z(n)^2\bar{z}(n) + O(\|z(n)\|^4).$$

Normální forma má v polárním tvaru $z(n) = \rho(n)e^{i\varphi(n)}$ zápis:

$$\begin{aligned}\rho(n+1) &= \rho(n)(1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2(n)) + \rho^4(n)R(\rho(n), \alpha), \\ \varphi(n+1) &= \varphi(n) + \theta(\alpha) + \rho^2(n)Q(\rho(n), \alpha),\end{aligned}$$

kde $a(\alpha) = \operatorname{Re}(c_1(\alpha)e^{-i\theta(\alpha)})$ a R a Q jsou hladké funkce.

²zobrazením na kružnici se budeme více věnovat v kap. 9

Normální forma má v polárním tvaru $z(n) = \rho(n)e^{i\varphi(n)}$ zápis:

$$\begin{aligned}\rho(n+1) &= \rho(n)(1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2(n)) + \rho^4(n)R(\rho(n), \alpha), \\ \varphi(n+1) &= \varphi(n) + \theta(\alpha) + \rho^2(n)Q(\rho(n), \alpha),\end{aligned}$$

kde $a(\alpha) = \operatorname{Re}(c_1(\alpha)e^{-i\theta(\alpha)})$ a R a Q jsou hladké funkce.

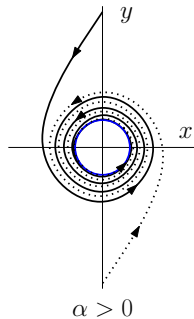
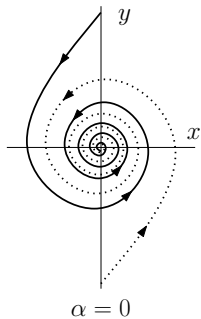
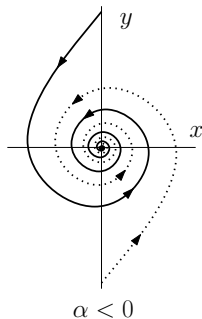
Podobně jako v případě Hopfovy bifurkace je pro $a(\alpha_0) < 0$ $\rho = 0$ stabilní pevný bod pro $\alpha < \alpha_0$ a nestabilní pro $\alpha > \alpha_0$. Pro $\alpha > \alpha_0$ blízka této kritické hodnotě parametru má navíc zobrazení stabilní pevný bod

$$\rho_0(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} + O(\alpha),$$

který odpovídá vzdálenosti od počátku. Vzniká tedy stabilní limitní invariantní množina na S^1 , přitom rotace v přibližné vzdálenosti $\rho_0(\alpha)$ od \mathbf{x}_0 je přibližně o úhel $\theta(\alpha)$ ².

²zobrazením na kružnici se budeme více věnovat v kap. 9

Normální forma Neimark-Sackerova bifurkace pro $a(\alpha_0) < 0$:



Podobně jako ve spojitém případě, i dochází buď k superkritické bifurkaci (vzniku stabilní limitní smyčky) pro $a(\alpha_0) < 0$ nebo k subkritické bifurkaci (vzniku nestabilní limitní smyčky) pro $a(\alpha_0) > 0$.

Podobně jako ve spojitém případě, i dochází buď k superkritické bifurkaci (vzniku stabilní limitní smyčky) pro $a(\alpha_0) < 0$ nebo k subkritické bifurkaci (vzniku nestabilní limitní smyčky) pro $a(\alpha_0) > 0$.

Oproti spojitému systému s Hopfovou bifurkací, kde bylo možné člen $O(\|z(n)\|^4)$ vynechat, v diskrétním případě tomu tak není, protože i malé změny ovlivňují strukturu uzavřené invariantní smyčky, která Neimarkovou–Sackerovou bifurkací vzniká, protože úhel $\theta(\alpha)$ rotace implikuje dva základní typy dynamiky na S^1 . Invariantní smyčka tak může být složena z periodických trajektorií nebo je tzv. kvaziperiodickou trajektorií. **Libovolně malá změna parametru může změnit její topologii, nikoliv však její existenci a jednoznačnost.**

Podobně jako ve spojitém případě, i dochází buď k superkritické bifurkaci (vzniku stabilní limitní smyčky) pro $a(\alpha_0) < 0$ nebo k subkritické bifurkaci (vzniku nestabilní limitní smyčky) pro $a(\alpha_0) > 0$.

Oproti spojitému systému s Hopfovou bifurkací, kde bylo možné člen $O(\|z(n)\|^4)$ vynechat, v diskrétním případě tomu tak není, protože i malé změny ovlivňují strukturu uzavřené invariantní smyčky, která Neimarkovou–Sackerovou bifurkací vzniká, protože úhel $\theta(\alpha)$ rotace implikuje dva základní typy dynamiky na S^1 . Invariantní smyčka tak může být složena z periodických trajektorií nebo je tzv. kvaziperiodickou trajektorií. **Libovolně malá změna parametru může změnit její topologii, nikoliv však její existenci a jednoznačnost.**

Asi vás napadne, že se tu začne s dynamikou kromě topologie potkávat i teorie čísel a teorie grup (konkrétně unitární grupa na jednotkové kružnici) a že symetrie a rezonance budou mít něco společného.

Uvažujme nyní parametrizovaný dynamický diskretní systém ve vícerozměrném prostoru

$$\mathbf{x}(n + 1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \varepsilon).$$

Pokud na centrální varietě dochází k předchozím jednoparametrickým bifurkacím pevných bodů, přechází vlastní číslo genericky přes jednotkový kruh.

Uvažujme nyní parametrizovaný dynamický diskretní systém ve vícerozměrném prostoru

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \varepsilon).$$

Pokud na centrální varietě dochází k předchozím jednoparametrickým bifurkacím pevných bodů, přechází vlastní číslo genericky přes jednotkový kruh.

Věta 25

Funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \mathbf{x}$ a $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) - I)$ se nulují v bodech fold bifurkace (resp. transkritické bifurkace i vidličkové bifurkace).

Uvažujme nyní parametrizovaný dynamický diskretní systém ve vícerozměrném prostoru

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \varepsilon).$$

Pokud na centrální varietě dochází k předchozím jednoparametrickým bifurkacím pevných bodů, přechází vlastní číslo genericky přes jednotkový kruh.

Věta 25

Funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \mathbf{x}$ a $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) - I)$ se nulují v bodech fold bifurkace (resp. transkritické bifurkace i vidličkové bifurkace).

Poznámka

Fold bifurkace pevného bodu jako generická lokální bifurkace odpovídá jednonásobným kořenům determinantu, vzniká na ohybu variety rovnováh. Transkritická a vidličková bifurkace jsou průsečíkem dvou variet (větví) rovnováh.

Věta 26

Funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \mathbf{x}$ a $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) + I)$ se nulují v bodech flip bifurkace.

Věta 26

Funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \mathbf{x}$ a $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) + I)$ se nulují v bodech flip bifurkace.

Věta 27

Funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \mathbf{x}$ a $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) \odot D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) - I)$ se nulují v bodech Neimarkovy-Sackerovy bifurkace.

Věta 26

Funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \mathbf{x}$ a $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) + I)$ se nulují v bodech flip bifurkace.

Věta 27

Funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) - \mathbf{x}$ a $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) \odot D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) - I)$ se nulují v bodech Neimarkovy-Sackerovy bifurkace.

Maple worksheet pro výpočet bialternativního součinu a funkce k nalezení bifurkačních variet i příklady najdete na Maplesoft Application Center (a v disertační práci dr. V. Eclerové (Hajnové)):

Výpočet bialternativního součinu v Maple [Haj19]

Do tohoto okamžiku bylo možné vést přednášku velice kontinuálně. Ale teď dochází k bifurkacím i v případě výkladu látky. Diskrétní bifurkace jsou totiž mnohem komplikovanější, než tomu bylo u bifurkací spojité, kde jsme si stihli ukázat i bifurkace vyšší kodimenze než 1. Je ale pravda, že jsme se dotkli bifurkací cyklů a torů i popisu pomocí Poincarého zobrazení, tedy diskrétních bifurkací.

Do tohoto okamžiku bylo možné vést přednášku velice kontinuálně. Ale teď dochází k bifurkacím i v případě výkladu látky. Diskrétní bifurkace jsou totiž mnohem komplikovanější, než tomu bylo u bifurkací spojitých, kde jsme si stihli ukázat i bifurkace vyšší kodimenze než 1. Je ale pravda, že jsme se dotkli bifurkací cyklů a torů i popisu pomocí Poincarého zobrazení, tedy diskrétních bifurkací.

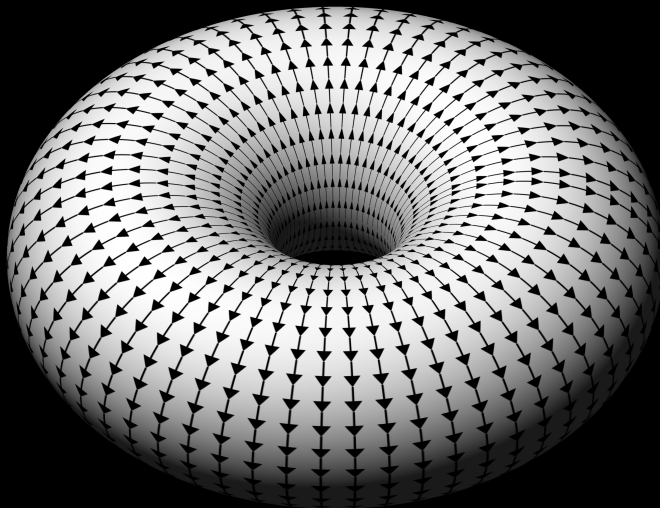
K pochopení komplexní (složitě) dynamiky, která se běžně v přírodě objevuje, ale musíme nejprve velmi dobře pochopit jevy, které vznikají v blízkosti flip a Neimarkovy–Sackerovy bifurkace. Všechny spolu ale úzce souvisejí, a proto bude struktura přednášky nyní trochu jiná.

Do tohoto okamžiku bylo možné vést přednášku velice kontinuálně. Ale teď dochází k bifurkacím i v případě výkladu látky. Diskrétní bifurkace jsou totiž mnohem komplikovanější, než tomu bylo u bifurkací spojitých, kde jsme si stihli ukázat i bifurkace vyšší kodimenze než 1. Je ale pravda, že jsme se dotkli bifurkací cyklů a torů i popisu pomocí Poincarého zobrazení, tedy diskrétních bifurkací.

K pochopení komplexní (složitě) dynamiky, která se běžně v přírodě objevuje, ale musíme nejprve velmi dobře pochopit jevy, které vznikají v blízkosti flip a Neimarkovy–Sackerovy bifurkace. Všechny spolu ale úzce souvisejí, a proto bude struktura přednášky nyní trochu jiná.

Pokusíme se na příkladech či prototypch dynamik v blízkosti bifurkací pochopit, jaké úžasně složité dynamické chování nabízejí a proč, a teprve potom alespoň trochu zahlédneme obrázek, který příroda vytvořila. Uvidíme periodické i kvaziperiodické jevy, synchronizaci i skoro-periodickou intermitentní dynamiku, fraktály, chaos i řád.

Chaos v diskretních jednorozměrných systémech



Co se naučíme:

- zopakujeme a rozšíříme znalosti o logistickém zobrazení a zdvojování periody

Co se naučíme:

- zopakujeme a rozšíříme znalosti o logistickém zobrazení a zdvojování periody
- prozkoumáme cykly jednorozměrných zobrazení

Co se naučíme:

- zopakujeme a rozšíříme znalosti o logistickém zobrazení a zdvojování periody
- prozkoumáme cykly jednorozměrných zobrazení
- dokážeme Šarkovského větu

Co se naučíme:

- zopakujeme a rozšíříme znalosti o logistickém zobrazení a zdvojování periody
- prozkoumáme cykly jednorozměrných zobrazení
- dokážeme Šarkovského větu
- poznáme Schwarzovu derivaci a kritické body

Logistické zobrazení

Uvažujme logistickou rovnici

$$x(n+1) = f(x(n), a) \equiv ax(n)(1 - x(n)), \quad (28)$$

kde a je kladný parametr.

Logistické zobrazení

Uvažujme logistickou rovnici

$$x(n+1) = f(x(n), a) \equiv ax(n)(1 - x(n)), \quad (28)$$

kde a je kladný parametr.

- pro parametr $a = 1$ dochází k transkritické bifurkaci

Logistické zobrazení

Uvažujme logistickou rovnici

$$x(n+1) = f(x(n), a) \equiv ax(n)(1 - x(n)), \quad (28)$$

kde a je kladný parametr.

- pro parametr $a = 1$ dochází k transkritické bifurkaci
- pevný bod $1 - 1/a$ ztrácí stabilitu pro $a = 3$

Logistické zobrazení

Uvažujme logistickou rovnici

$$x(n+1) = f(x(n), a) \equiv ax(n)(1 - x(n)), \quad (28)$$

kde a je kladný parametr.

- pro parametr $a = 1$ dochází k transkritické bifurkaci
- pevný bod $1 - 1/a$ ztrácí stabilitu pro $a = 3$
- pro parametr $a = 3$ dochází k flip bifurkaci

Logistické zobrazení

Uvažujme logistickou rovnici

$$x(n+1) = f(x(n), a) \equiv ax(n)(1 - x(n)), \quad (28)$$

kde a je kladný parametr.

- pro parametr $a = 1$ dochází k transkritické bifurkaci
- pevný bod $1 - 1/a$ ztrácí stabilitu pro $a = 3$
- pro parametr $a = 3$ dochází k flip bifurkaci
- flip bifurkace cyklu délky 1 (rovnováhy) je zároveň fold bifurkací 2 cyklu

Logistické zobrazení

Uvažujme logistickou rovnici

$$x(n+1) = f(x(n), a) \equiv ax(n)(1 - x(n)), \quad (28)$$

kde a je kladný parametr.

- pro parametr $a = 1$ dochází k transkritické bifurkaci
- pevný bod $1 - 1/a$ ztrácí stabilitu pro $a = 3$
- pro parametr $a = 3$ dochází k flip bifurkaci
- flip bifurkace cyklu délky 1 (rovnováhy) je zároveň fold bifurkací 2 cyklu
- fold bifurkace 2-cyklu není generická a stabilní 2-cyklus vzniká spolu s degenerovaným nestabilním 2-cyklem, který je zároveň 1-cyklem, tedy pevným bodem (ověřte)

Pokud nyní stabilní větev rovnováhy zobrazení f^2 zanikne flip bifurkací, vznikne cyklus délky 4. Ten ale nepadne z nebe sám, ale fold bifurkací zobrazení f^4 spolu se svým nestabilním degenerovaným bratříčkem. Stane se tomu tak pro $a = 1 + \sqrt{6} < 4$.

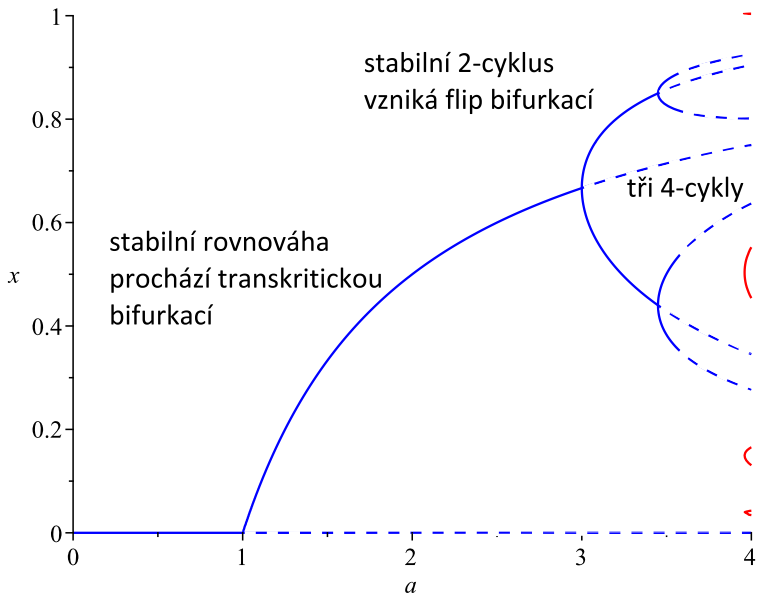
Pokud nyní stabilní větev rovnováhy zobrazení f^2 zanikne flip bifurkací, vznikne cyklus délky 4. Ten ale nespadne z nebe sám, ale fold bifurkací zobrazení f^4 spolu se svým nestabilním degenerovaným bratříčkem. Stane se tomu tak pro $a = 1 + \sqrt{6} < 4$.

Protože zobrazení f zobrazuje $\langle 0, 1 \rangle$ na $\langle 0, \frac{a}{4} \rangle \subseteq \langle 0, 1 \rangle$, bude pro parametr a o málo větší než $1 + \sqrt{6}$ v intervalu $\langle 0, \frac{a}{4} \rangle$ kromě stabilního 4-cyklu také nestabilní degenerovaný 4-cyklus (2-cyklus) i nestabilní rovnováha, tj. 1-cyklus $x = \frac{a-1}{a}$.

Pokud nyní stabilní větev rovnováhy zobrazení f^2 zanikne flip bifurkací, vznikne cyklus délky 4. Ten ale nespadne z nebe sám, ale fold bifurkací zobrazení f^4 spolu se svým nestabilním degenerovaným bratříčkem. Stane se tomu tak pro $a = 1 + \sqrt{6} < 4$.

Protože zobrazení f zobrazuje $\langle 0, 1 \rangle$ na $\langle 0, \frac{a}{4} \rangle \subseteq \langle 0, 1 \rangle$, bude pro parametr a o málo větší než $1 + \sqrt{6}$ v intervalu $\langle 0, \frac{a}{4} \rangle$ kromě stabilního 4-cyklu také nestabilní degenerovaný 4-cyklus (2-cyklus) i nestabilní rovnováha, tj. 1-cyklus $x = \frac{a-1}{a}$.

Takto se bude perioda zdvojovat dál a dál a budou vznikat stabilní a nestabilní větve všech délek 2^k . Tomuto jevu se říká **zdvojování periody**.

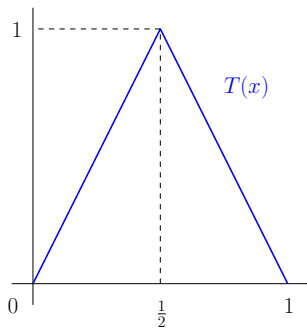


Pokud si spočítáte všechny cykly délky 4 (což vede na polynom stupně 12 v proměnné x , což je asi poslední **rozumně rychle spočitatelný případ**, kromě cyklu délky 3), zjistíte, že v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ pro parametry blízké $a = 4$ vznikají ještě dva cykly délky 4. Tyto cykly vznikají generickou fold bifurkací a žádné cykly délky 2 ve svém okolí nemají. Na velmi malém intervalu parametru $a < 4$ blízko 4 tak musíme nutně najít lokálně stabilní 4-cykus. Přitom ale hned uvidíme, že pro $a = 4$ nemůže být stabilní cyklus žádné délky.

Tent map - stanové zobrazení

Tent map je nejjednodušší zobrazení $\langle 0, 1 \rangle$ na $\langle 0, 1 \rangle$, které zde má jediné maximum.

$$T(x) = \begin{cases} 2x & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ 2 - 2x & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$



Logistické zobrazení pro $a = 4$, tj. $f(x) = 4x(1 - x)$, je konjugované stanovému zobrazení, protože $h: x \mapsto \sin^2 \frac{\pi x}{2}$ je homeomorfismus na $\langle 0, 1 \rangle$ a platí $f(h(x)) = h(T(x))$.

Logistické zobrazení pro $a = 4$, tj. $f(x) = 4x(1 - x)$, je konjugované stanovému zobrazení, protože $h: x \mapsto \sin^2 \frac{\pi x}{2}$ je homeomorfismus na $\langle 0, 1 \rangle$ a platí $f(h(x)) = h(T(x))$.

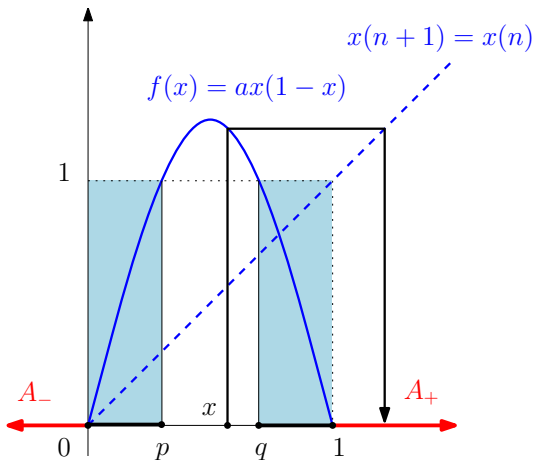
Protože $|DT| = |\lambda| = 2$ v každém bodě $\langle 0, 1 \rangle \setminus \{\frac{1}{2}\}$, je nutně každý cyklus libovolné délky stanového i logistického zobrazení pro $a = 4$, **nestabilní**. Přesto jsou trajektorie na $\langle 0, 1 \rangle$ omezené.

Logistické zobrazení pro $a = 4$, tj. $f(x) = 4x(1 - x)$, je konjugované stanovému zobrazení, protože $h: x \mapsto \sin^2 \frac{\pi x}{2}$ je homeomorfismus na $\langle 0, 1 \rangle$ a platí $f(h(x)) = h(T(x))$.

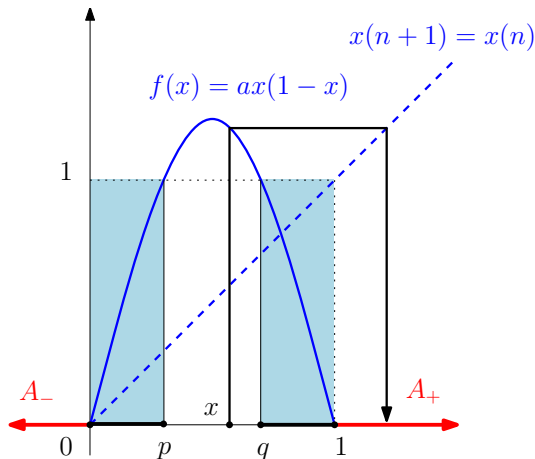
Protože $|DT| = |\lambda| = 2$ v každém bodě $\langle 0, 1 \rangle \setminus \{\frac{1}{2}\}$, je nutně každý cyklus libovolné délky stanového i logistického zobrazení pro $a = 4$, **nestabilní**. Přesto jsou trajektorie na $\langle 0, 1 \rangle$ omezené.

V předmětu **PřF:M6201 Nelineární dynamika a její aplikace** jsme si navíc ukázali, že stanové zobrazení vykazuje citlivost na počáteční podmínky, topologickou transitivnost a hustotu trajektorií. Vykazuje základní znaky **chaotického chování**.

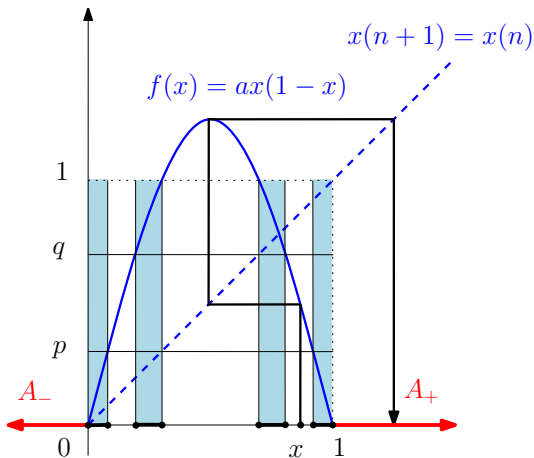
Další zajímavou vlastností logistické rovnice (28) je dynamika za hodnotou $a = 4$. V takovém případě totiž některé hodnoty zobrazením f z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ „vypadnou“ a jiné ne. Lépe řečeno $f(\langle 0, 1 \rangle) \not\subset \langle 0, 1 \rangle$.



Označíme množinu $K_1 = f^{-1}(\langle 0, 1 \rangle) = \langle 0, p \rangle \cup \langle q, 1 \rangle$. Platí, že $f(K_1) \subseteq \langle 0, 1 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} K_0$.



Podobně označíme množinu $K_2 = f^{-1}(K_1)$. Protože $f(K_2) \subseteq K_1$ platí, že $f^{(2)}(K_2) \subseteq \langle 0, 1 \rangle$.



Podobně budeme definovat spočetně mnoho množin $K_n = f^{-1}(K_{n-1})$ s vlastností, že $f^{(n)}(K_n) \subseteq \langle 0, 1 \rangle$. Protože jde o kompaktní množiny (do sebe vnořené), jejich průnik je neprázdný (obsahují např. 0 a 1) a tvoří Cantorovu množinu

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=0}^n K_i$$

Podobně budeme definovat spočetně mnoho množin $K_n = f^{-1}(K_{n-1})$ s vlastností, že $f^{(n)}(K_n) \subseteq \langle 0, 1 \rangle$. Protože jde o kompaktní množiny (do sebe vnořené), jejich průnik je neprázdný (obsahují např. 0 a 1) a tvoří Cantorovu množinu

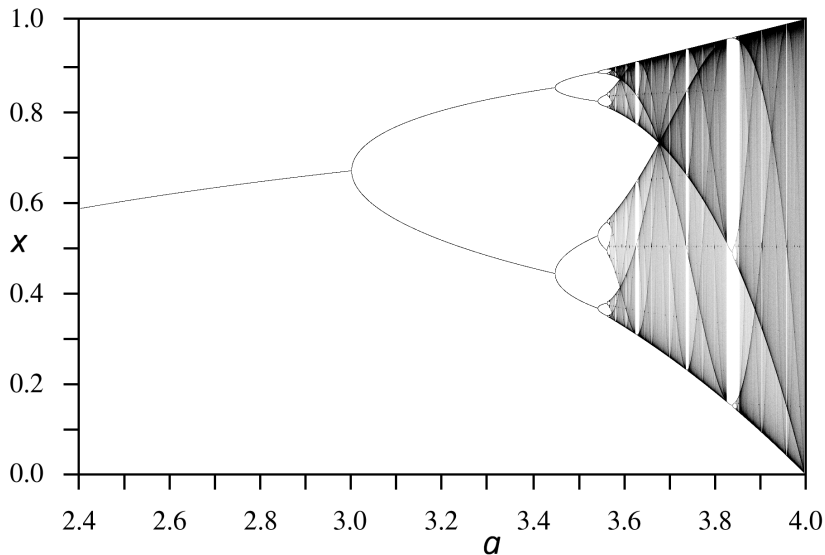
$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=0}^n K_i$$

Množina Λ je invariantní množinou, je řídká (neobsahuje intervaly), ale nespočetná a jde o fraktál, tj. množinu neceločíselné (Hausdorffovy) dimenze. K tomu se ale dostaneme později.

Nejzajímavější dynamické chování má ale logistická rovnice jistě pro parametr a v intervalu $\langle 3, 4 \rangle$. Slouží jako prototyp jedné z cest k chaotickému chování, přičemž zdvojování periody je zde vlastně jen začátek.

Nejzajímavější dynamické chování má ale logistická rovnice jistě pro parametr a v intervalu $\langle 3, 4 \rangle$. Slouží jako prototyp jedné z cest k chaotickému chování, přičemž zdvojování periody je zde vlastně jen začátek.

Vlastně těžko říct, protože ve fraktální struktuře bifurkačního diagramu je zdvojování periody všudypřítomné.



To, co vidíme, jsou atraktory. Cyklů a invariantních množin je tu víc.

Lemma 4

Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě zobrazení. Mezi každými dvěma body cyklu délky $n > 1$ existuje periodický bod cyklu délky $m < n$.

Lemma 4

Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě zobrazení. Mezi každými dvěma body cyklu délky $n > 1$ existuje periodický bod cyklu délky $m < n$.

Důkaz:

Nechť $x_1 < x_2$ jsou sousední body n -cyklu f . Uvažujme všechna $m < n$ taková, že $f^m(x_2) < x_2$ (takové m musí existovat, protože vlevo od x_2 leží x_1). Podobně najdeme i m takové, že $1 \leq m < n$ a platí $f^m(x_1) > x_1$ a $f^m(x_2) < x_2$. Pokud je f^m definované na $\langle x_1, x_2 \rangle$, pak z věty o pevném bodě plyne existence $c \in (x_1, x_2): f^m(c) = c$. Předpokládejme, že f^m není nikde na (x_1, x_2) definované, pak $f^m(x_1) \geq x_2$ a $f^m(x_2) \leq x_1$, spor.

Šarkovského věta

Jeden z nejvýznamnějších a zároveň nejobecnějších výsledků o jednodimenzionálních spojitých zobrazeních, jako je třeba logistické zobrazení, zveřejnil na počátku 70. let 20. století ukrajinský matematik Alexandr Nikolajevič Šarkovskij. V té době, ale západní a východní vědecké světy příliš nekomunikovaly. Šarkovskij uveřejnil důkaz své věty dříve, než Li a Yorke svůj slavný článek „Perioda 3 implikuje chaos“, který je důsledkem Šarkovského věty. A právě tento článek publikovali aniž by o Šarkovského výsledku věděli a odstartovali jím nový způsob myšlení. Yorke a Šarkovskij se potkali v roce 1975 na konferenci ve východním Berlíně

Šarkovského věta

Jeden z nejnámějších a zároveň nejobecnějších výsledků o jednodimenzionálních spojitých zobrazeních, jako je třeba logistické zobrazení, zveřejnil na počátku 70. let 20. století ukrajinský matematik Alexandr Nikolajevič Šarkovskij. V té době, ale západní a východní vědecké světy příliš nekomunikovaly. Šarkovskij uveřejnil důkaz své věty dříve, než Li a Yorke svůj slavný článek „Perioda 3 implikuje chaos“, který je důsledkem Šarkovského věty. A právě tento článek publikovali aniž by o Šarkovského výsledku věděli a odstartovali jím nový způsob myšlení. Yorke a Šarkovskij se potkali v roce 1975 na konferenci ve východním Berlíně

Větu i důkaz Li a Yorkeho najdete v **PřF:M6201 Nelineární dynamika a její aplikace**. Zde si uvedeme Šarkovského větu a způsob jejího důkazu. Pro zvědavější uvádím odkaz na precizní důkaz v **tříhodinové přednášce prof. Ugur Abdulla** (Florida Institute of Technology) .

Věta 28 (Šarkovského věta)

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Nechť $f: I \rightarrow I$ je spojitá funkce, která má cyklus délky n . Pak má také cyklus délky m , pokud $n \triangleright m$, kde \triangleright značí následující Šarkovského řazení přirozených čísel:

$$\begin{aligned}
 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \\
 \dots \triangleright 2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.
 \end{aligned}$$

Důkaz:

Nejprve předpokládejme, $n > 1$ je liché a f má cyklus délky n a je to nejmenší takové n . Cyklus můžeme zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \dots & f(x_n) \end{pmatrix},$$

kde $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (protože jde o permutaci, můžeme dokonce použít pro zápis jen indexy).

Důkaz:

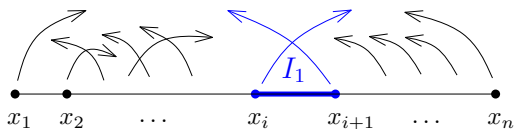
Nejprve předpokládejme, $n > 1$ je liché a f má cyklus délky n a je to nejmenší takové n . Cyklus můžeme zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \dots & f(x_n) \end{pmatrix},$$

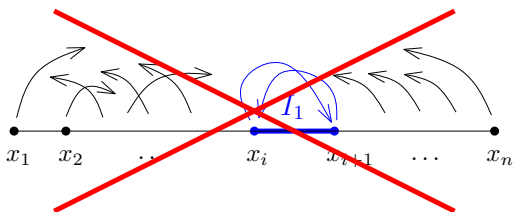
kde $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (protože jde o permutaci, můžeme dokonce použít pro zápis jen indexy).

Evidentně platí, že $f(x_1) > x_1$ a $f(x_n) < x_n$. Umíme proto najít největší i takové, aby $f(x_i) > x_i$. Protože $f(x_{i+1}) < x_{i+1}$, musí interval $I_1 = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$ pokrýt sám sebe pod f , tj. $I_1 \subseteq f(I_1)$.

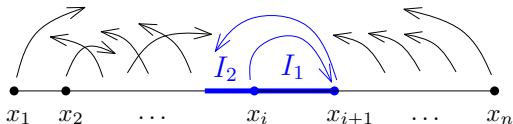
Máme tedy následující situaci:



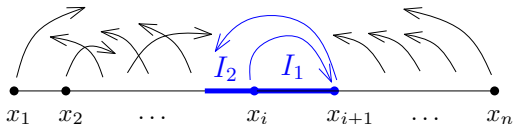
Přitom určitě nemůže I_1 pokrýt POUZE sebe (šlo by o 2 cyklus).



Umíme proto najít I_2 s jedním stejným krajním bodem jako I_1 , pro něž platí $I_1 \neq I_2$ a $I_2 \subset f(I_1)$.

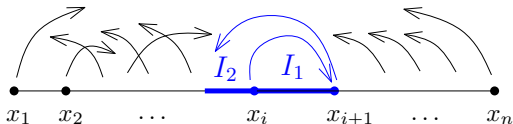


Umíme proto najít I_2 s jedním stejným krajním bodem jako I_1 , pro něž platí $I_1 \neq I_2$ a $I_2 \subset f(I_1)$.



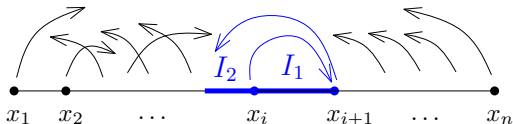
Sjednocení všech takovýchto intervalů, které jsou pod $f(I_1)$ označíme O_2 . Takže $I_1 \subset O_2$, ale $I_1 \neq O_2$.

Umíme proto najít I_2 s jedním stejným krajním bodem jako I_1 , pro nějž platí $I_1 \neq I_2$ a $I_2 \subset f(I_1)$.



Sjednocení všech takovýchto intervalů, které jsou pod $f(I_1)$ označíme O_2 . Takže $I_1 \subset O_2$, ale $I_1 \neq O_2$. O_3 označíme sjednocení všech intervalů tvaru $I = \langle x_j, x_{j+1} \rangle$ takových, že jsou pokryty obrazem f nějakého intervalu z O_2 .

Umíme proto najít I_2 s jedním stejným krajním bodem jako I_1 , pro nějž platí $I_1 \neq I_2$ a $I_2 \subset f(I_1)$.



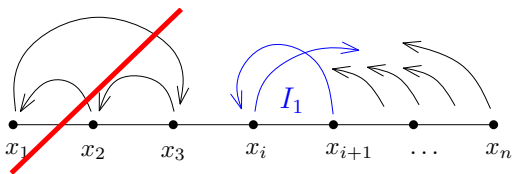
Sjednocení všech takovýchto intervalů, které jsou pod $f(I_1)$ označíme O_2 . Takže $I_1 \subset O_2$, ale $I_1 \neq O_2$. O_3 označíme sjednocení všech intervalů tvaru $I = \langle x_j, x_{j+1} \rangle$ takových, že jsou pokryty obrazem f nějakého intervalu z O_2 . O_{l+1} označíme sjednocení všech intervalů tvaru $I = \langle x_j, x_{j+1} \rangle$ takových, že jsou pokryty obrazem f nějakého intervalu z O_l

Pro každý interval $I_{j+1} \subseteq O_{j+1}$ tak máme intervaly

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_l \rightarrow I_{l+1}$$

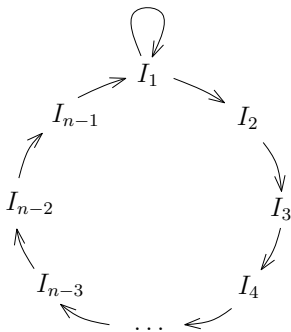
splňující $I_2 \subseteq O_2, I_3 \subseteq O_3, \dots, I_l \subseteq O_l$, přičemž máme jen konečný počet n bodů, a proto pro nějaké l obsahuje $O_l = O_{l+1}$ všechny intervaly tvaru $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$.

Protože je n liché, je vpravo nebo vlevo od I_1 lichý počet bodů, které se nemohou zobrazovat samy na sebe (šlo by o cyklus nižší délky)

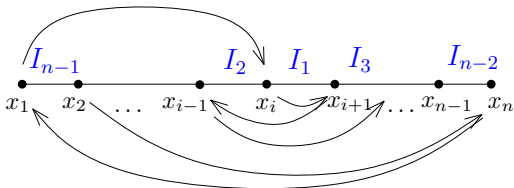


a ani se nemohou jako v případě sudého n všechny body přeskládat zleva doprava a naopak. Takže v O_l nutně existuje ještě alespoň jeden interval tvaru $I = \langle x_j, x_{j+1} \rangle \neq I_1$, který pokrývá I_1 , tj. $I_1 \subseteq f(I)$.

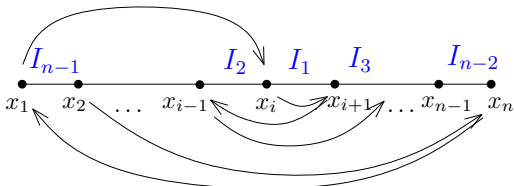
Dostáváme tak kromě smyčky $I_1 \rightarrow I_1$ (což díky větě o střední hodnotě implikuje existenci pevného bodu v intervalu I_1), ještě jednu cestu z I_1 do I_1 , která ale nutně musí obsahovat cyklus délky n , tedy projít všech $n - 1$ intervalů.



Protože jde o nejkratší cestu, musí být cyklus řazen jedním ze dvou zrcadlových způsobů (tzv. Štefanův cyklus):

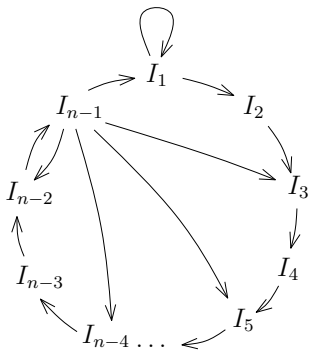


Protože jde o nejkratší cestu, musí být cyklus řazen jedním ze dvou zrcadlových způsobů (tzv. Štefanův cyklus):



To ale nutně znamená, že interval I_{n-1} pokrývá i všechny intervaly napravo od I_1 (nebo nalevo v zrcadlovém případě). Štefanův cyklus stále střídá strany, jsou to tedy všechny I_j s lichými indexy j .

Dostáváme tedy následující cesty:



Pevný bod je nutně v intervalu $I_1 \rightarrow I_1$, 2 cyklus v $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$, 4 cyklus je buď $I_{n-1} \rightarrow I_{n-4} \rightarrow I_{n-3} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$ nebo pro $n = 3$ projde cestu $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$. Jediné, co nedostaneme jsou liché cykly nižších délek než n , které existovat nemohou.

Pro cykly sudých délek lze podobně ukázat, že existuje nutně pevný bod a cyklus délky 2. Pro $n = 2^p$ a $1 < q < p$ je zobrazení $g = f^{(k/2)}$ pro $k = 2^q$ spojitě a má cyklus délky 2, který je 2^q cyklem f . Podobně lze na předchozí převést případ $n = p \cdot 2^q$.



Důsledky Šarkovského věty:

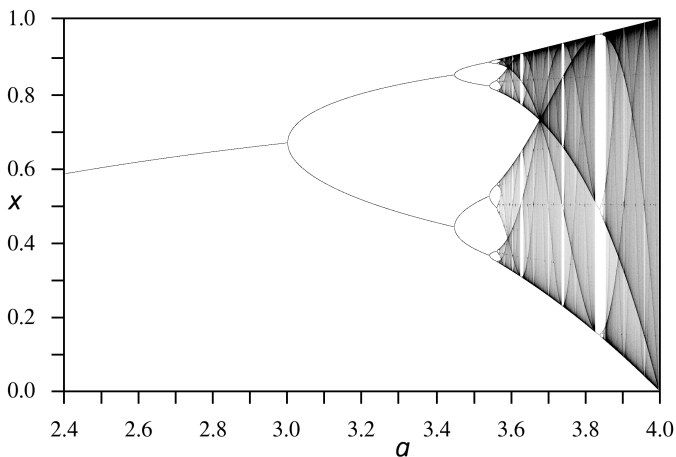
- „perioda 3 implikuje chaos“ – tedy spojitě zobrazení na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ má cykly všech délek, pokud má cyklus délky 3, což v omezeném intervalu může znamenat hodně divný atraktor...

Důsledky Šarkovského věty:

- „perioda 3 implikuje chaos“ – tedy spojitě zobrazení na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ má cykly všech délek, pokud má cyklus délky 3, což v omezeném intervalu může znamenat hodně divný atraktor...
- pokud má spojitě zobrazení na I konečný počet cyklů, jsou sudé nebo jde o pevné body, 1-cykly

Důsledky Šarkovského věty:

- „perioda 3 implikuje chaos“ – tedy spojitě zobrazení na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ má cykly všech délek, pokud má cyklus délky 3, což v omezeném intervalu může znamenat hodně divný atraktor...
- pokud má spojitě zobrazení na I konečný počet cyklů, jsou sudé nebo jde o pevné body, 1-cykly
- naopak pokud má spojitě zobrazení na I cyklus jiné délky, než mocniny 2, pak má nekonečně mnoho cyklů



Perioda 3 implikuje chaos je trochu přehnané. Vidíte ten stabilní 3 cyklus atrahující interval $\langle 0, 1 \rangle$? Tedy až na ty cykly ostatních délek – jenže do nich se většinou netrefíte, pokud se nebudete opravdu snažit.

Domácí úkol:



Najděte cyklus délky 2 pro logistické zobrazení (28) s parametrem a odpovídajícím vzniku 3 cyklu (fold bifurkace 3 cyklu). Ukažte, že je nestabilní. Zkuste ho prohnat Maplem a Matlabem. Jak to zvládne iterovat symbolický a numerický přístup?

Schwarzova derivace

Definice 17

Schwarzova derivace je definována (i v komplexním oboru) jako operátor

$$(Sf)(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2.$$

Poznámka

Protože v bodě $[x_0, \alpha_0]$ flip bifurkace platí $f'(x_0, \alpha_0) = -1$, je $(Sf)(x_0, \alpha_0) \neq 0$ podmínkou nedegenerovanosti flip bifurkace. Uvidíme, že vlastnost $(Sf)(x) < 0 \forall x$, má ještě zajímavější důsledky.

Věta 29

Nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(Sf)(x) < 0$ a $(Sg)(x) < 0$. Pak $(S(f \circ g))(x) < 0$.

Věta 29

Nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(Sf)(x) < 0$ a $(Sg)(x) < 0$. Pak $(S(f \circ g))(x) < 0$.

Důkaz:

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

a

$$(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + 3f''(g(x)) \cdot g''(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x),$$

tj.

$$(S(f \circ g))(x) = (Sf)(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + (Sg)(x) < 0.$$

Důsledek 1

Nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(Sf)(x) < 0$, pak $(Sf^{(n)})(x) < 0$.

Důsledek 1

Nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(Sf)(x) < 0$, pak $(Sf^{(n)})(x) < 0$.

Poznámka

Všimněte si, že pro každé kvadratické zobrazení platí $(Sf)(x) < 0$, včetně kritického bodu x_c , pro který platí $f'(x_c) = 0$, kde lze definovat $(Sf)(x_c) = -\infty$.

Platí dokonce silnější tvrzení:

Věta 30

Nechť $P(x)$ je polynom, $x \in \mathbb{R}$. Pokud $P'(x)$ má reálné a izolované kořeny (kritické body), pak $\forall x \in \mathbb{R}: (SP)(x) < 0$.

Platí dokonce silnější tvrzení:

Věta 30

Nechť $P(x)$ je polynom, $x \in \mathbb{R}$. Pokud $P'(x)$ má reálné a izolované kořeny (kritické body), pak $\forall x \in \mathbb{R}: (SP)(x) < 0$.

Důkaz:

Nechť $P'(x) = \prod_{i=1}^N (x - x_i)$. Pak $P''(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\prod_{i=1}^N (x - x_i)}{(x - x_j)}$ a

$$P'''(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \frac{\prod_{i=1}^N (x - x_i)}{(x - x_j)(x - x_k)}.$$

Platí dokonce silnější tvrzení:

Věta 30

Nechť $P(x)$ je polynom, $x \in \mathbb{R}$. Pokud $P'(x)$ má reálné a izolované kořeny (kritické body), pak $\forall x \in \mathbb{R}: (SP)(x) < 0$.

Důkaz:

Nechť $P'(x) = \prod_{i=1}^N (x - x_i)$. Pak $P''(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\prod_{i=1}^N (x - x_i)}{(x - x_j)}$ a

$P'''(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \frac{\prod_{i=1}^N (x - x_i)}{(x - x_j)(x - x_k)}$. Odtud

$$\begin{aligned} (SP)(x) &= \sum_{k \neq j}^N \frac{1}{(x - x_j)(x - x_k)} - \frac{3}{2} \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{x - x_j} \right)^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{x - x_j} \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{x - x_j} \right)^2 < 0 \end{aligned}$$

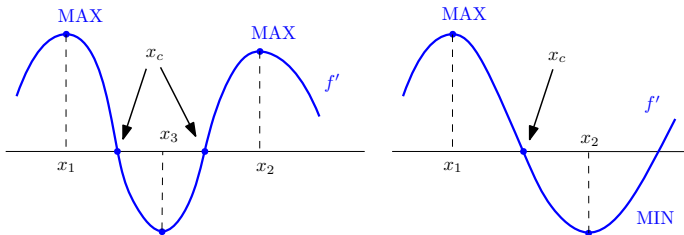
Definice 18

Pevný bod x_c hladkého zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, který je zároveň kritickým bodem, tj. $f'(x_c) = 0$, se nazývá **superatrahující**. (Stejně tak pro $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.)

Definice 18

Pevný bod x_c hladkého zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, který je zároveň kritickým bodem, tj. $f'(x_c) = 0$, se nazývá **supertrahující**. (Stejně tak pro $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.)

Pokud $(Sf)(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$, pak $f'(x)$ nemá kladné lok. minimum ani záporné lokální maximum, neboli pokud $f''(x_0) = 0$, pak $f'''(x_0)$ a $f'(x_0)$ mají opačná znaménka. Po sobě jdoucí kritické body f' tak implikují existenci bodu x_c , pro který platí $f'(x_c) = 0$.



Lemma 5

Předpokládejme, že f má konečně mnoho kritických bodů a $(Sf)(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, pak f má pouze konečně mnoho periodických bodů periody m pro každé m .

Lemma 5

Předpokládejme, že f má konečně mnoho kritických bodů a $(Sf)(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, pak f má pouze konečně mnoho periodických bodů periody m pro každé m .

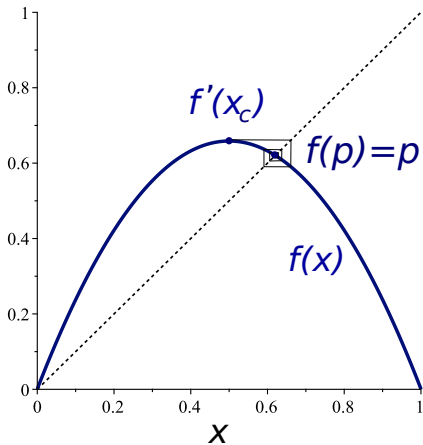
Důkaz:

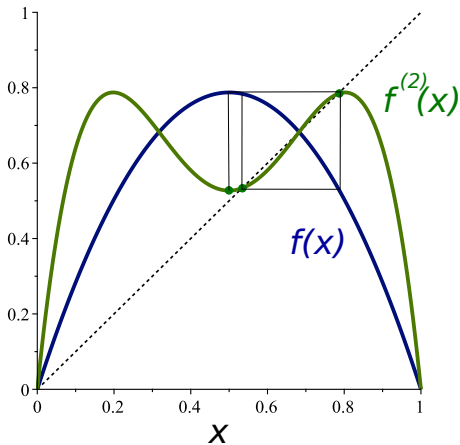
Předpokládejme naopak, že $g = f^m$ má nekonečně mnoho pevných bodů. Tedy $g'(x) = 1$ pro nekonečně mnoho x . Protože g' není konstanta ($Sf < 0$), mezi třemi sousedními body nutně existuje bod $x: g'(x) < 1$. Protože ale g' nemůže mít kladné lok. minimum, musí $g'(x) < 0$, tj. existuje nekonečně mnoho kritických bodů f^m , spor.

Definice 19

Nechť p je atrahující periodický bod zobrazení f s periodou m , kde Označme interval $W(p)$ jako tu maximální souvislou část množiny $\{x: f^{(mj)}(x) \rightarrow p \text{ pro } j \rightarrow \infty\}$, která obsahuje p . Mluvíme o **bezprostřední oblasti přitažlivosti** bodu p (*immediate basin of attraction*).

Předchozí vlastnosti (Sf) implikují, že pokud f splňuje $(Sf)(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ a $W(p)$ je omezená, pak obsahuje kritický bod ([Dev08]). V případě logistického zobrazení je jediný, a proto také **nejvýše jediný z konečně mnoha cyklů délky m je atrahující** a lze jej nalézt iterací z kritického bodu.





Šarkovského věta tedy zaručuje pro logistické zobrazení v intervalu $\langle 3, 4 \rangle$ existenci cyklů jistých délek

- pokud jsou lichých délek, je jich **nekonečně mnoho**

Šarkovského věta tedy zaručuje pro logistické zobrazení v intervalu $\langle 3, 4 \rangle$ existenci cyklů jistých délek

- pokud jsou lichých délek, je jich **nekonečně mnoho**
- až na maximálně jeden jsou **všechny nestabilní**

Šarkovského věta tedy zaručuje pro logistické zobrazení v intervalu $\langle 3, 4 \rangle$ existenci cyklů jistých délek

- pokud jsou lichých délek, je jich **nekonečně mnoho**
- až na maximálně jeden jsou **všechny nestabilní**
- navíc **mezi každými dvěma body cyklu** najdeme **jiný cyklus**

Šarkovského věta tedy zaručuje pro logistické zobrazení v intervalu $\langle 3, 4 \rangle$ existenci cyklů jistých délek

- pokud jsou lichých délek, je jich **nekonečně mnoho**
- až na maximálně jeden jsou **všechny nestabilní**
- navíc **mezi každými dvěma body cyklu** najdeme **jiný cyklus**

Šarkovského věta tedy zaručuje pro logistické zobrazení v intervalu $\langle 3, 4 \rangle$ existenci cyklů jistých délek

- pokud jsou lichých délek, je jich **nekonečně mnoho**
- až na maximálně jeden jsou **všechny nestabilní**
- navíc **mezi každými dvěma body cyklu** najdeme **jiný cyklus**

Ups ... to je docela chaos.

Na tomto místě je třeba poznamenat, že zdvojování periody jako univerzální jev u unimodálních funkcí (funkce s jednou změnou v monotónnosti) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **popsal poprvé v roce 1976** Mitchell Jay Feigenbaum pomocí techniky zvané renormalizace.

Na tomto místě je třeba poznamenat, že zdvojování periody jako univerzální jev u unimodálních funkcí (funkce s jednou změnou v monotónnosti) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **popsal poprvé v roce 1976** Mitchell Jay Feigenbaum pomocí techniky zvané renormalizace.

Přepsáním iterací funkce f jako složení zobrazení, při kterém dochází ke změně měřítka, dostal funkcionální rovnici

$$T[f](x) = -\alpha f\left(f\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right),$$

která má pro určité α pevný bod – tzv. univerzální funkci. Ta je řešením funkcionální rovnice

$$g(x) = -\alpha g\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right).$$

Odhad univerzální změny měřítka α a rychlosti konvergence δ Feigenbaum udělal linearizací funkcionální rovnice v okolí jejího pevného bodu, tj. univerzální funkce g , a našel tak univerzální hodnoty nezávislé na funkci f :

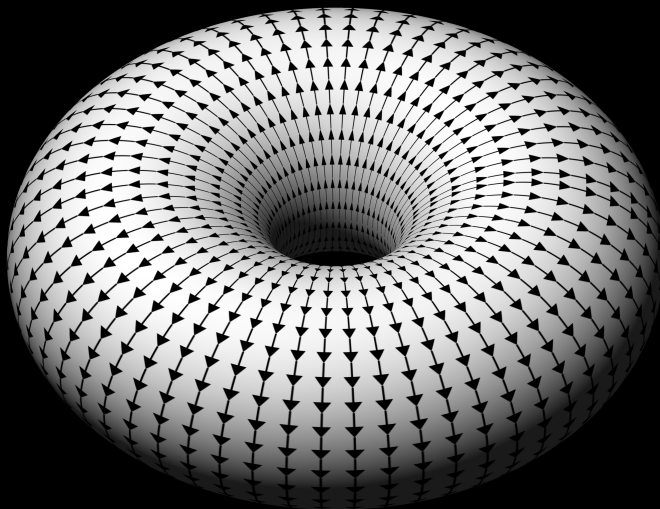
$$\alpha \doteq 2.5028$$

a vlastní číslo

$$\delta \doteq 4.669,$$

které se dnes nazývají Feigenbaumovy konstanty.

Mandelbrotova množina a logistické zobrazení



Co se naučíme:

- základní vlastnosti rotace na jednotkové kružnici

Co se naučíme:

- základní vlastnosti rotace na jednotkové kružnici
- definujeme Juliovu a Mandelbrotovu množinu

Co se naučíme:

- základní vlastnosti rotace na jednotkové kružnici
- definujeme Juliovu a Mandelbrotovu množinu
- pochopíme základní vlastnosti těchto fraktálů a jejich souvislost s logistickým zobrazením

Co se naučíme:

- základní vlastnosti rotace na jednotkové kružnici
- definujeme Juliovu a Mandelbrotovu množinu
- pochopíme základní vlastnosti těchto fraktálů a jejich souvislost s logistickým zobrazením
- definujeme normální formu lokální m -fold bifurkace komplexní rovnováhy

Lemma 6

Všechna kvadratická zobrazení jsou lineárně konjugovaná.

Lemma 6

Všechna kvadratická zobrazení jsou lineárně konjugovaná.

Důkaz:

Označme $Q(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ a $M_c(z) = z^2 + c$. Pak lineární funkce $h(z) = \alpha z + \frac{\beta}{2}$ je homeomorfismus mezi zobrazeními Q a M , tj.

$$\begin{array}{ccc}
 z & \longrightarrow & Q(z) \\
 \downarrow h & & \downarrow h \\
 w & \longrightarrow & M_c(w)
 \end{array}$$

pro $c = \alpha\gamma + \frac{1}{4}\beta(2 - \beta)$, tj. $h \circ Q = M_c \circ h$.

Dynamika logistické rovnice (28) je proto díky topologické konjugovanosti zobrazení $Q(z) = az(1 - z)$ a $M_c(z) = z^2 + c$ topologicky ekvivalentní dynamice rovnice

$$z(n + 1) = z(n)^2 + c, \quad (29)$$

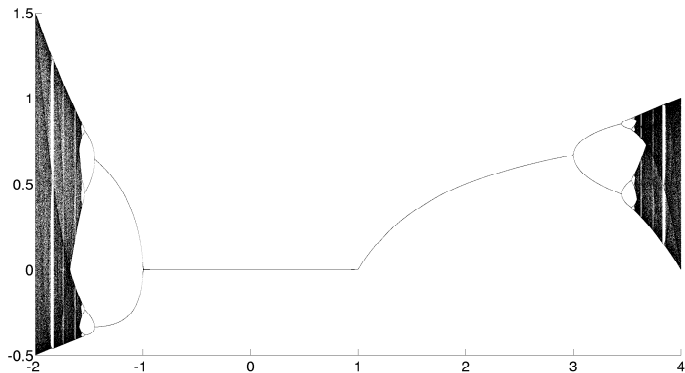
přičemž $c = \frac{1}{4}a(2 - a)$ a $h(z) = -az + \frac{a}{2}$.

Dynamika logistické rovnice (28) je proto díky topologické konjugovanosti zobrazení $Q(z) = az(1 - z)$ a $M_c(z) = z^2 + c$ topologicky ekvivalentní dynamice rovnice

$$z(n + 1) = z(n)^2 + c, \quad (29)$$

přičemž $c = \frac{1}{4}a(2 - a)$ a $h(z) = -az + \frac{a}{2}$.

Zobrazení $M_c(z)$ se nazývá **Mandelbrotovo zobrazení**. Je vidět, že logistická rovnice má vzhledem k parametru 2 symetrické části s topologicky ekvivalentní dynamikou v intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$.



Dynamika na kružnici

Nejprve si představíme nejjednodušší zobrazení $M_0(z)$ pro $c = 0$. Pro $|z| < 1$ platí $M_0^{(n)}(z) = z^{2^n} \rightarrow 0$, pro $|z| > 1$ platí $|M_0^{(n)}(z)| = |z|^{2^n} \rightarrow \infty$. Body, které leží na hranici konvergence $M_0(z)$ (v tomto případě na kružnici S^1) patří do množiny, která nese jméno Gastona Maurice Julia – **Juliova množina**.

Dynamika na kružnici

Nejprve si představíme nejjednodušší zobrazení $M_0(z)$ pro $c = 0$. Pro $|z| < 1$ platí $M_0^{(n)}(z) = z^{2^n} \rightarrow 0$, pro $|z| > 1$ platí $|M_0^{(n)}(z)| = |z|^{2^n} \rightarrow \infty$. Body, které leží na hranici konvergence $M_0(z)$ (v tomto případě na kružnici S^1) patří do množiny, která nese jméno Gastona Maurice Julia – **Juliova množina**.

Pro ty, kteří se příliš neseťkali iteracemi nad komplexními čísly, natož s Juliovou množinou, ani s Mandelbrotovou množinou, doporučuji na úvod krásná videa, ve kterých (ve francouzské verzi) projektu Dimensions popisuje a animuje komplexní iterace přímo prof. Adrien Douady: **5. kapitola (ang.)** a **6. kapitola (ang.)**, který spolu s Johnem H. Hubbardem dokázal souvislost Mandelbrotovy množiny.

Zobrazení $M_0: z \rightarrow z^2$ na $|z| = 1$ můžeme přepsat do polárních souřadnic $z = \rho e^{i2\pi\varphi}$ a dostáváme tak na kružnici lineární zobrazení – zdvojnásobení úhlů:

$$\varphi(n+1) = 2\varphi(n) \text{ mod } 1$$

Zobrazení $M_0: z \rightarrow z^2$ na $|z| = 1$ můžeme přepsat do polárních souřadnic $z = \rho e^{i2\pi\varphi}$ a dostáváme tak na kružnici lineární zobrazení – zdvojnásobení úhlů:

$$\varphi(n+1) = 2\varphi(n) \text{ mod } 1$$

Je evidentní, že pokud $\varphi(0) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, dostáváme cyklus délky q .
V opačném případě bude trajektorie hustá v S^1 .

Toto chování je fakticky natolik blízké stochastickému, že jej nazýváme chaotické (nikoliv náhodné). Pokud $\varphi(n)$ zapíšeme ve dvojkové soustavě $\varphi(n+1)$ má tentýž zápis ořezaný o první cifru a posunutý vlevo:

$$\varphi(n) = 0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2^2} + \frac{\omega_3}{2^3} + \dots,$$

kde ω_k jsou cifry 0 nebo 1.

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) &= 2 \cdot 0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots \bmod 1 = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2^2} + \frac{\omega_3}{2^3} + \dots \right) \bmod 1 = 0.\omega_2\omega_3 \dots \end{aligned}$$

Toto chování je fakticky natolik blízké stochastickému, že jej nazýváme chaotické (nikoliv náhodné). Pokud $\varphi(n)$ zapíšeme ve dvojkové soustavě $\varphi(n+1)$ má tentýž zápis ořezaný o první cifru a posunutý vlevo:

$$\varphi(n) = 0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2^2} + \frac{\omega_3}{2^3} + \dots,$$

kde ω_k jsou cifry 0 nebo 1.

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) &= 2 \cdot 0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots \bmod 1 = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2^2} + \frac{\omega_3}{2^3} + \dots \right) \bmod 1 = 0.\omega_2\omega_3 \dots \end{aligned}$$

Tomuto zobrazení se říká Bernoulliho posun – **shift map**

Toto chování je fakticky natolik blízké stochastickému, že jej nazýváme chaotické (nikoliv náhodné). Pokud $\varphi(n)$ zapíšeme ve dvojkové soustavě $\varphi(n+1)$ má tentýž zápis ořezaný o první cifru a posunutý vlevo:

$$\varphi(n) = 0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2^2} + \frac{\omega_3}{2^3} + \dots,$$

kde ω_k jsou cifry 0 nebo 1.

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) &= 2 \cdot 0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots \bmod 1 = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2^2} + \frac{\omega_3}{2^3} + \dots \right) \bmod 1 = 0.\omega_2\omega_3 \dots \end{aligned}$$

Tomuto zobrazení se říká Bernoulliho posun – **shift map** a modeluje se jím stochastický náhodný proces...

Chaotická trajektorie tak splňuje základní vlastnosti **chaotické dynamiky**:

Chaotická trajektorie tak splňuje základní vlastnosti **chaotické dynamiky**:

- **citlivost na počáteční podmínky** – předpokládejme, že známe počáteční podmínku x_0 až do N -tého binárního místa. Uvažujme (nespočetnou) množinu čísel, která mají stejný začátek binárního zápisu, liší se až od mocniny 2^{-N} a jejich trajektorie. Po N iteracích se tyto blízké trajektorie stávají zcela náhodnými a neexistuje žádný vztah k počáteční podmínce.

Chaotická trajektorie tak splňuje základní vlastnosti **chaotické dynamiky**:

- **citlivost na počáteční podmínky** – předpokládejme, že známe počáteční podmínku x_0 až do N -tého binárního místa. Uvažujme (nespočetnou) množinu čísel, která mají stejný začátek binárního zápisu, liší se až od mocniny 2^{-N} a jejich trajektorie. Po N iteracích se tyto blízké trajektorie stávají zcela náhodnými a neexistuje žádný vztah k počáteční podmínce.
- **topologická transitivnost** – uvažujme interval počátečních hodnot, které se liší poprvé na N -tém binárním místě. Po N iteracích dojde k posunu o těchto N míst a interval se rozprostře na celý $\langle 0, 1 \rangle$.

Chaotická trajektorie tak splňuje základní vlastnosti **chaotické dynamiky**:

- **citlivost na počáteční podmínky** – předpokládejme, že známe počáteční podmínku x_0 až do N -tého binárního místa. Uvažujme (nespočetnou) množinu čísel, která mají stejný začátek binárního zápisu, liší se až od mocniny 2^{-N} a jejich trajektorie. Po N iteracích se tyto blízké trajektorie stávají zcela náhodnými a neexistuje žádný vztah k počáteční podmínce.
- **topologická transitivnost** – uvažujme interval počátečních hodnot, které se liší poprvé na N -tém binárním místě. Po N iteracích dojde k posunu o těchto N míst a interval se rozprostře na celý $\langle 0, 1 \rangle$.
- **husté periodické trajektorie** – binární zápis každého racionálního čísla je zakončen opakující se skupinou cifer, a proto generuje periodické trajektorie (včetně pevných bodů). Iracionální čísla mají binární zápis, který se neopakuje. Proto je množina periodických bodů hustá (jsou libovolně blízko jiné dané trajektorii) v množině chaotických trajektorií.

Nyní se vraťme k zobrazení $M_c(z) = z^2 + c$.

Věta 31

Nechť $|z| \geq |c| > 2$. Pak $|M_c^{(n)}(z)| \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$.

Nyní se vraťme k zobrazení $M_c(z) = z^2 + c$.

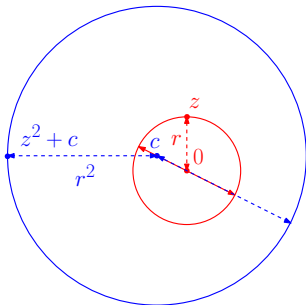
Věta 31

Nechť $|z| \geq |c| > 2$. Pak $|M_c^{(n)}(z)| \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$.

Důkaz:

Nechť $|z| = r \geq |c|$. $M_c(z) = z^2 + c$ zobrazuje kružnici o poloměru r se středem v 0, na níž leží z na kružnici s poloměrem r^2 a středem c .

Protože $r^2 > 2r$, platí $|M_c(z)| > |z|$, tj. $|M_c^{(n)}(z)| \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$.



Všimněte si, že $M_c(0) = c$ a pro $|c| > 2$ tedy musí $M_c^{(n)}(0)$ divergovat. Zároveň ale pro $z = 0$ platí $M'_c(z) = 0$ a pro reálné hodnoty c jsme již ukázali, že je-li takový bod prvkem cyklu, je to superatraktivní kritický bod a cyklus je nutně stabilní. Pro některé hodnoty c a z tedy musí být dynamika omezená.

Všimněte si, že $M_c(0) = c$ a pro $|c| > 2$ tedy musí $M_c^{(n)}(0)$ divergovat. Zároveň ale pro $z = 0$ platí $M'_c(z) = 0$ a pro reálné hodnoty c jsme již ukázali, že je-li takový bod prvkem cyklu, je to superatraktivní kritický bod a cyklus je nutně stabilní. Pro některé hodnoty c a z tedy musí být dynamika omezená. **Ale kde je ta hranice?**

Všimněte si, že $M_c(0) = c$ a pro $|c| > 2$ tedy musí $M_c^{(n)}(0)$ divergovat. Zároveň ale pro $z = 0$ platí $M'_c(z) = 0$ a pro reálné hodnoty c jsme již ukázali, že je-li takový bod prvkem cyklu, je to superatraktivní kritický bod a cyklus je nutně stabilní. Pro některé hodnoty c a z tedy musí být dynamika omezená. **Ale kde je ta hranice?**

Definice 20

Hranice množiny bodů $z \in \mathbb{C}$, pro které platí $|M_c^{(n)}(z)| \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$ se nazývá Juliova množina J_c .

Všimněte si, že $M_c(0) = c$ a pro $|c| > 2$ tedy musí $M_c^{(n)}(0)$ divergovat. Zároveň ale pro $z = 0$ platí $M'_c(z) = 0$ a pro reálné hodnoty c jsme již ukázali, že je-li takový bod prvkem cyklu, je to superatraktivní kritický bod a cyklus je nutně stabilní. Pro některé hodnoty c a z tedy musí být dynamika omezená. **Ale kde je ta hranice?**

Definice 20

Hranice množiny bodů $z \in \mathbb{C}$, pro které platí $|M_c^{(n)}(z)| \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$ se nazývá Juliova množina J_c .

Poznámka

$J_0 = S^1$ a zobrazení $h(z) = z + \frac{1}{z}$ splňuje $h \circ M_0 = M_{-2} \circ h$. Proto $J_{-2} = h(S^1) = \langle -2, 2 \rangle$. Zobrazení h sice není homeomorfismus (nejde o bijekci), ale zaručuje spojitě zobrazení invariantní množiny J_0 na J_{-2} .

Při procházce různými body $c \in C$ (s počáteční podmínkou $z = 0$) tak dostáváme různé Juliovy množiny. Lze ukázat, že pro všechna $|c| > 2$ je J_c topologicky ekvivalentní Cantorově množině. Lze ukázat, že nestabilní cykly náleží J_c .

Při procházce různými body $c \in \mathbb{C}$ (s počáteční podmínkou $z = 0$) tak dostáváme různé Juliovy množiny. Lze ukázat, že pro všechna $|c| > 2$ je J_c topologicky ekvivalentní Cantorově množině. Lze ukázat, že nestabilní cykly náleží J_c .

Definice 21

Množina bodů $c \in \mathbb{C}$, pro kterou zůstává $M_c^{(n)}(0)$ omezená, se nazývá Mandelbrotova množina \mathcal{M} . Množina bodů $c \in \mathbb{C}$, pro které má M_c atrahující cyklus \mathcal{M}'

Mandelbrotova a Juliova množina

Mandelbrotova množina nutně obsahuje body $c \in \mathbb{C}$, pro které leží 0 v bezprostřední oblasti přitažlivosti stabilních cyklů. Tohoto se používá v algoritmu pro vykreslení \mathcal{M} .

Mandelbrotova množina nutně obsahuje body $c \in \mathbb{C}$, pro které leží 0 v bezprostřední oblasti přitažlivosti stabilních cyklů. Tohoto se používá v algoritmu pro vykreslení \mathcal{M} .

Uvažujme nejprve jedna cyklus (pevný bod) tohoto zobrazení splňující $M_c(z) = z^2 + c = z$. Takové body jsou 2, ale stabilní je pouze ten, pro který platí $|M'_c(z)| = 2|z| < 1$. Hranicí stability je tedy množina (kardioida)

$$\{c = z - z^2 : |z| = \frac{1}{2}\} = \{c = \frac{1}{2}e^{i2\pi\varphi} - \frac{1}{4}e^{i4\pi\varphi} : \varphi \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

Nyní uvažujme 2-cykly.

Nyní uvažujme 2-cykly.

Hledáme pevné body zobrazení $M_c(M_c(z))$, které nejsou pevnými body $M_c(z)$.

Nyní uvažujme 2-cykly.

Hledáme pevné body zobrazení $M_c(M_c(z))$, které nejsou pevnými body $M_c(z)$. Musí tedy platit

$$\frac{M_c(M_c(z)) - z}{M_c(z) - z} = \frac{(z^2 + c)^2 + c - z}{z^2 + c - z} = z^2 + z + 1 + c = 0$$

Nyní uvažujme 2-cykly.

Hledáme pevné body zobrazení $M_c(M_c(z))$, které nejsou pevnými body $M_c(z)$. Musí tedy platit

$$\frac{M_c(M_c(z)) - z}{M_c(z) - z} = \frac{(z^2 + c)^2 + c - z}{z^2 + c - z} = z^2 + z + 1 + c = 0$$

Tyto body jsou zase 2:

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3-4c}}{2},$$

ale tentokrát jsou prvky téhož cyklu, protože $z_2 = M_c(z_1)$ a $z_1 = M_c(z_2)$.

Pokud $|M_c^{(2)'}(z)| < 1$, je cyklus stabilní. Hranicí stability je proto množina c splňujících

$$|2z_1 \cdot 2z_2| = |4zM_c(z)| = |4z(z^2 + c)| = |4z(-1 - z)| = 4|1 + c| = 1.$$

Pokud $|M_c^{(2)'}(z)| < 1$, je cyklus stabilní. Hranicí stability je proto množina c splňujících

$$|2z_1 \cdot 2z_2| = |4zM_c(z)| = |4z(z^2 + c)| = |4z(-1 - z)| = 4|1 + c| = 1.$$

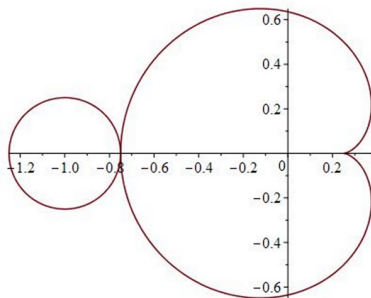
Jde tedy o kružnici se středem v -1 a poloměrem $\frac{1}{4}$, která se v bodě $c = -\frac{3}{4}$ dotýká kardioidy. V tomto bodě dvojice bodů cyklu splývá: $z^2 + z + 1 + c = (z + \frac{1}{2})^2 = 0$ a $M_c^{(2)'}(z) = 1$ a platí $M_c'(-\frac{1}{2}) = -1$.

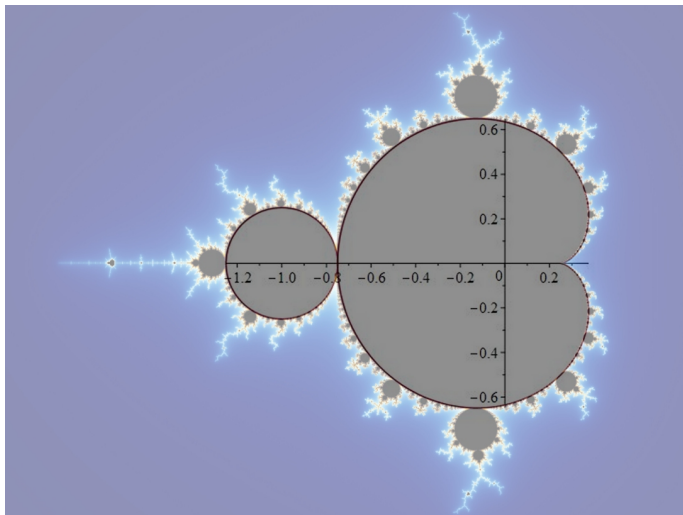
Pokud $|M_c^{(2)'}(z)| < 1$, je cyklus stabilní. Hranicí stability je proto množina c splňujících

$$|2z_1 \cdot 2z_2| = |4zM_c(z)| = |4z(z^2 + c)| = |4z(-1 - z)| = 4|1 + c| = 1.$$

Jde tedy o kružnici se středem v -1 a poloměrem $\frac{1}{4}$, která se v bodě $c = -\frac{3}{4}$ dotýká kardioidy. V tomto bodě dvojice bodů cyklu splývá: $z^2 + z + 1 + c = (z + \frac{1}{2})^2 = 0$ a $M_c^{(2)'}(z) = 1$ a platí $M_c'(-\frac{1}{2}) = -1$.

V reálném oboru zaniká pevný bod flip bifurkací a vzniká 2-cyklus fold bifurkací. Připomeňme, že námi v reálném oboru studované logistické zobrazení je konjugované s Mandelbrotovým, přičemž $c = \frac{1}{4}a(2 - a)$. Vznik 2-cyklu flip bifurkací pro $a = 3$ a $a = -1$ odpovídá $c = -\frac{3}{4}$.





O polynomiálních komplexních iteracích byly již napsány celé knihy, takže v této přednášce nemůžeme postihnout ani vzdáleně, co všechno je o Mandelbrotově množině a Juliových množinách známo.

O polynomiálních komplexních iteracích byly již napsány celé knihy, takže v této přednášce nemůžeme postihnout ani vzdáleně, co všechno je o Mandelbrotově množině a Juliových množinách známo.

Jedna důležitá věc se ale zmiňuje v literatuře jen velmi zřídka, ačkoliv Julia i Fatou tímto směrem uvažovali již na počátku 20. století. Jde o chování cyklů zobrazení M_c , které mají vlastní číslo v blízkosti **celočíslných odmocnin z 1**. Flip a fold bifurkace vznikají pro celočíselné odmocniny z $1 - +1$ a -1 .

O polynomiálních komplexních iteracích byly již napsány celé knihy, takže v této přednášce nemůžeme postihnout ani vzdáleně, co všechno je o Mandelbrotově množině a Juliových množinách známo.

Jedna důležitá věc se ale zmiňuje v literatuře jen velmi zřídka, ačkoliv Julia i Fatou tímto směrem uvažovali již na počátku 20. století. Jde o chování cyklů zobrazení M_c , které mají vlastní číslo v blízkosti **celočíslných odmocnin z 1**. Flip a fold bifurkace vznikají pro celočíselné odmocniny z $1 - +1$ a -1 .

V literatuře tuto bifurkaci moc nenajdete. Výjimkou je např. Devaneyho monografie [Dev20] a samozřejmě původní článek Guckenheimera a McGeheeho s důkazem Mandelbrotovy hypotézy o bublinách v \mathcal{M}' a hlavně s odvozením normální formy m -fold bifurkace.

m-fold bifurkace

S využitím našich znalostí o normálních formách můžeme odvození normální formy z [GM84] velmi zjednodušit.

m-fold bifurkace

S využitím našich znalostí o normálních formách můžeme odvození normální formy z [GM84] velmi zjednodušit.

Uvažujme komplexní polynomiální (nebo holomorfní) funkce f závislé na komplexním parametru a iterace

$$z_{n+1} = f(z_n, \alpha). \quad (30)$$

Předpokládejme, že 0 je pevný bod zobrazení f s vlastním číslem $\lambda(\alpha)$, které pro kritickou hodnotu parametru $\alpha = \alpha_0$ nabývá m -té primitivní odmocniny z 1, tj. m je nejmenší přirozené číslo splňující $\lambda(\alpha_0)^m = 1$. V dalším budeme pro jednoduchost vynechávat parametr. Platí

$$f(z) = \lambda z + F(z) + O(z^{k+1}),$$

kde $F = F_2 + F_3 + \dots + F_k$ zahrnuje vyšší mocniny z až do k -tého stupně.

V prostorech $V_j = \{z^j\}$, $j \in \{2, \dots, k\}$ budeme postupně eliminovat jednotlivé mocniny.

V prostorech $V_j = \{z^j\}$, $j \in \{2, \dots, k\}$ budeme postupně eliminovat jednotlivé mocniny.

Konkrétně tedy pro postupnou eliminaci j -té mocniny dostáváme tvar po eliminaci mocniny $j - 1$ (pro $j = 2$ již v tomto tvaru rovnici máme):

$$z_{n+1} = \lambda z_n + F_j(z_n) + O(z^{j+1}).$$

V prostorech $V_j = \{z^j\}$, $j \in \{2, \dots, k\}$ budeme postupně eliminovat jednotlivé mocniny.

Konkrétně tedy pro postupnou eliminaci j -té mocniny dostáváme tvar po eliminaci mocniny $j - 1$ (pro $j = 2$ již v tomto tvaru rovnici máme):

$$z_{n+1} = \lambda z_n + F_j(z_n) + O(z^{j+1}).$$

Identitě blízká transformace

$$z = w + h_j(w), \quad \text{kde } h_j \text{ je stupně } j$$

pak převádí tuto rovnici do tvaru

$$z_{n+1} = w_{n+1} + h_j(w_{n+1}) = \lambda(w_n + h_j(w_n)) + F_j(w_n + \dots) + \dots,$$

V prostorech $V_j = \{z^j\}$, $j \in \{2, \dots, k\}$ budeme postupně eliminovat jednotlivé mocniny.

Konkrétně tedy pro postupnou eliminaci j -té mocniny dostáváme tvar po eliminaci mocniny $j - 1$ (pro $j = 2$ již v tomto tvaru rovnici máme):

$$z_{n+1} = \lambda z_n + F_j(z_n) + O(z^{j+1}).$$

Identitě blízká transformace

$$z = w + h_j(w), \quad \text{kde } h_j \text{ je stupně } j$$

pak převádí tuto rovnici do tvaru

$$z_{n+1} = w_{n+1} + h_j(w_{n+1}) = \lambda(w_n + h_j(w_n)) + F_j(w_n + \dots) + \dots,$$

$$w_{n+1} = \lambda w_n + \lambda h_j(w_n) - h_j(\lambda w_n + \dots) + F_j(w_n + \dots) + \dots$$

Došli jsme tak samozřejmě ke známému operátoru

$$h_j(z) \mapsto L(h_j(z)) = \lambda h_j(z) - h_j(\lambda z)$$

a homologické rovnici $F_j(z) + L(h_j(z)) = 0$. Řešení této v prostoru V_j lineární rovnice je jednoznačné a existuje, pokud je operátor L invertibilní.

Došli jsme tak samozřejmě ke známému operátoru

$$h_j(z) \mapsto L(h_j(z)) = \lambda h_j(z) - h_j(\lambda z)$$

a homologické rovnici $F_j(z) + L(h_j(z)) = 0$. Řešení této v prostoru V_j lineární rovnice je jednoznačné a existuje, pokud je operátor L invertibilní.

To platí pokud pro $j \in 1, \dots, k$

$$\lambda z^j - (\lambda z)^j = \lambda(1 - \lambda^{j-1})z^j \neq 0$$

v ryzím okolí $z = 0$.

Došli jsme tak samozřejmě ke známému operátoru

$$h_j(z) \mapsto L(h_j(z)) = \lambda h_j(z) - h_j(\lambda z)$$

a homologické rovnici $F_j(z) + L(h_j(z)) = 0$. Řešení této v prostoru V_j lineární rovnice je jednoznačné a existuje, pokud je operátor L invertibilní.

To platí pokud pro $j \in 1, \dots, k$

$$\lambda z^j - (\lambda z)^j = \lambda(1 - \lambda^{j-1})z^j \neq 0$$

v ryzím okolí $z = 0$.

Protože λ je m -tá primitivní odmocnina z 1, platí tato nerovnost pro každou mocninu až do $k = m$, přičemž pro $k = m + 1$ dostáváme první rezonanční člen.

Odvodili jsme normální formu komplexní *m*-fold bifurkace (30):

$$z_{n+1} = \lambda(\alpha)z_n + c(\alpha)z_n^{m+1} + O(z_n^{m+2}) \quad (31)$$

s podmínkou nedegenerovanosti $c(\alpha_0) \neq 0$.

Odvodili jsme normální formu komplexní m -fold bifurkace (30):

$$z_{n+1} = \lambda(\alpha)z_n + c(\alpha)z_n^{m+1} + O(z_n^{m+2}) \quad (31)$$

s podmínkou nedegenerovanosti $c(\alpha_0) \neq 0$.

Tato bifurkace je ve skutečnosti více podobná reálné transkritické bifurkaci, protože v okolí kritické hodnoty α_0 vždy existuje kromě pevného bodu $z = 0$ zobrazení f také m -cyklus zobrazení f , které v kritické hodnotě parametru $\alpha = \alpha_0$ splynou. Toto lze lehce vidět, protože pro $g(z) = \lambda z + cz^{m+1} + O(z^{m+2})$ je $g^{(m)}(z) = \lambda^m z + O(z^2)$. Pro $\lambda(\alpha)$ v ryzím okolí α_0 tedy existuje nenulové řešení rovnice $z = g^{(m)}(z)$.

Odvodili jsme normální formu komplexní m -fold bifurkace (30):

$$z_{n+1} = \lambda(\alpha)z_n + c(\alpha)z_n^{m+1} + O(z_n^{m+2}) \quad (31)$$

s podmínkou nedegenerovanosti $c(\alpha_0) \neq 0$.

Tato bifurkace je ve skutečnosti více podobná reálné transkritické bifurkaci, protože v okolí kritické hodnoty α_0 vždy existuje kromě pevného bodu $z = 0$ zobrazení f také m -cyklus zobrazení f , které v kritické hodnotě parametru $\alpha = \alpha_0$ splynou. Toto lze lehce vidět, protože pro $g(z) = \lambda z + cz^{m+1} + O(z^{m+2})$ je $g^{(m)}(z) = \lambda^m z + O(z^2)$. Pro $\lambda(\alpha)$ v ryzím okolí α_0 tedy existuje nenulové řešení rovnice $z = g^{(m)}(z)$.

Guckenheimer a McGehee ve svém článku [GM84] také ukázali, že podmínka nedegenerovanosti m -fold bifurkace v bodě z_0 je v případě Mandelbrotova zobrazení vždy splněna.

Abychom měli lepší představu o *m*-fold bifurkaci, ukážeme si 3-fold bifurkaci pevného bodu 0 komplexního logistického zobrazení

$$f(z) = az(1 - z) \text{ v okolí } a_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Abychom měli lepší představu o *m*-fold bifurkaci, ukážeme si 3-fold bifurkaci pevného bodu 0 komplexního logistického zobrazení

$$f(z) = az(1 - z) \text{ v okolí } a_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Opravdu dochází k 3-fold bifurkaci, protože pevný bod 0 má vlastní číslo $f'(0) = a_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt[3]{1}$.

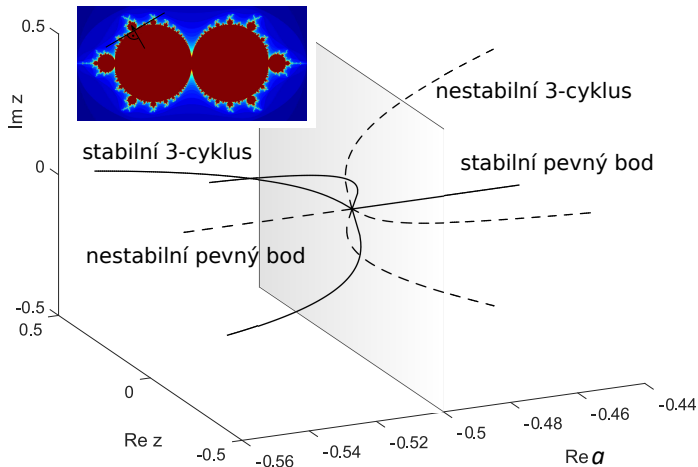
Abychom měli lepší představu o *m*-fold bifurkaci, ukážeme si 3-fold bifurkaci pevného bodu 0 komplexního logistického zobrazení

$$f(z) = az(1 - z) \text{ v okolí } a_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

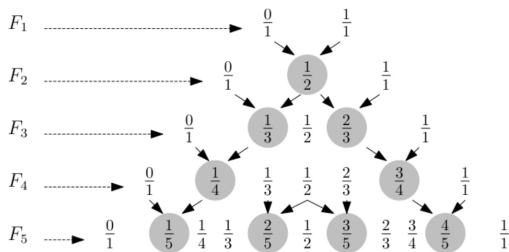
Opravdu dochází k 3-fold bifurkaci, protože pevný bod 0 má vlastní číslo $f'(0) = a_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt[3]{1}$.

Protože neumíme zobrazit 4-rozměrný bifurkační diagram, zobrazíme pouze 3D řez. Procházíme skrz hranici komponenty příslušné stabilnímu pevnému bodu 0 kolmo do komponenty příslušné stabilnímu 3-cyklu a zobrazujeme v závislosti na reálné složce parametru *a*.

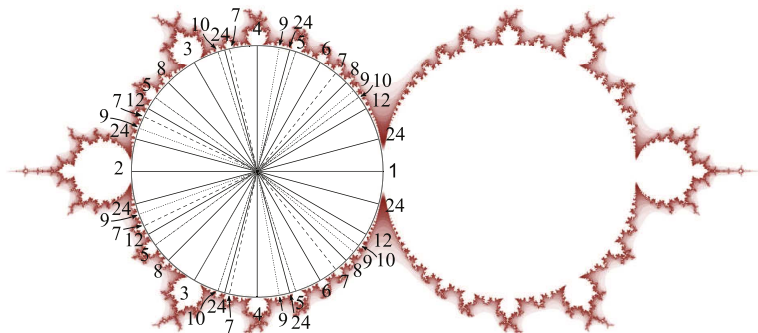
„Mandelbrotova“ množina logistického zobrazení je zobrazena v rohu obrázku, přičemž platí samozřejmě $c = \frac{1}{4}a(2 - a)$.

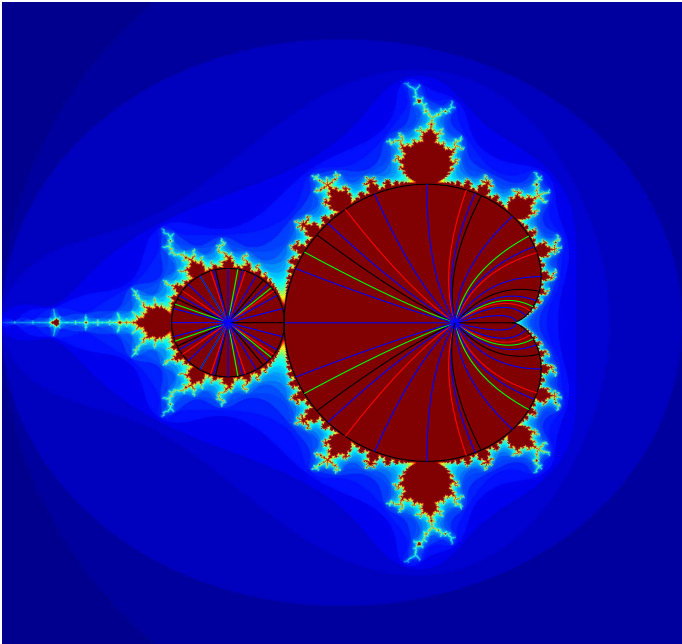


Protože pro logistické zobrazení je komponenta \mathcal{M}' příslušná stabilnímu pevnému bodu 0 kružnice o poloměru 1 se středem v 0 a $f'(0) = a$, dotýkají se komponenty příslušné stabilním m -cyklům vznikajícím m -fold bifurkací ve všech bodech tvaru $e^{i2\pi\frac{p}{q}}$, kde $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ je zlomek v základním tvaru, tj. $(p, q) = 1$. Tyto primitivní odmocniny z jedné jsou proto okolo kružnice seřazeny v tzv. Fareyho posloupnosti:



Vzhledem k tomu, že Douady, Hubbard a Sullivan ukázali, že pro komponenty \mathcal{M}' příslušné stabilním k -cyklům platí, že vlastní čísla těchto cyklů lze jednoznačně konformně zobrazit na jednotkové kruhy (viz např. [CG13] str. 134), vyskakuje na každé komponentě fraktální struktura Mandelbrotovy množiny daná pořadím primitivních odmocnin z jedné.



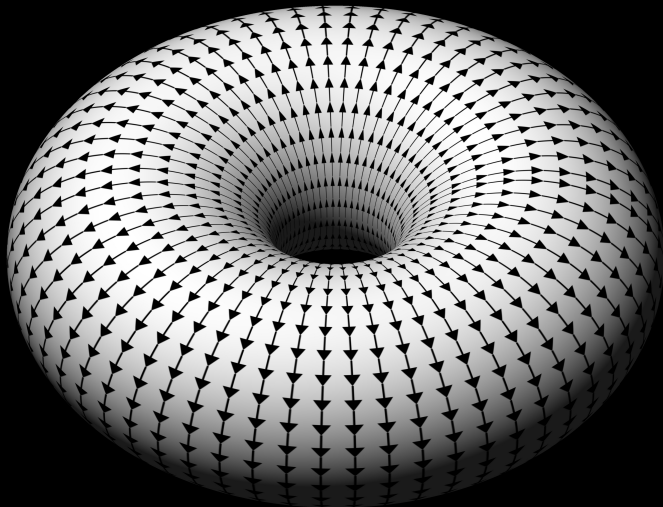


Cykly, které vznikají 1-fold bifurkací *k*-cyklů libovolné délky pak vytvářejí nové a nové vnořené fraktální struktury. A to jsme stále v $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$. Na hranici Mandelbrotovy množiny mezi těmito *m*-fold body, kde hustě vznikají nové komponenty \mathcal{M}' , najdeme ještě nespočetně mnoho bodů ... Mimochodem, ta hranice $\partial\mathcal{M}$ je souvislá a má dimenzi 2.

Cykly, které vznikají 1-fold bifurkací *k*-cyklů libovolné délky pak vytvářejí nové a nové vnořené fraktální struktury. A to jsme stále v $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$. Na hranici Mandelbrotovy množiny mezi těmito *m*-fold body, kde hustě vznikají nové komponenty \mathcal{M}' , najdeme ještě nespočetně mnoho bodů ... Mimochodem, ta hranice $\partial\mathcal{M}$ je souvislá a má dimenzi 2.

No a tady je nakonec jedno pěkné video se sloučením **Mandelbrotovy množiny a bifurkačního diagramu logistické rovnice**.

A další chaos



Co se naučíme:

- prozkoumáme nelineární dynamiku na kružnici

Co se naučíme:

- prozkoumáme nelineární dynamiku na kružnici
- poznáme Anosovovo zobrazení na toru (a Arnoldovu kočku)

Co se naučíme:

- prozkoumáme nelineární dynamiku na kružnici
- poznáme Anosovovo zobrazení na toru (a Arnoldovu kočku)
- poznáme Hénonovo zobrazení

Co se naučíme:

- prozkoumáme nelineární dynamiku na kružnici
- poznáme Anosovovo zobrazení na toru (a Arnoldovu kočku)
- poznáme Hénonovo zobrazení
- ukážeme si princip Smaleovy podkovy

Zobrazení na kružnici

V této kapitole se budeme zabývat hladkými zobrazeními na kružnici, které zachovávají pořadí bodů na kružnici (nevracejí se, tedy nemají kritické body). Jedno takové už známe:

Zobrazení na kružnici

V této kapitole se budeme zabývat hladkými zobrazeními na kružnici, které zachovávají pořadí bodů na kružnici (nevracejí se, tedy nemají kritické body). Jedno takové už známe:

$$z \mapsto z^2$$

Se zobrazením na kružnici S^1 $z \mapsto z^2$ jsme se setkali v předchozí kapitole. Víme, že je citlivé na počáteční podmínky, transitivní a má husté trajektorie, je topologicky ekvivalentní Bernoulliho posunu.

Se zobrazením na kružnici S^1 $z \mapsto z^2$ jsme se setkali v předchozí kapitole. Víme, že je citlivé na počáteční podmínky, transitivní a má husté trajektorie, je topologicky ekvivalentní Bernoulliho posunu.

Kvadratické zobrazení v komplexním oboru jsme výhodně přepsali na interval $\langle 0, 1 \rangle$ pomocí transformace $z = e^{i2\pi x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ na lineární zobrazení $E_2 : x \mapsto 2x \bmod 1$. Na kružnici jde tedy o pořadí zachovávající funkci, která násobí úhel dvěma.

Definujme nyní lineární zobrazení $E_m : x \mapsto mx \bmod 1$, kde $m > 1$ je přirozené číslo.

Definujme nyní lineární zobrazení $E_m: x \mapsto mx \bmod 1$, kde $m > 1$ je přirozené číslo.

Lemma 7

Na kružnici S^1 existuje bod $e^{i2\pi x}$ takový, že trajektorie $\{E_3^{(k)}(x) : k \in \mathbb{N}\}$ je hustá v třetinové Cantorově množině K .

Definujme nyní lineární zobrazení $E_m: x \mapsto mx \bmod 1$, kde $m > 1$ je přirozené číslo.

Lemma 7

Na kružnici S^1 existuje bod $e^{i2\pi x}$ takový, že trajektorie $\{E_3^{(k)}(x) : k \in \mathbb{N}\}$ je hustá v třetinové Cantorově množině K .

Důkaz:

Body Cantorovy množiny mají v zápise v trojkové soustavě pouze cifry 0 a 2. Zobrazení E_3 je Bernoulliho posun na Cantorově množině. K je E_3 -invariantní a hustá v $\langle 0, 1 \rangle$. Navíc platí $h \circ E_3 = E_2 \circ h$, kde h přepisuje cifry z trojkového zápisu pravidlem

$h(0.\omega_1\omega_2\dots_3) = 0.\frac{\omega_1}{2}\frac{\omega_2}{2}\dots_2$. Toto zobrazení je monotónní a spojitě $h: K \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, tedy existuje h^{-1} . Pokud tedy vezmeme iracionální číslo x a jeho iterovanou trajektorii E_2 , která je hustá v $\langle 0, 1 \rangle$, její vzor je iterovaná trajektorie zobrazení E_3 z $h^{-1}(x)$ hustá v K .

Podobné trajektorie můžeme sestrojít i pro zobrazení E_m , $m > 3$.

Definice 22

Zobrazení $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dané předpisem $\pi(x) = e^{i2\pi x}$ se nazývá **nakrytí**.

³resp. $(0, 2\pi)$ pokud S^1 ztotožníme s tímto intervalem

Podobné trajektorie můžeme sestrojít i pro zobrazení E_m , $m > 3$.

Definice 22

Zobrazení $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dané předpisem $\pi(x) = e^{i2\pi x}$ se nazývá **nakrytí**.

Definice 23

Zobrazení $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **lift** (vynesení) funkce $f: S^1 \rightarrow S^1$, jestliže je dané předpisem $\pi \circ F = f \circ \pi$.

³resp. $\langle 0, 2\pi \rangle$ pokud S^1 ztotožníme s tímto intervalem

Podobné trajektorie můžeme sestrojít i pro zobrazení E_m , $m > 3$.

Definice 22

Zobrazení $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dané předpisem $\pi(x) = e^{i2\pi x}$ se nazývá **nakrytí**.

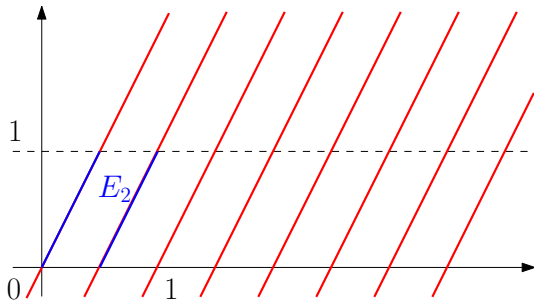
Definice 23

Zobrazení $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **lift** (vynesení) funkce $f: S^1 \rightarrow S^1$, jestliže je dané předpisem $\pi \circ F = f \circ \pi$.

Lift vynáší funkci definovanou původně na $S^1 \sim \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (tj. mod 1) z intervalu $\langle 0, 1 \rangle^3$ na celé \mathbb{R} . Lift není dán pro funkce f jednoznačně, může se lišit o celé číslo.

³resp. $\langle 0, 2\pi \rangle$ pokud S^1 ztotožníme s tímto intervalem

V případě zobrazení $E_m: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, které na kružnici reprezentuje vynásobení úhlu $m \times$ je tedy liftem libovolná přímka splňující $F'(x) = m$ splňující $F(x) \bmod 1 = E_m(x \bmod 1)$.



Lemma 8

Nechť F je lift f , pak platí $F(x + 1) - F(x) \in \mathbb{Z}$ a nezávisí na volbě x ani F .

Lemma 8

Nechť F je lift f , pak platí $F(x + 1) - F(x) \in \mathbb{Z}$ a nezávisí na volbě x ani F .

Důkaz:

$$\pi(F(x + 1)) = f(\pi(x + 1)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x))$$

tedy $F(x + 1)$ a $F(x)$ se mohou lišit pouze o celé číslo. Pokud \tilde{F} je jiný lift, pak $\pi(\tilde{F}(x)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x))$.

Lemma 8

Nechť F je lift f , pak platí $F(x + 1) - F(x) \in \mathbb{Z}$ a nezávisí na volbě x ani F .

Důkaz:

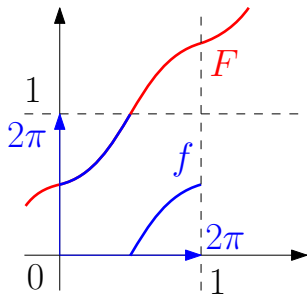
$$\pi(F(x + 1)) = f(\pi(x + 1)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x))$$

tedy $F(x + 1)$ a $F(x)$ se mohou lišit pouze o celé číslo. Pokud \tilde{F} je jiný lift, pak $\pi(\tilde{F}(x)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x))$.

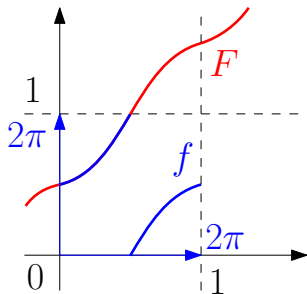
Definice 24

Číslo $\deg(f) = F(x + 1) - F(x)$ se nazývá **stupeň** f .

Difeomorfismus kružnice f zachovávající pořadí má stupeň 1.



Difeomorfismus kružnice f zachovávající pořadí má stupeň 1.



Definice 25

Zobrazení $f: S^1 \rightarrow S^1$ se nazývá **expandující**, jestliže $\exists \varepsilon > 0$ a $\lambda > 1$ taková, že $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$, pro které $|x - y| < \varepsilon$, platí $|F(x) - F(y)| > \lambda|x - y|$

Pro expandující hladké zobrazení platí

$$|F(x+1) - F(x)| = \left| \int_0^1 F'(x+t) dt \right| > \lambda > 1,$$

musí být tedy alespoň 2. stupně.

Pro expandující hladké zobrazení platí

$$|F(x+1) - F(x)| = \left| \int_0^1 F'(x+t) dt \right| > \lambda > 1,$$

musí být tedy alespoň 2. stupně.

Věta 32

Každé expandující zobrazení na kružnici stupně k je topologicky ekvivalentní zobrazení E_k .

Pro expandující hladké zobrazení platí

$$|F(x+1) - F(x)| = \left| \int_0^1 F'(x+t) dt \right| > \lambda > 1,$$

musí být tedy alespoň 2. stupně.

Věta 32

Každé expandující zobrazení na kružnici stupně k je topologicky ekvivalentní zobrazení E_k .

Důkaz:

Je konstruktivní, lze jej najít v [KH97] na str. 74 a 75.

Expandující zobrazení na kružnici tedy vykazují chování, které můžeme přirovnat ke stochastickému – Bernoulliho posunu.

Expandující zobrazení na kružnici tedy vykazují chování, které můžeme přirovnat ke stochastickému – Bernoulliho posunu.

Jak je to s difeomorfismy kružnice, tedy se zobrazeními, které jsou stupně 1?

Expandující zobrazení na kružnici tedy vykazují chování, které můžeme přirovnat ke stochastickému – Bernoulliho posunu.

Jak je to s difeomorfismy kružnice, tedy se zobrazeními, které jsou stupně 1?

Budete možná překvapeni, ale tak úplně jednoduché to není ...

Prozkoumáme chování zobrazení na jednotkové kružnici (θ měříme v radiánech):

$$f: \theta \mapsto \theta + 2\pi\omega + \varepsilon \sin \theta, \quad (32)$$

vzhledem k parametrům ω a ε . Bude nám sloužit jako prototyp vzniku **Arnoldových jazyků**⁴, které úzce souvisí s Neimarkovou–Sackerovou bifurkací a jevem synchronizace neboli vázané rotace.

⁴stejně tak jako objeviteli tohoto jevu Vladimíru Arnoldovi, po němž nesou jméno

Prozkoumáme chování zobrazení na jednotkové kružnici (θ měříme v radiánech):

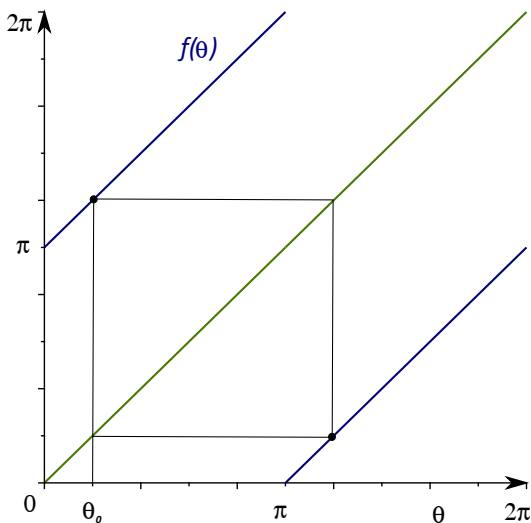
$$f: \theta \mapsto \theta + 2\pi\omega + \varepsilon \sin \theta, \quad (32)$$

vzhledem k parametrům ω a ε . Bude nám sloužit jako prototyp vzniku **Arnoldových jazyků**⁴, které úzce souvisí s Neimarkovou–Sackerovou bifurkací a jevem synchronizace neboli vázané rotace.

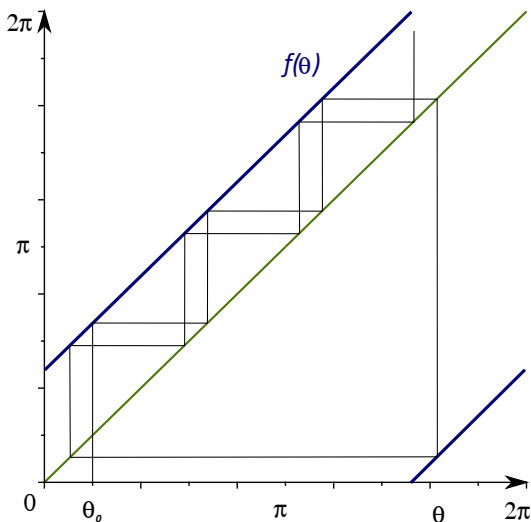
Všimněte si, že pro $\varepsilon = 0$ jde pouze o pootočení kružnice o úhel $2\pi\omega$. V takovém případě je pro $\omega = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ každá trajektorie periodická s periodou q a pro $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je tzv. kvaziperiodická (translace je konstantní, ale nedojde k „potkání“, takže hustě vyplní S^1).

⁴stejně tak jako objeviteli tohoto jevu Vladimíru Arnoldovi, po němž nesou jméno

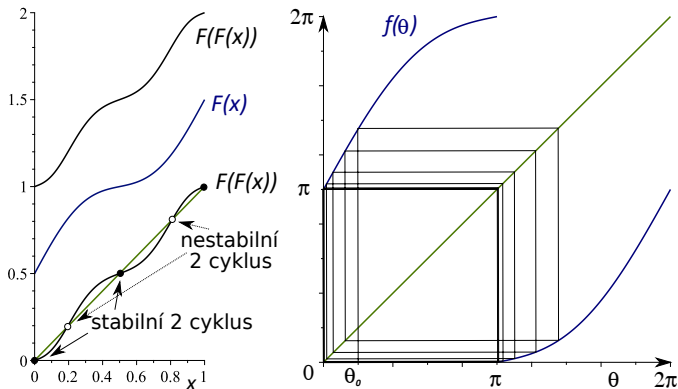
Jako příklad periodického chování zde vidíte trajektorii 2-cyklu pro $\varepsilon = 0$ a $\omega = \frac{1}{2}$ a libovolně zvolenou počáteční hodnotu θ_0 .



Jako příklad kvaziperiodického chování zde vidíte trajektorii pro $\varepsilon = 0$, $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\omega \approx 0.25$ a libovolně zvolenou počáteční hodnotu θ_0 .



V případě, že začneme měnit hodnotu ε pro $\omega = \frac{1}{2}$, lift F funkce f bude nelineární spojitou funkcí. Stejně tak $F \circ F = F^{(2)}$. Volbou F tak, aby $F(0) \in \langle 0, 1 \rangle$, musí platit $F^{(2)}(0) = 1$, protože $\omega = \frac{1}{2}$. Lift $F^{(2)}(x) - 1$ musí mít pevný bod 0 a protože pro malá ε platí $F^{(2)}(0)' = f'(0) \cdot f'(\pi) = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon) < 1$, je stabilní.



Obecný difeomorfismus f zachovávající pořadí kružnici zobrazí na kružnici tak, že některé body se zobrazí pootočeně o nějaký úhel, jiné o jiný úhel. Pokud tedy kružnici zobrazením f otáčíme mnohokrát za sebou a hodnotu zprůměrujeme, dostaneme jakési průměrné otočení. Budeme jej nazývat **rotační číslo**.

Obecný difeomorfismus f zachovávající pořadí kružnici zobrazí na kružnici tak, že některé body se zobrazí pootočeně o nějaký úhel, jiné o jiný úhel. Pokud tedy kružnici zobrazením f otáčíme mnohokrát za sebou a hodnotu zprůměrujeme, dostaneme jakési průměrné otočení. Budeme jej nazývat **rotační číslo**.

Musíme jej ale definovat korektně, tj. nezávisle na x a nezávisle na počtu provedených rotací. Měřit jej budeme v částech kruhu a použijeme tedy lift.

Obecný difeomorfismus f zachovávající pořadí kružnici zobrazí na kružnici tak, že některé body se zobrazí pootočeně o nějaký úhel, jiné o jiný úhel. Pokud tedy kružnici zobrazením f otáčíme mnohokrát za sebou a hodnotu zprůměrujeme, dostaneme jakési průměrné otočení. Budeme jej nazývat **rotační číslo**.

Musíme jej ale definovat korektně, tj. nezávisle na x a nezávisle na počtu provedených rotací. Měřit jej budeme v částech kruhu a použijeme tedy lift.

V případě předchozího zobrazení (32) $f: \theta \mapsto \theta + 2\pi\omega + \varepsilon \sin \theta$, zřejmě platí, že rotační číslo odpovídá ω .

Nejprve si připomeňme, že rotační číslo chceme definovat pro difeomorfismus f , tedy $\deg(f) = 1$ a pro každý jeho lift F platí

$$F(x + 1) - F(x) = 1.$$

Proto

$$F(x + 1) - (x + 1) = F(x) - x,$$

takže spojitá funkce $F - \text{id}$ je periodická s periodou 1.

Nejprve si připomeňme, že rotační číslo chceme definovat pro difeomorfismus f , tedy $\deg(f) = 1$ a pro každý jeho lift F platí

$$F(x + 1) - F(x) = 1.$$

Proto

$$F(x + 1) - (x + 1) = F(x) - x,$$

takže spojitá funkce $F - \text{id}$ je periodická s periodou 1.

Podobně to platí i pro n -tou iteraci $f, f^{(n)}$, jejíž lift je $F^{(n)}$. Spojitá funkce $F^{(n)} - \text{id}$ musí být tedy také 1-periodická a omezená.

Lemma 9

Pro lift F zobrazení f číslo

$$\rho_0(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{(n)}(x) - x}{n}$$

nezávisí na volbě x . Pro různé lifty F a \tilde{F} se liší o celé číslo

$$\rho_0(F) - \rho_0(\tilde{F}) = F - \tilde{F} \in \mathbb{Z}.$$

Lemma 9

Pro lift F zobrazení f číslo

$$\rho_0(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{(n)}(x) - x}{n}$$

nezávisí na volbě x . Pro různé lify F a \tilde{F} se liší o celé číslo

$$\rho_0(F) - \rho_0(\tilde{F}) = F - \tilde{F} \in \mathbb{Z}.$$

Důkaz:

Pro různé $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ je $|x - y| < 1$, tedy $|F^{(n)}(x) - F^{(n)}(y)| < 1$. Proto

$$\left| \frac{F^{(n)}(x) - x}{n} - \frac{F^{(n)}(y) - y}{n} \right| \leq \frac{1}{n} (|F^{(n)}(x) - F^{(n)}(y)| + |x - y|) < \frac{2}{n}.$$

Definice 26

Číslo $\rho(f) = \pi(\rho_0(F))$ se nazývá **rotační číslo** zobrazení f .

Definice 26

Číslo $\rho(f) = \pi(\rho_0(F))$ se nazývá **rotační číslo** zobrazení f .

Ukázali jsme, že definice je korektní, ale ne, že je vždy použitelná – chybí nám dokázat, že limita vždy existuje. Důkaz je technický, můžete jej najít v [Dev08] na str. 105-106 nebo v [KH97] na str. 388. Zde také najdete následující významné tvrzení.

Definice 26

Číslo $\rho(f) = \pi(\rho_0(F))$ se nazývá **rotační číslo** zobrazení f .

Ukázali jsme, že definice je korektní, ale ne, že je vždy použitelná – chybí nám dokázat, že limita vždy existuje. Důkaz je technický, můžete jej najít v [Dev08] na str. 105-106 nebo v [KH97] na str. 388. Zde také najdete následující významné tvrzení.

Věta 33

Orientaci zachovávající homeomorfismus na kružnici zachovává rotační číslo.

Lemma 10

Pokud $\rho(f) = 0$, pak má f pevný bod.

Důkaz:

Předpokládejme, že $\rho(f) = 0$ a f nemá pevný bod. Nechť F je lift splňující $F(0) \in \langle 0, 1 \rangle$. Pokud by $F(x) - x \in \mathbb{Z}$, byl by bod $\pi(x)$ pevným bodem f , takže $F(x) - x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a existuje $\delta > 0$ takové, že

$$0 < \delta \leq F(x) - x \leq 1 - \delta < 1.$$

Volbou $x = F^{(i)}(0)$ pro $i \in \{0, \dots, n-1\}$ a sečtením přes všechna i pak dostáváme

$$\delta n \leq F^{(n)}(0) \leq (1 - \delta)n$$

a $\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n} \neq 0$, spor.

Věta 34

$$\rho(f) \in \mathbb{Q} \iff f \text{ má periodický bod.}$$

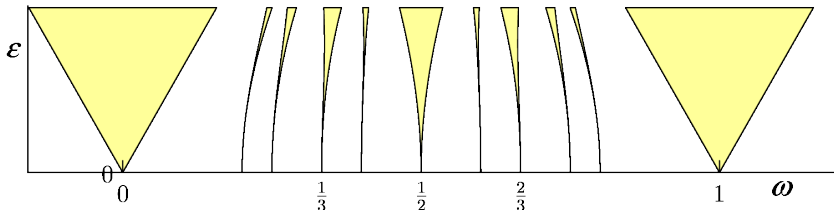
Věta 34

$$\rho(f) \in \mathbb{Q} \iff f \text{ má periodický bod.}$$

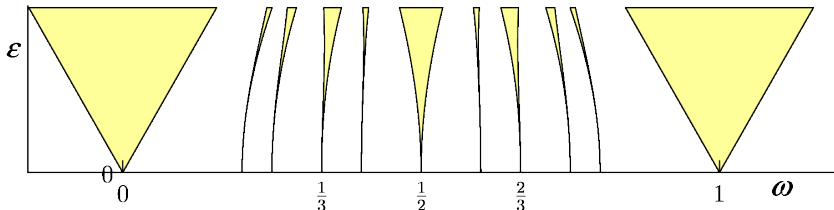
Důkaz:

Nechť $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Pak $\rho(f^{(q)}) = q\rho(f) \bmod 1 = 0$ a f má nutně pevný bod. Naopak, pokud má periodický bod s periodou q , pak v tomto bodě x platí $\rho(f^{(q)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{(qn)}(x) - x}{n} = q\rho(f) \bmod 1 = 0$, tedy $q\rho(f) \in \mathbb{Z}$.

Když tedy zkusíme pro zobrazení (32) $f: \theta \mapsto \theta + 2\pi\omega + \varepsilon \sin \theta$ popsat dynamiku pro různá ω a ε , dostáváme bifurkační diagram rozdělující parametrický prostor do oblastí, ve kterých existují cykly různých délek a které jsou zde poskládány podle Fareyho posloupnosti. Neviděli jsme to už někde? Říká se jim Arnoldovy jazyky.

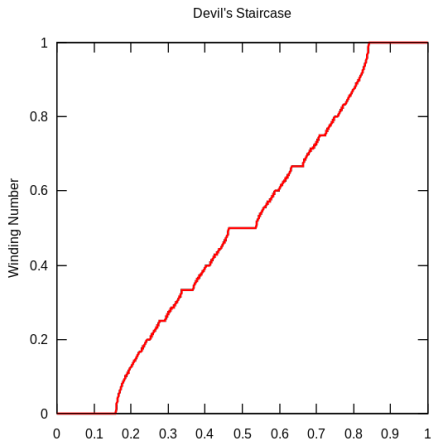


Když tedy zkusíme pro zobrazení (32) $f: \theta \mapsto \theta + 2\pi\omega + \varepsilon \sin \theta$ popsat dynamiku pro různá ω a ε , dostáváme bifurkační diagram rozdělující parametrický prostor do oblastí, ve kterých existují cykly různých délek a které jsou zde poskládány podle Fareyho posloupnosti. Neviděli jsme to už někde? Říká se jim Arnoldovy jazyky.

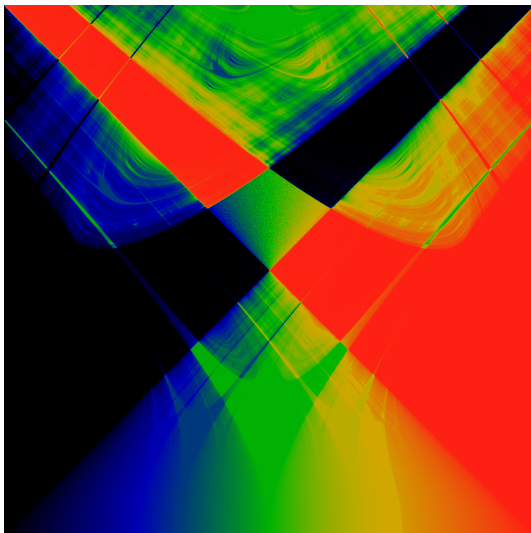


Totéž platí i pro jiné nelineární difeomorfismy kružnice blízke translaci.

Stabilní cykly existují tedy pro racionální rotační číslo v určitých intervalech. Pokud pro $\varepsilon = 1$ zakreslíme rotační číslo jako funkci ω , dostaneme tzv. **dábelské schodiště**. Je to totiž po částech konstantní funkce a fraktál – Cantorova funkce. Je skoro všude konstantní, spojitá a přesto pokrývá interval $\langle 0, 1 \rangle$:



Zde jsou mnohem lepší ilustrace jejichž autorem je prof. Linas Vepstas.



Pokud se nyní vrátíte k normální formě Neimarkovy–Sackerovy bifurkace,

$$\begin{aligned}\rho(n+1) &= \rho(n)(1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2(n)) + \rho^4(n)R(\rho(n), \alpha), \\ \varphi(n+1) &= \varphi(n) + \theta(\alpha) + \rho^2(n)Q(\rho(n), \alpha),\end{aligned}$$

vidíme, že v blízkosti kritické hodnoty této bifurkace je dynamika na vznikající invariantní smyčce systému blízka translaci o úhel $\theta(\alpha)$.

Pokud se nyní vrátíte k normální formě Neimarkovy–Sackerovy bifurkace,

$$\begin{aligned}\rho(n+1) &= \rho(n)(1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2(n)) + \rho^4(n)R(\rho(n), \alpha), \\ \varphi(n+1) &= \varphi(n) + \theta(\alpha) + \rho^2(n)Q(\rho(n), \alpha),\end{aligned}$$

vidíme, že v blízkosti kritické hodnoty této bifurkace je dynamika na vznikající invariantní smyčce systému blízka translaci o úhel $\theta(\alpha)$.

Drobná změna α tak může způsobit změnu dynamiky z kvaziperiodické na periodickou trajektorii na smyčce a naopak.

Dvouparametrické oblasti Arnoldových jazyků jsou pak oblasti vznikající na N-S křivce omezené křivkami fold bifurkace. Kontinuovaná N-S křivka v prostoru dvou parametrů (např. α, β) totiž může měnit rotační číslo vznikající smyčky.

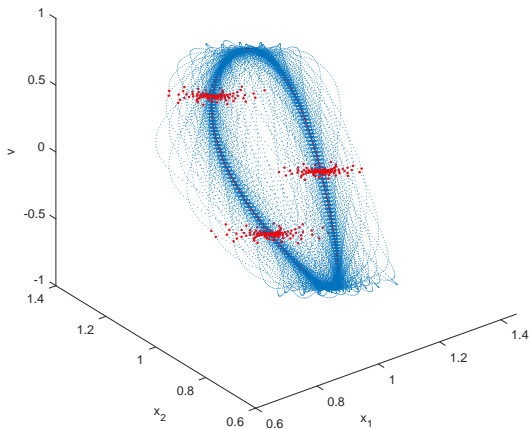
Dvouparametrické oblasti Arnoldových jazyků jsou pak oblasti vznikající na N-S křivce omezené křivkami fold bifurkace. Kontinuovaná N-S křivka v prostoru dvou parametrů (např. α, β) totiž může měnit rotační číslo vznikající smyčky.

Rotační číslo pro vznikající invariantní smyčku na N-S křivce odpovídá $\theta_0 = \theta(\alpha_0, \beta_0)$. Pro rotační číslo $\theta_0 = 2\pi p/q$ jde o q -fold bifurkaci zobrazení na rodící se invariantní smyčce a Arnoldovy jazyky jsou oblasti, kde existuje reálná varieta vzniklého q -cyklu. Hranice stability takového jazyka se jako variety fold bifurkace tohoto q -cyklu dotýkají v cusp bifurkaci (v q -fold) na varietě N-S.

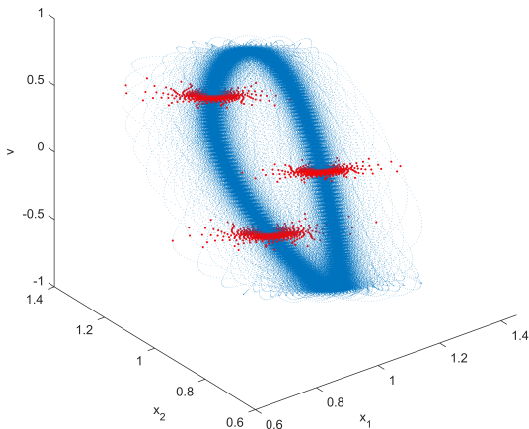
Pokud zobrazení přestane být difeomorfismem kružnice, může k tomu dojít buď změnou stupně, kdy dojde k vzniku **expandujícího zobrazení** nebo pokud zobrazení přestane zachovávat pořadí. V takovém případě vzniká **ohyb** podobný tomu u logistického zobrazení. Obojí je spojeno se vznikem topologicky odlišné a složité dynamiky až k transitivity, mixujícímu – chaotickému chování. Oba typy chování jsme si již představili dříve.

Diskrétní dynamika na kružnici není z hlediska aplikací žádnou exotikou. Stačí spojit dva oscilátory (třeba kyvadla či metronomy nebo Zemi a Měsíc) s různými frekvencemi a dostanete dynamiku na 4-rozměrném toru. Poincarého řezem pak dostaneme diskrétní dynamiku. Oblasti stability s konstantním rotačním číslem pak odpovídají synchronizaci. V aplikacích se tomuto jevu říká vázaná rotace (mode-locking). Kromě toho, že díky tomuto jevu denně koukáme na stejnou stranu Měsíce, tak jej využíváme při laserových operacích očí, nanotechnologiích, femtosekundových synchronizacích hodin nebo pro optické ukládání dat.

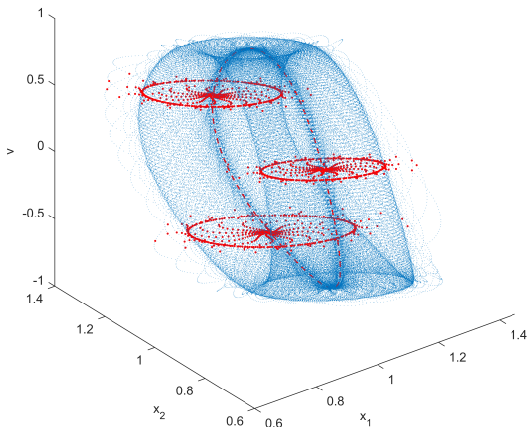
Podobně Neimarkova–Sackerova bifurkace je běžným jevem, přičemž vznik a zánik oscilací u jednoho z oscilátorů typicky vede ke vzniku toru. Ve 4D se nezobrazuje vznikající torus příliš rozumně, ale v 3D řezu je to moc pěkné (viz [bakalářská práce Jana Ševčíka](#)):



Podobně Neimarkova–Sackerova bifurkace je běžným jevem, přičemž vznik a zánik oscilací u jednoho z oscilátorů typicky vede ke vzniku toru. Ve 4D se nezobrazuje vznikající torus příliš rozumně, ale v 3D řezu je to moc pěkné (viz [bakalářská práce Jana Ševčíka](#)):



Podobně Neimarkova–Sackerova bifurkace je běžným jevem, přičemž vznik a zánik oscilací u jednoho z oscilátorů typicky vede ke vzniku toru. Ve 4D se nezobrazuje vznikající torus příliš rozumně, ale v 3D řezu je to moc pěkné (viz [bakalářská práce Jana Ševčíka](#)):



Anosovův automorfismus na toru a Arnoldova kočka

Přiblížíme si nyní diskretní dynamiku na toru. Již jsme zmínili dvě varianty porušení difeomorfismu na kružnici – expandující zobrazení a ohyb. Totéž lze pozorovat na toru. Torus dimenze n je varieta $\mathcal{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$. Vše, co bylo řečeno o zobrazení na kružnici lze tudíž aplikovat i na kartézský součin kružnic.

Anosovův automorfismus na toru a Arnoldova kočka

Přiblížíme si nyní diskretní dynamiku na toru. Již jsme zmínili dvě varianty porušení difeomorfismu na kružnici – expandující zobrazení a ohyb. Totéž lze pozorovat na toru. Torus dimenze n je varieta $\mathcal{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$. Vše, co bylo řečeno o zobrazení na kružnici lze tudíž aplikovat i na kartézský součin kružnic.

Známým zobrazením na toru, které vykazuje chaotické mixování v důsledku expanze je

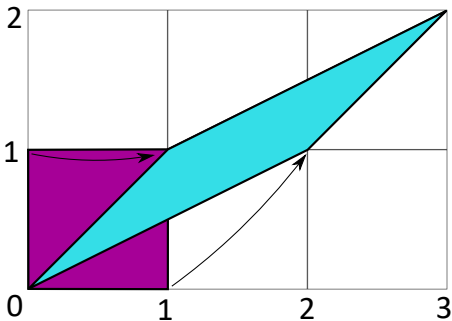
$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1} \quad (33)$$

Toto zobrazení se někdy nazývá Anosovův automorfismus na toru a někdy zobrazení Arnoldovy kočky.

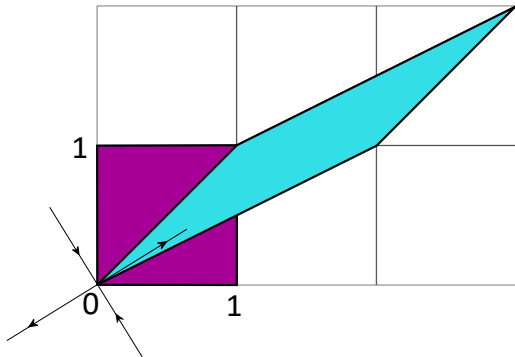
Zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

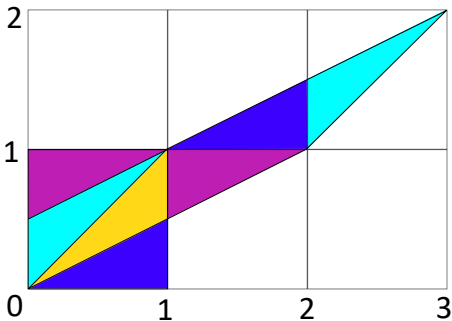
zobrazuje vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ na vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ na vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
takže se čtverec $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ zešikmí.



Při této transformaci nedojde ke změně obsahu zobrazovaného čtverce, protože $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$. Zobrazení je proto invertibilní a navíc směry, ve kterých dochází pouze k natažení či smrštění – tj. vlastní vektory – jsou na sebe kolmé. Vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, tj. $\lambda_1 > 1$ a $\lambda_2 < 1$.



Na toru $S^1 \times S^1$ toto zobrazení ale „obejde“ kružnici (i $2 \times$) a zobrazí se na torus (mod 1) takto:



To, že v jednom ze směrů „obcházíme“ $2 \times$ (existuje vlastní číslo $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$), způsobuje, že je zobrazení ve směru vlastního vektoru v_1 expandující. Protože $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, odpovídá Bernoulliho posunu.

Není těžké ukázat (domácí úloha), že body s racionálními souřadnicemi jsou právě preperiodické body (leží na periodických trajektoriích).

Není těžké ukázat (domácí úloha), že body s racionálními souřadnicemi jsou právě preperiodické body (leží na periodických trajektoriích).

Arnoldova kočka po 300 iteracích

Není těžké ukázat (domácí úloha), že body s racionálními souřadnicemi jsou právě preperiodické body (leží na periodických trajektoriích).

Arnoldova kočka po 300 iteracích

Víte proč vidíte zase kočku?

Není těžké ukázat (domácí úloha), že body s racionálními souřadnicemi jsou právě preperiodické body (leží na periodických trajektoriích).

Arnoldova kočka po 300 iteracích

Víte proč vidíte zase kočku?

Napadá vás, jak toho využít k zašifrování dat?

Druhou variantou porušení difeomorfismu na kružnici je ohyb. Na kružnici můžeme definovat např. logistické zobrazení a chaos se projeví na $\langle 0, 1 \rangle$ tak, jak ho známe. Na toru to bude podobné.

Druhou variantou porušení difeomorfismu na kružnici je ohyb. Na kružnici můžeme definovat např. logistické zobrazení a chaos se projeví na $\langle 0, 1 \rangle$ tak, jak ho známe. Na toru to bude podobné.

Ohyb spolu s dostatečným natažením totiž, jak jsme viděli už v jednorozměrném případě kvadratické diskrétní dynamiky, vede k chaosu nezávisle na tom, zda je varieta topologicky ekvivalentní s rovinou, kružnicí, torem nebo čímkoli jiným.

Hénonovo zobrazení

Astronom **Michel Hénon navrhl jednoduché zobrazení** jako zjednodušený model Poincarého řezu Lorenzovým atraktorem. Lorenzův atraktor jsme již objevovali v předmětu **PřF:M6201 Nelineární dynamika a její aplikace**.

Hénonovo zobrazení

Astronom **Michel Hénon navrhl jednoduché zobrazení** jako zjednodušený model Poincarého řezu Lorenzovým atraktorem. Lorenzův atraktor jsme již objevovali v předmětu **PřF:M6201 Nelineární dynamika a její aplikace**.

Jednou z významných vlastností **Lorenzova atraktoru** je kromě existence chaotického chování také to, že spustíme-li trajektorie z nějakého objemu v prostoru, tento objem se bude exponenciálně zmenšovat, přičemž trajektorie konvergují na atraktor. Ten má tedy **nulový objem**. Přesto se trajektorie skládají do nekonečně mnoha povrchů a má proto nekonečný povrch. Jde o fraktál.

Hénonovo zobrazení $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má obdobné vlastnosti pro vhodně zvolené parametry, konkrétně Hénon volil $a = 1.4$ a $b = 0.3$.

$$x(n+1) = 1 + y(n) - ax^2(n), \quad (34)$$

$$y(n+1) = bx(n). \quad (35)$$

Hénonovo zobrazení $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má obdobné vlastnosti pro vhodně zvolené parametry, konkrétně Hénon volil $a = 1.4$ a $b = 0.3$.

$$x(n+1) = 1 + y(n) - ax^2(n), \quad (34)$$

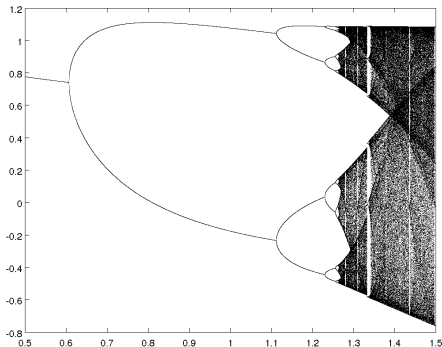
$$y(n+1) = bx(n). \quad (35)$$

Pokud oblast \mathbf{A} zobrazíme tímto zobrazením na oblast $\mathbf{A}' = h(\mathbf{A})$, pak její obsah splňuje

$$\left| \iint_{\mathbf{A}'} 1 \, dx(n+1) \, dy(n+1) \right| = \left| \iint_{\mathbf{A}} 1 \det D\mathbf{h} \, dx(n) \, dy(n) \right|,$$

kde Jacobián $\det D\mathbf{h} = \begin{pmatrix} -2ax(n) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = -b$. Pro $b \in (-1, 1)$ se tedy při každé iteraci **zmenší obsah** $b \times$.

Všimněte si, že pro $b = 0$ se zobrazení redukuje na jednorozměrné kvadratické, jehož ohyb způsobuje zdvojování periody a Šarkovského řazení cyklů. Pro malé $b \neq 0$ se tedy dá očekávat, že bifurkační diagram bude podobný. Zde volíme $b = 0.1$ a zobrazujeme samozřejmě $x(n)$ v závislosti na parametru $a \in (0.5, 1.5)$:



Úkol:



Prostudujte Hénonovo zobrazení a zobrazte si trajektorie v okolí flip bifurkace cyklů, Neimarkovy–Sackerovy bifurkace i v oblasti chaosu.

Nemusíte úplně všechno dělat sami, nechte se inspirovat.

Princip Smaleovy podkovy

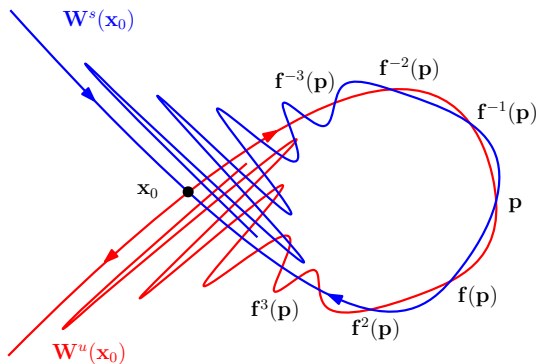
Video to vysvětlí nejlíp ...

Princip Smaleovy podkovy

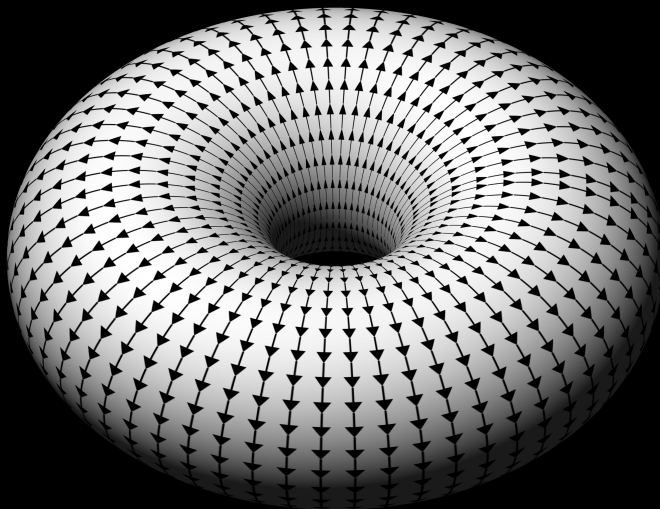
Video to vysvětlí nejlíp ...

Ve skutečnosti jsme teď viděli „přednášku“ ze symbolické dynamiky. Unimodální zobrazení (jeden ohyb, jako parabola) i Smaleova podkova (horseshoe map) jsou strukturálně stabilní – nezáleží na funkci jako takové, ale na topologii, symbolice, tvaru. Natažení, ohyb, překlopení, natažení, ohyb, překlopení – to stačí k chaosu. Pekaři to dobře vědí, mixují tak částice v těstě, je to neúčinnější metoda.

Na první pohled by se mohlo zdát, že takové chování dynamiky je výjimkou, ale opak je pravdou. Smaleova podkova vzniká vždy v blízkosti homoklinické trajektorie diskrétního hyperbolického sedla. Dokonce platí Smale–Birkhoffova věta, která zaručuje tuto dynamiku vždy, když dojde k transversálnímu průsečíku p stabilní variety $W^s(x_0)$ a nestabilní variety $W^u(x_0)$ pevného bodu x_0 .



Typické cesty k chaosu



Co se naučíme:

- Souvislosti mezi spojitými a diskrétními systémy

Co se naučíme:

- Souvislosti mezi spojitými a diskretními systémy
- Typické změny atraktorů

Co se naučíme:

- Souvislosti mezi spojitými a diskrétními systémy
- Typické změny atraktorů
- Typické cesty k chaosu

Poté, co jsme prostudovali dynamiku spojitých a diskrétních dynamických systémů a její kvalitativní změny, tj. bifurkace, měli bychom v předmětu s názvem Teorie bifurkací, chaos a fraktály, definovat chaos.

Poté, co jsme prostudovali dynamiku spojitých a diskrétních dynamických systémů a její kvalitativní změny, tj. bifurkace, měli bychom v předmětu s názvem Teorie bifurkací, chaos a fraktály, definovat chaos.

Je mi líto, definici neznám. Zatím se na ní neshodli ani jiní matematici.

Viděli jsme „divokou“ dynamiku v mnoha podobách. Většina nás zavedla do naprosto abstraktních struktur – Cantorovy množiny, rozložení racionálních čísel, komplexního prostoru a podobně. Většina matematiků se shoduje, že úzká souvislost dynamiky s teorií čísel ještě čeká na mnoho objevů.

Viděli jsme „divokou“ dynamiku v mnoha podobách. Většina nás zavedla do naprosto abstraktních struktur – Cantorovy množiny, rozložení racionálních čísel, komplexního prostoru a podobně. Většina matematiků se shoduje, že úzká souvislost dynamiky s teorií čísel ještě čeká na mnoho objevů.

Zatím ale matematici a aplikovaní matematici chaos studují a používají, přičemž se drží známých a objevených věcí – vlastností chaosu a typických cest, které k chaosu vedou. V této kapitole tak shrneme to, jaký úzus byl v této oblasti přijat. Takže nejde o matematickou kapitolu, ale spíše sociologickou studii na množině matematiků, kteří se dynamikou a jejími aplikacemi zabývali a zabývají. Shrnuje to, jaké názvosloví používají.

Vlastnosti chaosu

Základními vlastnostmi chaotických trajektorií deterministických dynamických systémů jsou

- **citlivost na počáteční podmínky**

Vlastnosti chaosu

Základními vlastnostmi chaotických trajektorií deterministických dynamických systémů jsou

- **citlivost na počáteční podmínky**
- **topologická transitivnost**

Vlastnosti chaosu

Základními vlastnostmi chaotických trajektorií deterministických dynamických systémů jsou

- **citlivost na počáteční podmínky**
- **topologická transitivnost**
- **husté periodické trajektorie**

Vlastnosti chaosu

Základními vlastnostmi chaotických trajektorií deterministických dynamických systémů jsou

- **citlivost na počáteční podmínky**
- **topologická transitivnost**
- **husté periodické trajektorie**

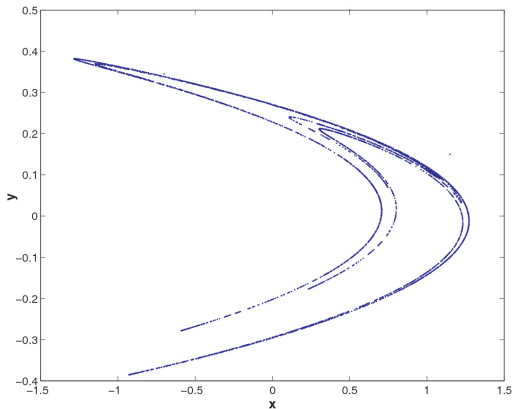
Vlastnosti chaosu

Základními vlastnostmi chaotických trajektorií deterministických dynamických systémů jsou

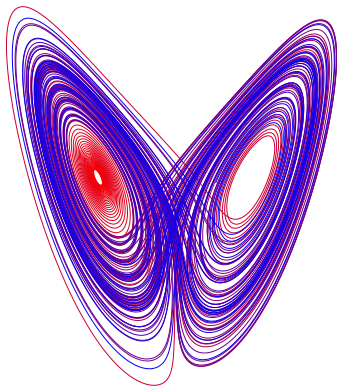
- **citlivost na počáteční podmínky**
- **topologická transitivnost**
- **husté periodické trajektorie**

Citlivost na počáteční podmínky se někdy označuje jako motýlí efekt. Další zkratkou je označení, že trajektorie má kladný **Ljapunovův exponent**. Trajektorie se od sebe ale exponenciálně vzdalují např. i v případě hyperbolického lineárního repeleru, takže chybí zmínit uzavřenost trajektorií v nějaké **omezené** pozitivně invariantní množině někdy označované jako oblast zachycení (trapping region). Další zkratkou je sousloví, že systém vykazuje neperiodické chování pro skoro všechny počáteční podmínky. To ale kvaziperiodicita také, a tu chaosem nenazýváme.

Podobně je obtížné definovat **podivný atraktor**. Většinou se pod tímto pojmem rozumí chaotický atraktor. Hénonův nebo Lorenzův atraktor jsou typické příklady diskrétního a spojitého podivného atraktoru:



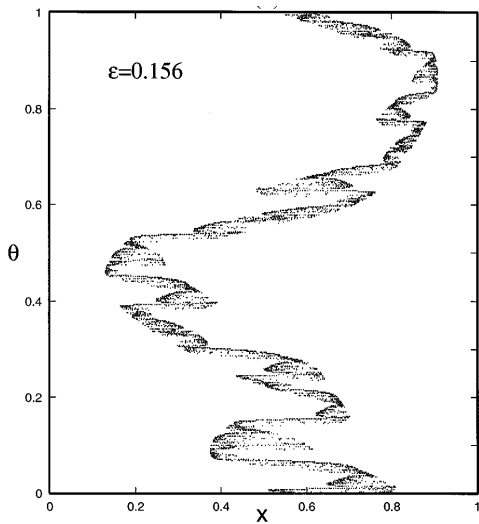
Podobně je obtížné definovat **podivný atraktor**. Většinou se pod tímto pojmem rozumí chaotický atraktor. Hénonův nebo Lorenzův atraktor jsou typické příklady diskrétního a spojitého podivného atraktoru:



Existují ale i nechaotické podivné atraktory. Jedním z nich je kvaziperiodicky buzený atraktor – např. logistické rovnice – u kterého lze sledovat i přechod od nechaotického kvaziperiodického podivného atraktoru k chaotickému. Rovnice takového systému jsou např.

$$\begin{aligned}x(n+1) &= ax(n)(1-x(n)) + \varepsilon \sin(2\pi\theta(n)) \\ \theta(n+1) &= \theta(n) + \omega \bmod 1,\end{aligned}$$

kde $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pro $\varepsilon = 0$ dostáváme logistickou rovnici, můžeme fixovat a tak, aby atraktor logistické rovnice byl stabilní cyklus. Při zvýšení $\varepsilon > 0$ dochází k buzení kvaziperiodickým signálem a objeví se podivný atraktor. Dokud není ε dost velké, případně dokud nezvedneme dostatečně a , podivný atraktor není chaotický.



Pojem atraktoru můžeme definovat různě, zde je definice Johna Milnora:

Definice 27

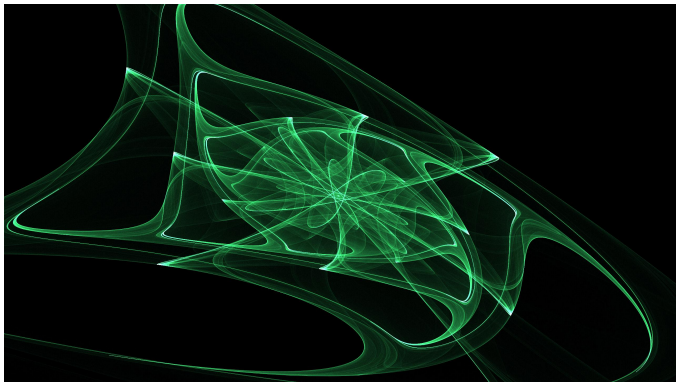
*Uvažujme hladkou varietu M a dynamický systém na této varietě. Předpokládejme, že je na M definována míra (v lokálním souřadnicovém systému ekvivalentní Lebesgueově míře). Uzavřená množina $A \subset M$ se nazývá **atraktor**, pokud oblast přitažlivosti A definovaná jako $\rho(A) \equiv \{x: x(t) \rightarrow A \text{ pro } t \rightarrow \infty\}$ má kladnou Lebesgueovu míru a neexistuje menší uzavřená $A' \subset A$ taková, že $\rho(A') = \rho(A)$ (až na množinu míry 0).*

Množinou míry nula tedy v dynamickém systému na jednorozměrné varietě rozumíme spočetnou množinu, na dvojrozměrné třeba křivku. Atraktor tedy definujeme tak, aby přitahoval skoro všechny body z uzávěru své oblasti přitažlivosti, takže jej odtud spuštěná trajektorie mine s pravděpodobností 0.

Slovo podivný se nedefinuje nijak, většinou se jím myslí to, že má atraktor fraktální strukturu. Vzhledem k tomu, jaké množství bifurkací jsme již poznali, jaké množství složitých dynamik jsme analyzovali, dá se předpokládat, že ani žádná **korektní formální definice podivného atraktoru** nikdy **nepřijde**. Co je podivné a co už ne?

Slovo podivný se nedefinuje nijak, většinou se jím myslí to, že má atraktor fraktální strukturu. Vzhledem k tomu, jaké množství bifurkací jsme již poznali, jaké množství složitých dynamik jsme analyzovali, dá se předpokládat, že ani žádná **korektní formální definice podivného atraktoru** nikdy **nepřijde**. Co je podivné a co už ne?

Ale jsou krásné, to se musí nechat...



U složitých dynamik, které jsou citlivé na počáteční podmínky, neumíme z principu predikovat jejich chování po delší dobu. To ale neznamená, že nemůžeme o dynamice a budoucím chování systému nic říct. Pro aplikace je v případě složitých dynamik vhodnější studovat pravděpodobnosti, tedy tzv. ergodické míry daného atraktoru a definovat např. horizont prediktability. Podobně je velmi vhodné znát typické cesty nejen k chaosu, ale i k nechaotickým, jednodušším atraktorům, abychom je byli schopni rozeznat a očekávat v dynamických systémech, které modelujeme, nebo naopak z jejich existence odvozovat nutné vztahy uvnitř systémů jaksí zpětně.

U složitých dynamik, které jsou citlivé na počáteční podmínky, neumíme z principu predikovat jejich chování po delší dobu. To ale neznamená, že nemůžeme o dynamice a budoucím chování systému nic říct. Pro aplikace je v případě složitých dynamik vhodnější studovat pravděpodobnosti, tedy tzv. ergodické míry daného atraktoru a definovat např. horizont prediktability. Podobně je velmi vhodné znát typické cesty nejen k chaosu, ale i k nechaotickým, jednodušším atraktorům, abychom je byli schopni rozeznat a očekávat v dynamických systémech, které modelujeme, nebo naopak z jejich existence odvozovat nutné vztahy uvnitř systémů jaksí zpětně.

Tato kapitola tedy shrne různé „pomůcky“ pro znalé modeláře. Nebudou rozhodně výčtem všech známých cest k daným dynamikám, spíš souhrnem těch typických.

Vznik, zánik a topologická změna atraktoru

Diskrétnímu případu jsme se významně věnovali v předchozích kapitolách. Ve spojitém případě jsme základní bifurkace cyklů probrali v 5. kapitole. Limitní cykly a tory ve spojitých systémech jsou ale natolik časté a aplikace natolik významné, že je třeba příslušné jevy shrnout. Aplikace jsou všudypřítomné

Vznik, zánik a topologická změna atraktoru

Diskrétnímu případu jsme se významně věnovali v předchozích kapitolách. Ve spojitém případě jsme základní bifurkace cyklů probrali v 5. kapitole. Limitní cykly a tory ve spojitých systémech jsou ale natolik časté a aplikace natolik významné, že je třeba příslušné jevy shrnout. Aplikace jsou všudypřítomné

- fyzika (astronomie, kosmologie, elektromagnetismus, optika, ...)

Vznik, zánik a topologická změna atraktoru

Diskrétnímu případu jsme se významně věnovali v předchozích kapitolách. Ve spojitém případě jsme základní bifurkace cyklů probrali v 5. kapitole. Limitní cykly a tory ve spojitých systémech jsou ale natolik časté a aplikace natolik významné, že je třeba příslušné jevy shrnout. Aplikace jsou všudypřítomné

- fyzika (astronomie, kosmologie, elektromagnetismus, optika, ...)
- geofyzika, evoluční a populační biologie, hydrologie, klimatologie

Vznik, zánik a topologická změna atraktoru

Diskrétnímu případu jsme se významně věnovali v předchozích kapitolách. Ve spojitém případě jsme základní bifurkace cyklů probrali v 5. kapitole. Limitní cykly a tory ve spojitých systémech jsou ale natolik časté a aplikace natolik významné, že je třeba příslušné jevy shrnout. Aplikace jsou všudypřítomné

- fyzika (astronomie, kosmologie, elektromagnetismus, optika, ...)
- geofyzika, evoluční a populační biologie, hydrologie, klimatologie
- neurověda (vzruchy neuronů, bursting, synchronizace neuronů)

Vznik, zánik a topologická změna atraktoru

Diskrétnímu případu jsme se významně věnovali v předchozích kapitolách. Ve spojitém případě jsme základní bifurkace cyklů probrali v 5. kapitole. Limitní cykly a tory ve spojitých systémech jsou ale natolik časté a aplikace natolik významné, že je třeba příslušné jevy shrnout. Aplikace jsou všudypřítomné

- fyzika (astronomie, kosmologie, elektromagnetismus, optika, ...)
- geofyzika, evoluční a populační biologie, hydrologie, klimatologie
- neurověda (vzruchy neuronů, bursting, synchronizace neuronů)
- biochemie (autokatalytické reakce v buňkách, zpětnovazebné systémy, genová exprese, buněčné cykly, cirkadiánní rytmy, ...)

Vznik, zánik a topologická změna atraktoru

Diskrétnímu případu jsme se významně věnovali v předchozích kapitolách. Ve spojitým případě jsme základní bifurkace cyklů probrali v 5. kapitole. Limitní cykly a tory ve spojitých systémech jsou ale natolik časté a aplikace natolik významné, že je třeba příslušné jevy shrnout. Aplikace jsou všudypřítomné

- fyzika (astronomie, kosmologie, elektromagnetismus, optika, ...)
- geofyzika, evoluční a populační biologie, hydrologie, klimatologie
- neurověda (vzruchy neuronů, bursting, synchronizace neuronů)
- biochemie (autokatalytické reakce v buňkách, zpětnovazebné systémy, genová exprese, buněčné cykly, cirkadiánní rytmy, ...)
- inženýrství (aeroelastický jev, stavitelství, ...)

Vznik, zánik a topologická změna atraktoru

Diskrétnímu případu jsme se významně věnovali v předchozích kapitolách. Ve spojitým případě jsme základní bifurkace cyklů probrali v 5. kapitole. Limitní cykly a tory ve spojitých systémech jsou ale natolik časté a aplikace natolik významné, že je třeba příslušné jevy shrnout. Aplikace jsou všudypřítomné

- fyzika (astronomie, kosmologie, elektromagnetismus, optika, ...)
- geofyzika, evoluční a populační biologie, hydrologie, klimatologie
- neurověda (vzruchy neuronů, bursting, synchronizace neuronů)
- biochemie (autokatalytické reakce v buňkách, zpětnovazebné systémy, genová exprese, buněčné cykly, cirkadiánní rytmy, ...)
- inženýrství (aeroelastický jev, stavitelství, ...)
- computer science a numerické metody

Vznik, zánik a topologická změna atraktoru

Diskrétnímu případu jsme se významně věnovali v předchozích kapitolách. Ve spojitým případě jsme základní bifurkace cyklů probrali v 5. kapitole. Limitní cykly a tory ve spojitých systémech jsou ale natolik časté a aplikace natolik významné, že je třeba příslušné jevy shrnout. Aplikace jsou všudypřítomné

- fyzika (astronomie, kosmologie, elektromagnetismus, optika, ...)
- geofyzika, evoluční a populační biologie, hydrologie, klimatologie
- neurověda (vzruchy neuronů, bursting, synchronizace neuronů)
- biochemie (autokatalytické reakce v buňkách, zpětnovazebné systémy, genová exprese, buněčné cykly, cirkadiánní rytmy, ...)
- inženýrství (aeroelastický jev, stavitelství, ...)
- computer science a numerické metody
- ekonomie a epidemiologie (endogenní cykly)

Částečně tak zopakujeme uvedené bifurkace, ale tentokrát je dáme do souvislosti s diskretní dynamikou. Poincarého řez atraktorem spojitého systému je totiž atraktorem odvozeného diskretního systému a tak diskretní dynamika, kterou jsme prostudovali a popsali v řezu reprezentuje typické změny spojitých atraktorů. V případě vzniku chaotických trajektorií se dokonce podle nich rozlišují tzv. cesty k chaosu (routes to chaos)

- flip bifurkace – zdvojování periody

Částečně tak zopakujeme uvedené bifurkace, ale tentokrát je dáme do souvislosti s diskretní dynamikou. Poincarého řez atraktorem spojitého systému je totiž atraktorem odvozeného diskretního systému a tak diskretní dynamika, kterou jsme prostudovali a popsali v řezu reprezentuje typické změny spojitých atraktorů. V případě vzniku chaotických trajektorií se dokonce podle nich rozlišují tzv. cesty k chaosu (routes to chaos)

- flip bifurkace – zdvojení periody
- Neimarkova–Sackerova bifurkace – kvaziperiodicita, vznik toru

Částečně tak zopakujeme uvedené bifurkace, ale tentokrát je dáme do souvislosti s diskretní dynamikou. Poincarého řez atraktorem spojitého systému je totiž atraktorem odvozeného diskretního systému a tak diskretní dynamika, kterou jsme prostudovali a popsali v řezu reprezentuje typické změny spojitých atraktorů. V případě vzniku chaotických trajektorií se dokonce podle nich rozlišují tzv. cesty k chaosu (routes to chaos)

- flip bifurkace – zdvojování periody
- Neimarkova–Sackerova bifurkace – kvaziperiodicita, vznik toru
- fold bifurkace 3 cyklu (n -cyklu) – intermitence

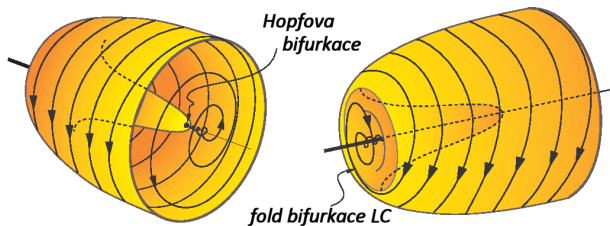
Částečně tak zopakujeme uvedené bifurkace, ale tentokrát je dáme do souvislosti s diskrétní dynamikou. Poincarého řez atraktorem spojitého systému je totiž atraktorem odvozeného diskrétního systému a tak diskrétní dynamika, kterou jsme prostudovali a popsali v řezu reprezentuje typické změny spojitých atraktorů. V případě vzniku chaotických trajektorií se dokonce podle nich rozlišují tzv. cesty k chaosu (routes to chaos)

- flip bifurkace – zdvojení periody
- Neimarkova–Sackerova bifurkace – kvaziperiodicita, vznik toru
- fold bifurkace 3 cyklu (n -cyklu) – intermitence
- Smaleova podkova – homoklinická trajektorie

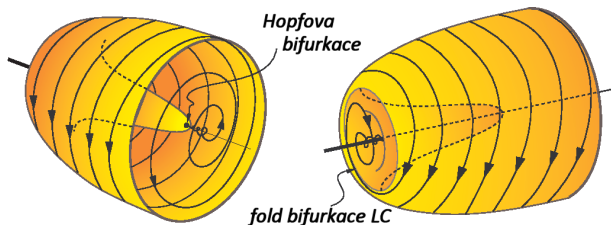
Částečně tak zopakujeme uvedené bifurkace, ale tentokrát je dáme do souvislosti s diskrétní dynamikou. Poincarého řez atraktorem spojitého systému je totiž atraktorem odvozeného diskrétního systému a tak diskrétní dynamika, kterou jsme prostudovali a popsali v řezu reprezentuje typické změny spojitých atraktorů. V případě vzniku chaotických trajektorií se dokonce podle nich rozlišují tzv. cesty k chaosu (routes to chaos)

- flip bifurkace – zdvojení periody
- Neimarkova–Sackerova bifurkace – kvaziperiodicita, vznik toru
- fold bifurkace 3 cyklu (n -cyklu) – intermitence
- Smaleova podkova – homoklinická trajektorie
- Shilnikovova bifurkace, ...

Nejčastěji je vznik cyklu spojen s Hopfovou bifurkací. V případě pozvolného nárůstu oscilací v závislosti na změně nějakého parametru jde o superkritickou Hopfovou bifurkaci a chování je pravděpodobně vratné. Pokud amplituda oscilací naroste skokově, jde o subkritickou Hopfovou bifurkaci a jev vykazuje hysterезi, lze jej tudíž zvrátit obtížněji.

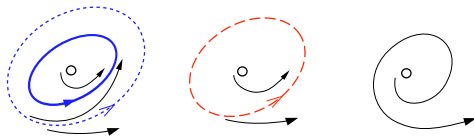


Nejčastěji je vznik cyklu spojen s Hopfovou bifurkací. V případě pozvolného nárůstu oscilací v závislosti na změně nějakého parametru jde o superkritickou Hopfovou bifurkaci a chování je pravděpodobně vratné. Pokud amplituda oscilací naroste skokově, jde o subkritickou Hopfovou bifurkaci a jev vykazuje hysterезi, lze jej tudíž zvrátit obtížněji.

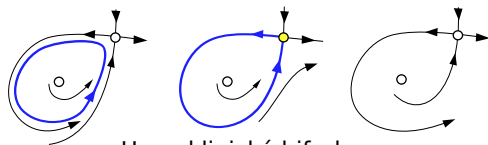


Příkladem jsou např. vzruchy neuronu (Hodgkin–Huxleyho, FitzHugh–Nagumův), aeroelastický jev, pískání, pištění brzd apod.

Skokový zánik cyklu, kterému většinou nepředchází zmenšení jeho amplitudy bývá spojen se zánikem dvou cyklů fold bifurkací nebo zánikem cyklu na separatrix sedla. Lze je rozlišit časovou nesymetrií v blízkosti sedla. Tento jev je většinou nevratný.

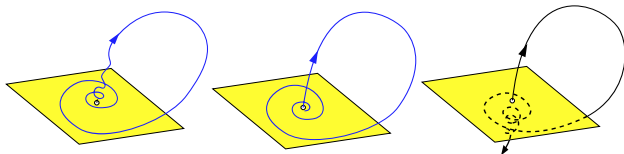


Fold bifurkace LC

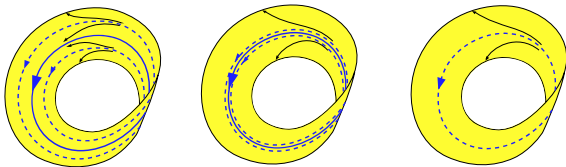


Homoklinická bifurkace

Další zániky cyklů jsou méně časté a mohou se objevit až od dimenze 3 – homoklinická trajektorie sedlo-ohniska a zánik stabilního cyklu subkritickou flip bifurkací. Tento případ je někdy v Poincarého řezu nazýván nekorektně vidličkovou bifurkací, která v případě symetrie může nastat také, šlo by ale o dva nestabilní cykly, nikoliv o jeden na varietě topologie Möbiova proužku.

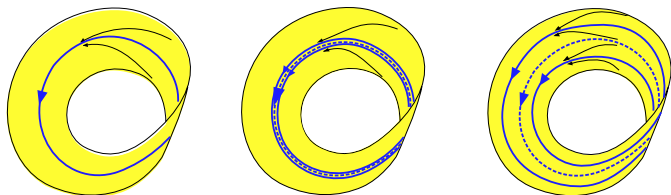


Homoklinická trajektorie ohnisko-sedla



Subkritická flip bifurkace cyklu

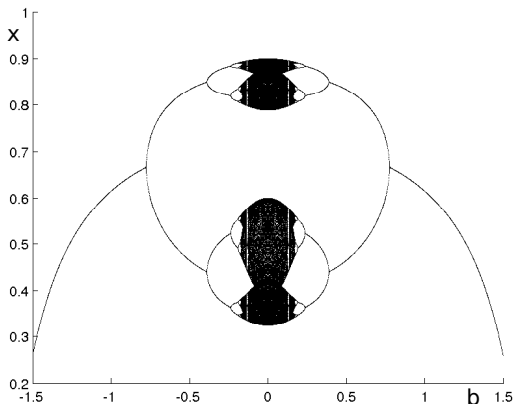
Stabilní cyklus, který se rozdvojí na varietě topologie Möbiova proužku je v Poincarého řezu flip bifurkací pevného bodu, který je jednou z cest k chaotické dynamice, která nese název **zdvojování periody** nebo subharmonická kaskáda.



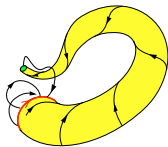
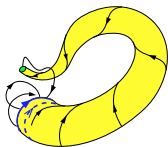
Superkritická flip bifurkace cyklu

Typickým příkladem spojitého dynamického systému s chaotickým atraktorem, který vzniká z cyklu zdvojováním periody je **Rösslerův systém**.

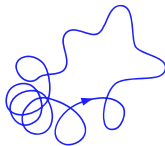
Parametry dynamického systému ale nemusí projít celou kaskádou Šarkovského řazení. Např. $x(n+1) = (3.6 - b^2)x(n)(1 - x(n))$ pro parametr $b \in (-1.5, 1.5)$ se v okolí $b = 0$ navrácí zpět k 2-cyklu a rovnováze. Tyto „bubliny“ jsou v bifurkačních diagramech docela častým jevem:



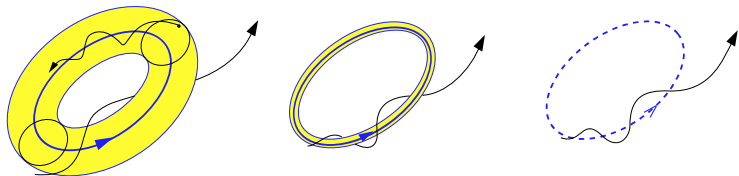
Další exotické změny jsme zmínili u bifurkací cyklů v 5. kapitole. Zánik stabilního cyklu a vznik velmi zvláštní struktury katastrofou „z čistého nebe“:



Blue-sky katastrofa

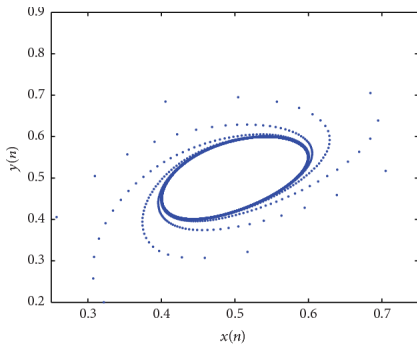
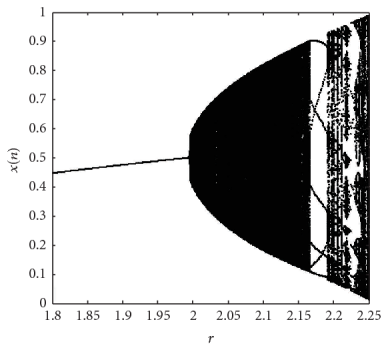


Zánik stability cyklu, v jehož okolí existuje nestabilní torus subkritickou NS bifurkací:

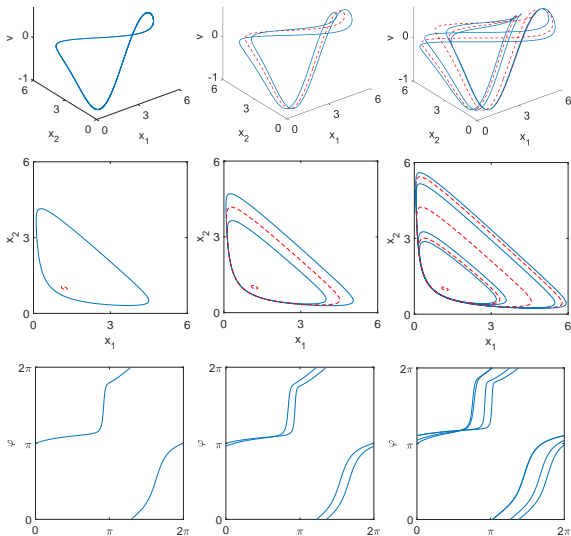


Subkritická Neimarkova-Sackerova bifurkace cyklu

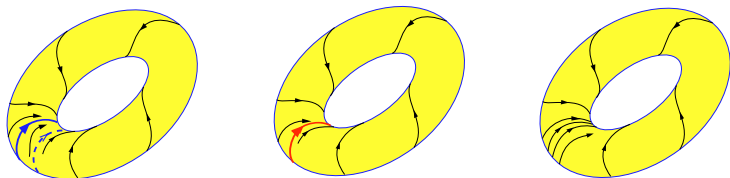
Superkritická Neimarkova–Sackerova bifurkace stabilního cyklu je naopak jednou z cest k chaosu, která může vést na podivný atraktor vznikající z toru. Stabilní varieta v okolí nestabilního cyklu je zprvu úzkým torem s kvaziperiodickou nebo periodickou trajektorií, díky existenci Arnoldových jazyků může vzniknout jak stabilní cyklus na toru, tak podivný atraktor. Bifurkační diagram Poincarého řezu torem vypadá třeba takto:



V blízkosti Neimarkovy–Sackerovy bifurkace cyklu tak můžeme na toru sledovat např. zdvojení periody cyklu (vedoucí až k chaosu):

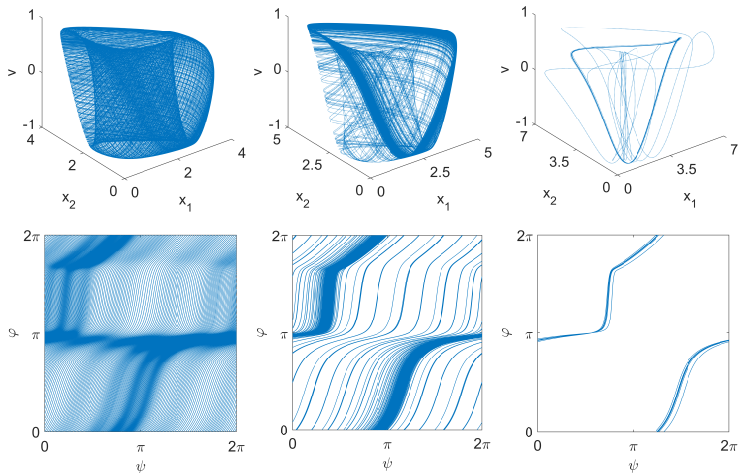


Stejně tak může na toru zaniknout stabilní cyklus splynutím s nestabilním fold bifurkací LC a vznikne torus.

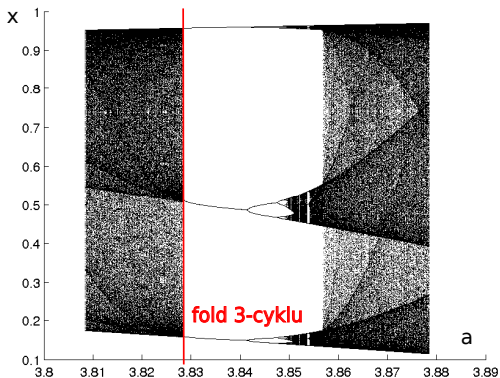


Fold bifurkace limitního cyklu na toru

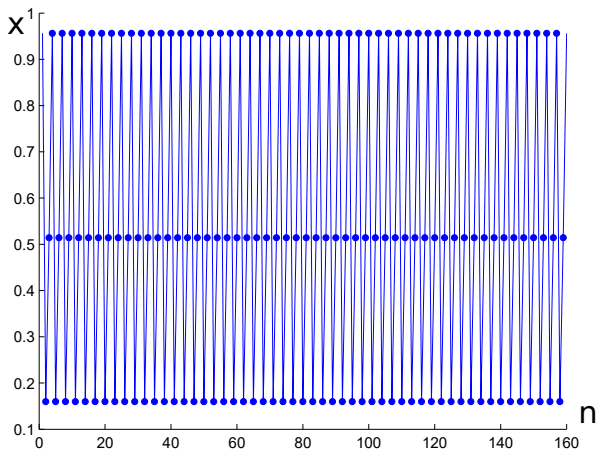
Příklad zániku toru fold bifurkací cyklu na něm:



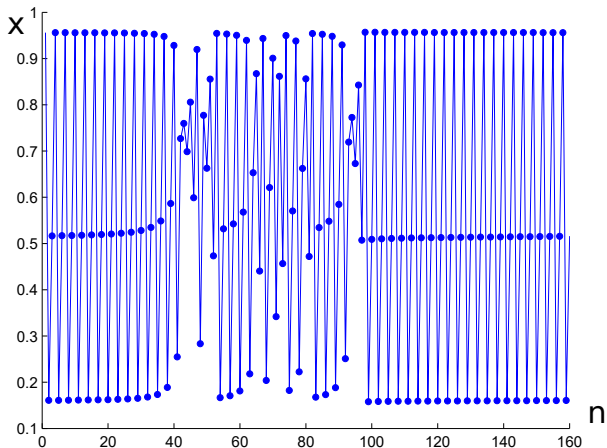
Další cestou k chaosu je fold bifurkace cyklu, jehož Poincarého řez je cyklus liché periody, nejčastěji 3 cyklus. V takovém případě se nacházíme na hranici stabilního okna a dynamika vykazuje tzv. **intermitenci** typu I, občasné přerušení oscilací chaotickým chováním. Existují intermitence typu II a III spojené s komplexním vlastním číslem a -1 .



Stabilní 3-cyklus logistického zobrazení pro $a = 1 + \sqrt{8} + 0.0001$:

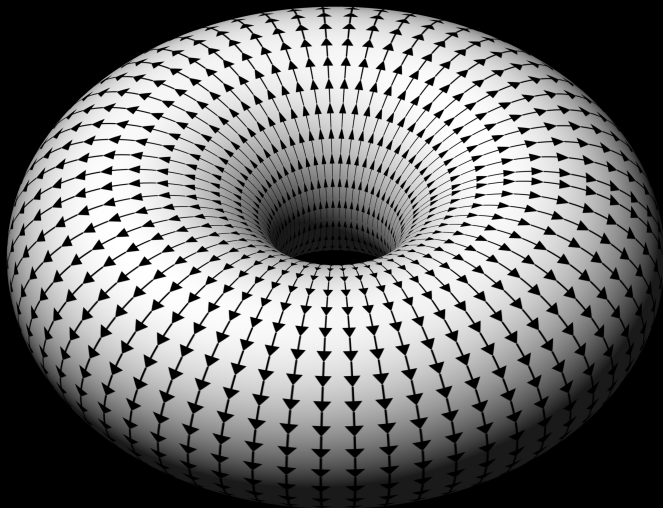


Intermitence v blízkosti nestabilního 3-cyklu logistického zobrazení
 pro $a = 1 + \sqrt{8} - 0.0001$:



Za zmínění stojí ještě výsledek autorů S.E. Newhouse, D. Ruelleho a F. Takense z roku 1976, kteří ukázali, že každé konstantní vektorové pole na toru \mathcal{T}^n , pro $n \geq 3$ je strukturálně nestabilní, jinak řečeno libovolná malá perturbace vede k jeho kolapsu na chaotický atraktor. Ve více dimenzionálním systému tedy kvaziperiodický torus v přírodě moc nepotkáte. Tento argument shodil uznávanou Landau–Hopfovou teorii o vzniku turbulencí v kapalinách, kteří předpokládali, že vzniká navyšováním počtu frekvencí.

Fraktály



Co se naučíme:

- definovat Hausdorfovou dimenzi

Co se naučíme:

- definovat Hausdorfovou dimenzi
- definovat Ljapunovy exponenty a metody jejich nalezení

Co se naučíme:

- definovat Hausdorfovou dimenzi
- definovat Ljapunovy exponenty a metody jejich nalezení
- ukážeme si metodu konstrukce fraktálu systému iterovaných funkcí (IFS)

Všimli jste si, kolikrát jsme narazili na slovo fraktál? Mnohokrát jsme využili Cantorovu množinu, Fareyho posloupnost a rozložení racionálních čísel, opakující se strukturu v Šarkovského řazení nebo v Mandelbrotově množině, Arnoldovy jazyky v blízkosti Neimarkovy–Sackerovy bifurkace, zdvojování periody, to všechno byly fraktální struktury.

Všimli jste si, kolikrát jsme narazili na slovo fraktál? Mnohokrát jsme využili Cantorovu množinu, Fareyho posloupnost a rozložení racionálních čísel, opakující se strukturu v Šarkovského řazení nebo v Mandelbrotově množině, Arnoldovy jazyky v blízkosti Neimarkovy–Sackerovy bifurkace, zdvojování periody, to všechno byly fraktální struktury.

Ani jednou jsme fraktál nedefinovali. Stejně jako chaos.

Všimli jste si, kolikrát jsme narazili na slovo fraktál? Mnohokrát jsme využili Cantorovu množinu, Fareyho posloupnost a rozložení racionálních čísel, opakující se strukturu v Šarkovského řazení nebo v Mandelbrotově množině, Arnoldovy jazyky v blízkosti Neimarkovy–Sackerovy bifurkace, zdvojování periody, to všechno byly fraktální struktury.

Ani jednou jsme fraktál nedefinovali. Stejně jako chaos.

Ani jeden pojem nemá zatím jednoznačnou definici, na které by se matematicky shodli.

Jedna z nejlepších „definic“ fraktálu je tato:

Jedna z nejlepších „definic“ fraktálu je tato:

Fraktál je soběpodobný objekt, jehož fraktální (Hausdorffova) dimenze převyšuje topologickou dimenzi.

Jedna z nejlepších „definic“ fraktálu je tato:

Fraktál je soběpodobný objekt, jehož fraktální (Hausdorffova) dimenze převyšuje topologickou dimenzi.

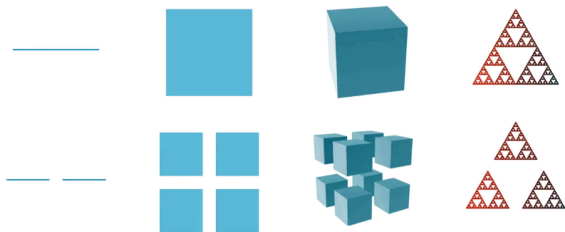
Ale i Mandelbrot, který tuto definici zavedl (mimořádně vymyslel i slovo fraktál) od ní upustil, protože je příliš úzká v obou částech. Používal nakonec něco v tom smyslu, že fraktál je tvar vytvořený z částí, které se celku nějakým způsobem podobají.

Pokud je fraktál složen z kopií sebe sama, můžeme tyto menší kopie použít k definici jeho dimenze. Změna měřítka se totiž projevuje v běžné dimenzi změnou objemu – ovšem s mocninou odpovídající dimenzi D .

Pokud je fraktál složen z kopií sebe sama, můžeme tyto menší kopie použít k definici jeho dimenze. Změna měřítka se totiž projevuje v běžné dimenzi změnou objemu – ovšem s mocninou odpovídající dimenzi D .

Vezměme např. jednotkový čtverec a čtverec o $3\times$ delší straně. Obsah zvětšeného čtverce se zvětší $3^2\times$. Číslo 2 je dimenze D prostoru, ve kterém dvojrozměrné čtverce měříme. V trojrozměrném prostoru by měla krychle o hraně délky a objem $a^D = a^3$.

Podobně se můžeme dívat i na soběpodobné objekty.



Je vidět, že 1-rozměrná úsečka se rozdělí na půl a její délka také. Čtverec při změně měřítka $1 : 2$ změní obsah v poměru $1 : 2^2$, krychle v poměru $1 : 2^3$. Sierpinského trojúhelník má tedy analogicky dimenzi D splňující

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^D, \text{ tj. } D = \log_2 3 \doteq 1.585$$

Ne všechny fraktály jsou vytvořeny z kopií sebe sama, a proto vznikly různé způsoby, jak definovat jejich dimenzi. Hausdorffova dimenze je nejjobecnější a vznikla ještě před zavedením slova fraktál.

Definice 28

Vnější Hausdorffovou d -dimensionální mírou množiny X v nějakém metrickém prostoru rozumíme

$$\mathcal{H}^d(X) = \lim_{r \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{K}(X)} \left\{ \sum_{K_i} r_i^d : \text{kde } 0 \leq r_i \leq r \text{ a } K_i \in \mathcal{K}(X) \right\},$$

tj. r_i jsou poloměry koulí K_i z pokrytí $\mathcal{K}(X)$ množiny X .

Vybíráme tedy „nejmenší“ míru (pro $d = 1$ opravdu délku) tak, že projdeme všechna pokrytí koulemi různých poloměrů až do velikosti r a toto r limitně zmenšíme až k nule.

Aby Hausdorffova míra odpovídala obsahům a objemům běžných těles, bývá ještě vynásobena číslem $\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$. Pro definici dimenze je to nepodstatné, protože ta je definována jako následující vybrané d :

Definice 29

Hausdorffovou dimensí množiny X rozumíme

$$\dim_{\mathcal{H}}(X) = \inf\{d \geq 0 : \mathcal{H}^d(X) = 0\}$$

Aby Hausdorffova míra odpovídala obsahům a objemům běžných těles, bývá ještě vynásobena číslem $\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$. Pro definici dimenze je to nepodstatné, protože ta je definována jako následující vybrané d :

Definice 29

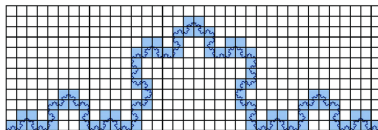
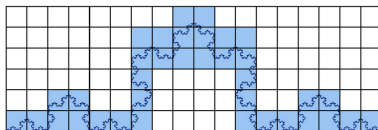
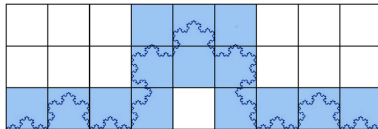
Hausdorffovou dimensí množiny X rozumíme

$$\dim_{\mathcal{H}}(X) = \inf\{d \geq 0 : \mathcal{H}^d(X) = 0\}$$

Taková definice je zcela v pořádku, ale vůbec se nehodí k výpočtům.

Místo toho se nejčastěji používá Minkowského **box-counting** dimenze, které někdy říká mřížková. Hodí se pro počítače, protože sčítá počet čtverců (krychlí), které množinu X pokrývají. Zmenšováním mřížky dělení se odhadne

$$\dim_{\text{box}}(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}.$$



Je asi na první pohled jasné, že taková definice nemusí být dobrá, protože limita nemusí existovat, proto někdy najdete místo limity \limsup , pak mluvíme o Kolmogorovově nebo horní Minkowského dimenzi. Všechny uvedené fraktální míry jsou používané – a nejsou ekvivalentní. Pro mnoho „rozumných“ množin (včetně fraktálů) dávají totéž, jako např. pro Sierpinského trojúhelník nebo Kochovu křivku. Na druhou stranu ale platí

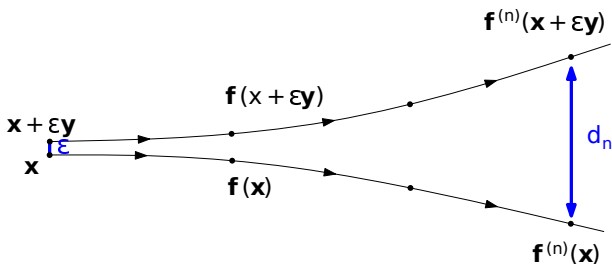
$$0 = \dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{Q}) \neq \dim_{\text{box}}(\mathbb{Q}) = 1.$$

Hausdorffova dimenze je samozřejmě z definice menší nebo rovna Minkowského dimenzi. Pro odhad Hausdorffovy dimenze atraktorů navrhli Kaplan a Yorke využití Ljapunovových exponentů, a proto se jí někdy říká **Ljapunovova dimenze**. Později se ukázalo, že je pro typické chaotické atraktory totožná s tzv. **informační dimenzi**, která je jejich přirozenou mírou.

Ljapunovovo spektrum

Na varietě X opatřené metrikou mějme diskrétní dynamický systém daný hladkým zobrazením $f: X \rightarrow X$ a nějaký bod x , ze kterého spustíme trajektorii. Míru změny infinitesimálně blízké trajektorie spuštěné z bodu posunutého od x ve směru normovaného vektoru y můžeme měřit exponentem λ , který splňuje

$$\frac{d_n}{\varepsilon} = \frac{|f^{(n)}(x + \varepsilon y) - f^{(n)}(x)|}{\varepsilon} = e^{\lambda n}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$



Definice 30

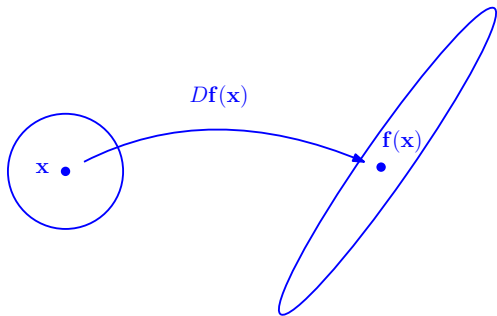
Číslo

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|Df^{(n)}(\mathbf{x})\mathbf{y}\|$$

nazýváme **Ljapunovovým exponentem** z bodu \mathbf{x} s počátečním posunutím ve směru \mathbf{y} .

Pokud x leží v oblasti přitažlivosti atraktoru, pak Oseledecova věta zaručuje existenci a nezávislost této limity na \mathbf{x} až na množinu Lebesgueovy míry 0. Toto číslo ale bude záviset na směru posunu, přičemž na m -rozměrné varietě máme m nezávislých směrů. Pokud tedy v některém směru dojde k expanzi, bude toto $\lambda > 0$. Trajektorie v oblasti přitažlivosti chaotického atraktoru tak mají maximální Ljapunovův exponent kladný.

Ljapunovovo spektrum je složené ze všech charakteristických Ljapunovových exponentů v tzv. hlavních směrech matice $Df(\mathbf{x})$. Tyto směry odpovídají expanzi, resp. kontrakci, hlavních poloos m -rozměrného elipsoidu se středem x . Lze je získat QR rozkladem $Df(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$ na ortogonální matici \mathbf{Q} a horní trojúhelníkovou \mathbf{R} . Matice \mathbf{Q} rotuje, matice \mathbf{R} natahuje nebo zkracuje dané směry.



Pokud nás zajímá, zda je atraktor chaotický, stačí vědět, že startujeme v oblasti přitažlivosti atraktoru a najít maximální Ljapunovův exponent. Pokud si uvědomíme, že

$\mathbf{H}_n = D\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x})^T \cdot D\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^{(n)T} \mathbf{R}^{(n)} \mathbf{Q}$, dostaneme mnohem pohodlnější postup pro jeho nalezení. Pootočení maticí \mathbf{Q} zase \mathbf{Q}^T navrátí a matice $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ má vlastní čísla \mathbf{R} umocněna na druhou. Můžeme tak definovat Ljapunovovo spektrum jako

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln \|\mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_n \mathbf{y}_i\|,$$

kde \mathbf{y}_i jsou vlastní vektory \mathbf{H}_n . Libovolně zvolené \mathbf{y} bude lineární kombinací vlastních vektorů a pro velké n tak tato limita bude konvergovat k maximálnímu Ljapunovovu exponentu. V prostoru kolmém k příslušnému vlastnímu vektoru pak můžeme hledat další exponent atd. (viz [Ott02]).

Seskládejme nyní Ljapunovy exponenty dle velikosti a najdeme index j takový, že $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$ a $\sum_{i=j+1}^n \lambda_i < 0$

Definice 31

Kaplanova–Yorkova dimenze atraktoru je

$$\dim_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

Kaplanova–Yorkova hypotéza říká, že takto definovaná dimenze odpovídá Hausdorffově dimenzi. Toto bylo dokázáno pro dvojrozměrné diskrétní systémy. Ukázalo se ale, že je pouze odhadem Hausdorffovy dimenze a typicky platí pro informační dimenzi, která je podobná Minkowského dimenzi, ale zahrnuje nerovnoměrnost „hustoty“ atraktoru.

Počítačové algoritmy pro výpočet fraktální dimenze mají široké využití v průmyslu (např. automatická kontrola kvality povrchu), medicíně (např. klasifikace poškození tkáně) a mnoha dalších oblastech jako součást metod rozpoznávání obrazu. Objevují se ale také aplikace na časové řady (např. finanční trhy, burzovní indexy apod.)

Počítačové algoritmy pro výpočet fraktální dimenze mají široké využití v průmyslu (např. automatická kontrola kvality povrchu), medicíně (např. klasifikace poškození tkáně) a mnoha dalších oblastech jako součást metod rozpoznávání obrazu. Objevují se ale také aplikace na časové řady (např. finanční trhy, burzovní indexy apod.)

Fraktální dimenze a Ljapunovovy exponenty slouží k rozlišení typu atraktoru. Stabilní rovnováha má dimenzi 0, cyklus dimenzi 1, m -torus dimenzi m , přičemž stabilní cyklus má nulový jediný maximální Ljapunovův exponent, m -torus má m nulových Ljapunovových exponentů. Chaotický atraktor má nutně kladný maximální Ljapunovův exponent a alespoň jeden nulový exponent.

Maximální Ljapunovův exponent je také velice důležitou hodnotou pro **horizont predikability** dynamiky na chaotickém atraktoru, protože chyba s ním roste exponenciálně. Řekněme, že jsme schopni na počátku rozlišit počáteční podmínky s chybou $\delta(0) = \delta_0$ a jsme ochotni akceptovat za čas t predikci maximálně s chybou $\delta(t) = a$, přičemž maximální Ljapunovův exponent je λ_1 , tj.

$$\delta(t) \approx \delta(0)e^{\lambda_1 t} \leq a,$$

Pak

$$t \approx \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{a}{\delta_0}$$

je maximální čas, po který zůstává nejvíce vychýlená trajektorie v této toleranci. To je základní problém, protože $\ln \frac{a}{\delta_0}$ roste velmi pomalu a takže se doba predikability velmi obtížně zvětšuje. $\frac{1}{\lambda_1}$ se nazývá **Ljapunovův čas** a je to střední doba setrvání v daném prediktabilním stavu.

Předpokládejme, že jsme schopni měřit poč. podmínky s chybou $\delta_0 = 10^{-7}$ a akceptujeme max. chybu $a = 10^{-3}$. Objevíme novou metodu měření nebo nový přístroj, který dokáže naměřit poč. podmínky s chybou milionkrát nižší, tj. $\delta_0 = 10^{-13}$. Jak zlepšíme horizont prediktability?

Předpokládejme, že jsme schopni měřit poč. podmínky s chybou $\delta_0 = 10^{-7}$ a akceptujeme max. chybu $a = 10^{-3}$. Objevíme novou metodu měření nebo nový přístroj, který dokáže naměřit poč. podmínky s chybou milionkrát nižší, tj. $\delta_0 = 10^{-13}$. Jak zlepšíme horizont prediktability?

Původní horizont byl $t_1 = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-7}} = \frac{1}{\lambda_1} \ln 10^4 = 4 \frac{1}{\lambda_1} \ln 10$ a nový horizont bude $t_2 = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-13}} = \frac{1}{\lambda_1} \ln 10^{10} = 10 \frac{1}{\lambda_1} \ln 10$. Protože pracujeme s exponenty, původní horizont t_1 je jen $2.5 \times$ menší než nový t_2 .

Předpokládejme, že jsme schopni měřit poč. podmínky s chybou $\delta_0 = 10^{-7}$ a akceptujeme max. chybu $a = 10^{-3}$. Objevíme novou metodu měření nebo nový přístroj, který dokáže naměřit poč. podmínky s chybou milionkrát nižší, tj. $\delta_0 = 10^{-13}$. Jak zlepšíme horizont prediktability?

Původní horizont byl $t_1 = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-7}} = \frac{1}{\lambda_1} \ln 10^4 = 4 \frac{1}{\lambda_1} \ln 10$ a nový horizont bude $t_2 = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-13}} = \frac{1}{\lambda_1} \ln 10^{10} = 10 \frac{1}{\lambda_1} \ln 10$. Protože pracujeme s exponenty, původní horizont t_1 je jen $2.5 \times$ menší než nový t_2 .

A čím víc chceme, tím hůř to jde ...

Úkol:



Co si myslíte o dynamice Sluneční soustavy? Je stabilní nebo je to chaotický atraktor? Co se píše na webu? Taky si přečtete něco o rotaci Saturnova měsíce Hyperionu. Jaké jsou horizonty prediktability?

Systémy iterovaných funkcí - IFS Iterated Function Systems

Abychom si ukázali tuto základní metodu konstrukce fraktálů, musíme definovat Hutchinsonův operátor a IFS v metrickém prostoru X .

Definice 32

Nechť 2^X je množina všech podmnožin X a F_1, F_2, \dots, F_n kontrakce na X . Definujeme **sjednocení** F kontrakcí F_1, F_2, \dots, F_n jako Hutchinsonův operátor $F: 2^X \rightarrow 2^X$:

$$F(S) = \bigcup_{i=1}^n F_i(S)$$

pro neprázdnou kompaktní $S \in 2^X$. Systému s danými F_1, F_2, \dots, F_n se říká **systém iterovaných funkcí**.

Operátor je kontrakcí na 2^X a má proto pevný bod $S_0: S_0 = F(S_0)$. Navíc pro každou neprázdnou S platí $F^{(n)}(S) \rightarrow S_0$ pro $n \rightarrow \infty$.

Slavný Barnsleyho fraktál kapradí je tvořen lineárními zobrazeními v \mathbb{R}^2 , které algoritmus spouští s danými pravděpodobnostmi:

$$F_i: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Slavný Barnsleyho fraktál kapradí je tvořen lineárními zobrazeními v \mathbb{R}^2 , které algoritmus spouští s danými pravděpodobnostmi:

$$F_i: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ s pravděpodobností } p = 0.01$$

Slavný Barnsleyho fraktál kapradí je tvořen lineárními zobrazeními v \mathbb{R}^2 , které algoritmus spouští s danými pravděpodobnostmi:

$$F_i: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ s pravděpodobností } p = 0.01$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0.85$$

Slavný Barnsleyho fraktál kapradí je tvořen lineárními zobrazeními v \mathbb{R}^2 , které algoritmus spouští s danými pravděpodobnostmi:

$$F_i: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ s pravděpodobností } p = 0.01$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0.85$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0.07$$

Slavný Barnsleyho fraktál kapradí je tvořen lineárními zobrazeními v \mathbb{R}^2 , které algoritmus spouští s danými pravděpodobnostmi:

$$F_i: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ s pravděpodobností } p = 0.01$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0.85$$

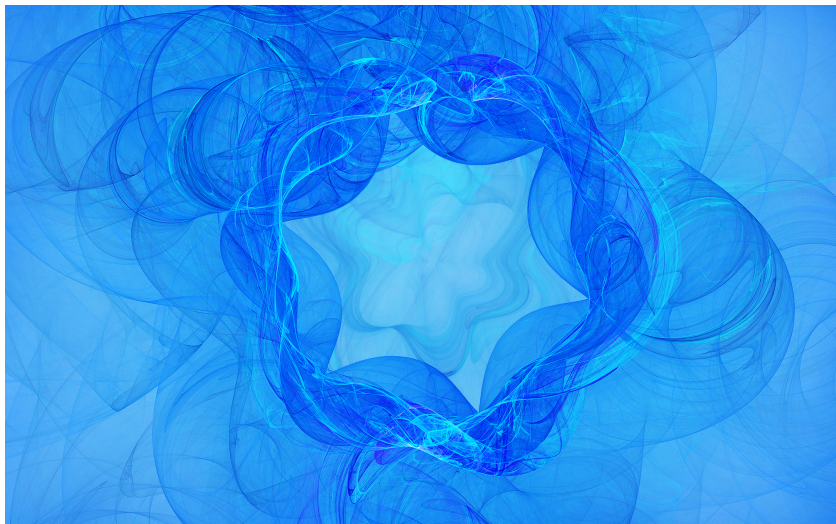
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0.07$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix} \text{ s prstí } p = 0.07$$

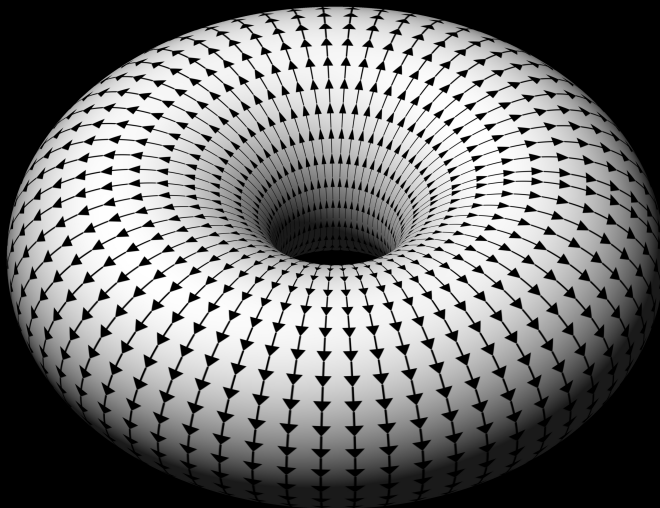
Barnsleyho kapradí:



A nelineární jsou ještě lepší – najdete je pod heslem **fractal flames**.



Lorenzův atraktor



Co se naučíme:

- zopakujeme znalosti o Lorenzově systému

Co se naučíme:

- zopakujeme znalosti o Lorenzově systému
- dokážeme zmenšování objemu v systému

Co se naučíme:

- zopakujeme znalosti o Lorenzově systému
- dokážeme zmenšování objemu v systému
- naučíme se používat Ljapunovskou funkci

Co se naučíme:

- zopakujeme znalosti o Lorenzově systému
- dokážeme zmenšování objemu v systému
- naučíme se používat Ljapunovskou funkci
- prozkoumáme, které cesty k chaosu tu jsou

Lorenzův model

Byl by hřích, kdybychom v tomto předmětu minuli slavný **Lorenzův model**. Lorenzův chaotický atraktor je téměř synonymem chaosu a pozná jej snad každý. Zjednodušený model pohybu atmosféry uveřejnil v roce 1963 Edward Lorenz. Rovnice jsou tři:

$$\dot{x} = -\sigma(x - y) \quad (36)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz \quad (37)$$

$$\dot{z} = -bz + xy \quad (38)$$

Lorenzův model

Byl by hřích, kdybychom v tomto předmětu minuli slavný **Lorenzův model**. Lorenzův chaotický atraktor je téměř synonymem chaosu a pozná jej snad každý. Zjednodušený model pohybu atmosféry uveřejnil v roce 1963 Edward Lorenz. Rovnice jsou tři:

$$\dot{x} = -\sigma(x - y) \quad (36)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz \quad (37)$$

$$\dot{z} = -bz + xy \quad (38)$$

- $x(t)$: rychlost rotace konvekčního proudění
- $y(t)$: rozdíl teplot spodní a horní vrstvy
- $z(t)$: odchylka teploty od její střední hodnoty

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned}$$

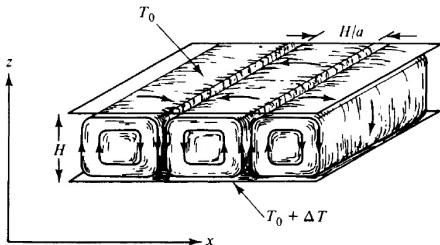
Parametry jsou

- $\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$: Prandtlovo číslo (kinematická viskozita/součinitel tepl. vodivosti),
- $r = \frac{R}{R_c} \sim$ **Rayleigho číslo**,
- $b = \frac{4}{(1+a^2)} \sim$ šířka / délka konvekční buňky

Rovnice popisující proudění vznikající vedením tepla si uvádět nebudeme (jde o parciální diferenciální rovnice). Anglický fyzik John William Strutt, 3. baron Rayleigh ukázal, že pokud

$$R \equiv \frac{g\alpha H^3 \Delta T}{\nu\kappa} > R_c \equiv \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2},$$

vznikají periodická řešení těchto PDR. Číslo R se proto nazývá Rayleighovo číslo. Jak se zvyšuje rozdíl teplot povrchů ΔT , vedení tepla se stává nestabilní a vzniká cirkulace kapaliny. Můžete ho sledovat v hrnku horké kávy jako **tmavé skvrny...**



Model (38) potvrzuje Rayleighovy výsledky o vzniku konvekčního proudění a ukazuje vznik turbulencí.

Model (38) potvrzuje Rayleighovy výsledky o vzniku konvekčního proudění a ukazuje vznik turbulencí.

Pro $r < 1$ má systém jedinou stabilní rovnováhu, která fyzikálně odpovídá systému bez proudění (vyrovnání teplot) a $r = 1$ je bod symetrického větvení. Převedením na centrální varietu v okolí počátku a $r = 1$ **jsme již ukázali**, že jde o bod generické vidličkové bifurkace.

Model (38) potvrzuje Rayleighovy výsledky o vzniku konvekčního proudění a ukazuje vznik turbulencí.

Pro $r < 1$ má systém jedinou stabilní rovnováhu, která fyzikálně odpovídá systému bez proudění (vyrovnání teplot) a $r = 1$ je bod symetrického větvení. Převedením na centrální varietu v okolí počátku a $r = 1$ **jsme již ukázali**, že jde o bod generické vidličkové bifurkace.

Pokud zvyšujeme rozdíl teplot dál, vznikají turbulence – chaotický atraktor.

Disipativita Lorenzova systému

Než si ukážeme, jak dochází v tomto modelu k chaotické dynamice, dokážeme dvě základní vlastnosti, které tento systém má: disipativitu neboli kontrakci objemu a existenci globální pozitivně invariantní množiny.

Disipativita Lorenzova systému

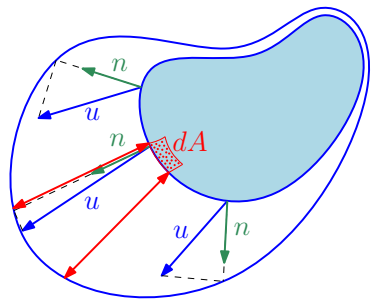
Než si ukážeme, jak dochází v tomto modelu k chaotické dynamice, dokážeme dvě základní vlastnosti, které tento systém má: disipativitu neboli kontrakci objemu a existenci globální pozitivně invariantní množiny.

Disipativitou dynamického systému se rozumí vlastnost, kdy kompaktní množina o objemu $V(t)$ ve fázovém prostoru s časem zmenšuje svůj objem. Mluvíme proto o kontrakci objemu. Takové systémy jsou v přírodě běžné. Např. tlumené oscilace kyvadla v reálném prostředí s třením. Naopak **konzervativní systémy** zachovávají (konzervují) objem. Příkladem může být ideální kyvadlo ve vakuu – bez tření.

Jaká je v případě Lorenzova modelu změna objemu?

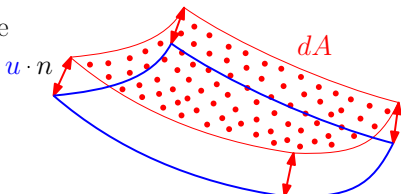
Jaká je v případě Lorenzova modelu změna objemu?

Představme si nějakou kompaktní množinu ve fázovém prostoru Lorenzova modelu. Spustíme trajektorie z této množiny a podíváme se, jak se za čas Δt změní její objem. Označíme pro jednoduchost $\mathbf{u} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$.



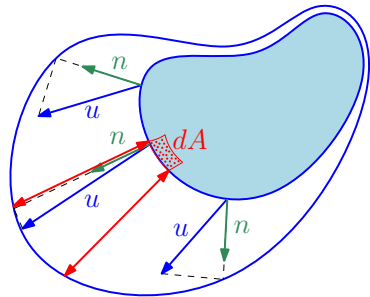
kolmý průmět vektoru \mathbf{u}
na jednotkový normálový \mathbf{n}

je



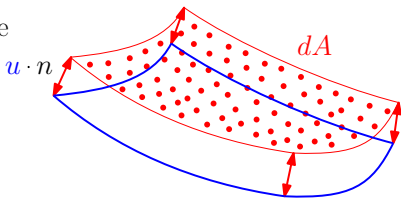
Jaká je v případě Lorenzova modelu změna objemu?

Představme si nějakou kompaktní množinu ve fázovém prostoru Lorenzova modelu. Spustíme trajektorie z této množiny a podíváme se, jak se za čas Δt změní její objem. Označíme pro jednoduchost $\mathbf{u} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$.



kolmý průmět vektoru \mathbf{u}
na jednotkový normálový \mathbf{n}

je



$$V(t + \Delta t) = V(t) + \Delta t \iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Infinitesimální změna objemu je tedy

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \dot{V}(t) = \iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Podle **Gaussovy věty**

$$\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV$$

Infinitesimální změna objemu je tedy

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \dot{V}(t) = \iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Podle **Gaussovy věty**

$$\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV$$

Je to totéž, jako bychom „sečetli“ v každém bodě naší množiny divergenci vektorového pole. Od toho se taky divergence jmenuje divergence – je to míra toho, jak moc trajektorie divergují od daného bodu.

Infinitesimální změna objemu je tedy

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \dot{V}(t) = \iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Podle **Gaussovy věty**

$$\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV$$

Je to totéž, jako bychom „sečetli“ v každém bodě naší množiny divergenci vektorového pole. Od toho se taky divergence jmenuje divergence – je to míra toho, jak moc trajektorie divergují od daného bodu.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + 1 + b) < 0$$

Infinitesimální změna objemu je tedy

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \dot{V}(t) = \iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Podle **Gaussovy věty**

$$\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV$$

Je to totéž, jako bychom „sečetli“ v každém bodě naší množiny divergenci vektorového pole. Od toho se taky divergence jmenuje divergence – je to míra toho, jak moc trajektorie divergují od daného bodu.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + 1 + b) < 0$$

$$\dot{V}(t) = -(\sigma + 1 + b)V(t) \quad \Rightarrow \quad V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$$

Nejenže je Lorenzův systém disipativní. Každá množina se **zmenšuje exponenciálně rychle**.

Ljapunovská funkce Lorenzova systému

Druhou vlastností je existence pozitivně invariantní množiny M , která atraktor obsahuje. Na jednoduchém příkladě si ukážeme, jak se taková množina může nalézt. Používá se k tomu Ljapunovská funkce.

Definice 33

Nechť (2) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ má rovnovážný bod $\mathbf{0}$. $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je **Ljapunovská funkce**, pokud je definovaná v okolí $\mathbf{0}$, je pozitivně definitní, tj. $L(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ a $L(\mathbf{0}) = 0$, má spojité parciální derivace a klesá podél vektorového pole dynamického systému, tj.

$$\dot{L}(\mathbf{x}(t)) = \nabla L \cdot \dot{\mathbf{x}} = \nabla L \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

je negativně definitní ve vhodně zvolené množině.

Věta 35

Pokud je L Ljapunovská funkce a $\dot{L}(\mathbf{x}(t))$ je negativně definitní v celém X , pak je počátek globálně atrahující.

Věta 35

Pokud je L Ljapunovská funkce a $\dot{L}(\mathbf{x}(t))$ je negativně definitní v celém \mathbf{X} , pak je počátek globálně atrahující.

Uvažujme systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -2y\end{aligned}$$

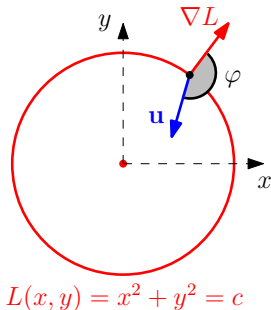
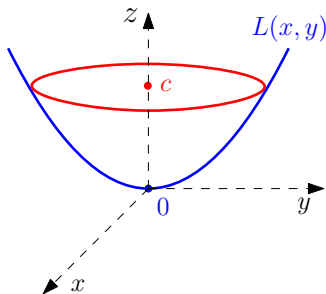
a funkci $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem $L(x, y) = x^2 + y^2$. Pak

$$\dot{L}(x(t), y(t)) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2x^2 - 4y^2 < 0.$$

Počátek je tedy globálně atrahující.

Geometricky jde o velmi jednoduchou úvahu. Označíme-li vektorové pole dynamického systému $\mathbf{u} = (\dot{x}, \dot{y}) = (-x, -2y)$ a vrstevnici $L(x, y) = c$, což je kružnice s vnějším normálovým vektorem $\nabla L(x, y) = (2x, 2y)$, pak pro každou vrstevnici ($c \neq 0$) je úhel mezi vnější normálou a směrem trajektorie tupý, takže trajektorie vstupují do kružnic.

$$\nabla L \cdot \mathbf{u} = |\nabla L| |\mathbf{u}| \cos \varphi < 0$$



Nyní použijeme velmi podobnou úvahu pro Lorenzův systém (38), ale uvažovat budeme Ljapunovskou funkci

$$L(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2.$$

Její vrstevnice jsou elipsoidy se středem $[0, 0, 2r]$. Ukážeme, že od jistého $R > 0$ elipsoid $L(x, y, z) \leq R$ globálně atrahuje trajektorie systému.

Nyní použijeme velmi podobnou úvahu pro Lorenzův systém (38), ale uvažovat budeme Ljapunovskou funkci

$$L(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2.$$

Její vrstevnice jsou elipsoidy se středem $[0, 0, 2r]$. Ukážeme, že od jistého $R > 0$ elipsoid $L(x, y, z) \leq R$ globálně atrahuje trajektorie systému.

Platí

$$\dot{L}(x, y, z) = 2rx\dot{x} + 2\sigma y\dot{y} + 2\sigma(z - 2r)\dot{z},$$

Nyní použijeme velmi podobnou úvahu pro Lorenzův systém (38), ale uvažovat budeme Ljapunovskou funkci

$$L(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2.$$

Její vrstevnice jsou elipsoidy se středem $[0, 0, 2r]$. Ukážeme, že od jistého $R > 0$ elipsoid $L(x, y, z) \leq R$ globálně atrahuje trajektorie systému.

Platí

$$\dot{L}(x, y, z) = 2rx\dot{x} + 2\sigma y\dot{y} + 2\sigma(z - 2r)\dot{z},$$

$$\dot{L}(x, y, z) = 2rx(y - x) + 2\sigma y(rx - y - xz) + 2\sigma(z - 2r)(xy - bz)$$

Nyní použijeme velmi podobnou úvahu pro Lorenzův systém (38), ale uvažovat budeme Ljapunovskou funkci

$$L(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2.$$

Její vrstevnice jsou elipsoidy se středem $[0, 0, 2r]$. Ukážeme, že od jistého $R > 0$ elipsoid $L(x, y, z) \leq R$ globálně atrahuje trajektorie systému.

Platí

$$\dot{L}(x, y, z) = 2rx\dot{x} + 2\sigma y\dot{y} + 2\sigma(z - 2r)\dot{z},$$

$$\dot{L}(x, y, z) = 2rx(y - x) + 2\sigma y(rx - y - xz) + 2\sigma(z - 2r)(xy - bz)$$

Po úpravě dostaneme

$$\dot{L}(x, y, z) = -2\sigma(rx^2 + y^2 + b(z - r)^2) + 2\sigma br^2,$$

takže v \mathbb{R}^3 je \dot{L} shora omezená a nezáporná je jen na kompaktní množině D .

Pokud označíme

$$R = \max_D L(x, y, z),$$

pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ bude na elipsoidu $L(x, y, z) = R + \varepsilon$ platit $\dot{L}(x, y, z) < 0$ a tím jsme našli pozitivně invariantní $L(x, y, z) \leq R$.

Pokud označíme

$$R = \max_D L(x, y, z),$$

pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ bude na elipsoidu $L(x, y, z) = R + \varepsilon$ platit $\dot{L}(x, y, z) < 0$ a tím jsme našli pozitivně invariantní $L(x, y, z) \leq R$.

Lze ukázat, že

$$R = \begin{cases} br^2 & \text{pro } r \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}\sigma^2} \\ \frac{27}{16}br^4\sigma^2 & \text{pro } r > \frac{1}{\sqrt[3]{3}\sigma^2} \end{cases}$$

Cesta k chaosu v Lorenzově systému

Nejprve tedy vidličkovou bifurkací při přechodu přes $r = 1$ (zvýšením rozdílu teplot horního a dolního povrchu ΔT) dochází v systému ke vzniku dvou symetrických rovnováh $[\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1]$, přičemž stabilní počátek odpovídající stacionárnímu stavu bez rotace se stane nestabilním sedlem. Toto sedlo má vždy pro $r > 1$ jednorozměrnou nestabilní a dvojrozměrnou stabilní varietu, což lze lehce ověřit, protože Jacobiho matice v počátku

$$Df(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

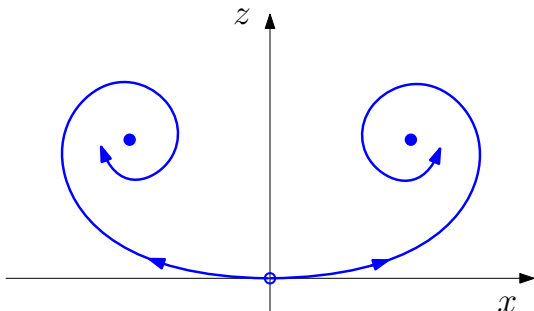
má vlastní číslo $-b < 0$ a dvě další vlastní čísla λ_1 a λ_2 splňují

$$\lambda_1 \lambda_2 = \sigma(1-r) < 0.$$

Ukázali jsme si, že nestabilní separatrix počátku (stejně tak jako ostatní trajektorie) jsou uzavřeny v pozitivně invariantní množině a musí zůstat v jistém okolí počátku.

Ukázali jsme si, že nestabilní separatrix počátku (stejně tak jako ostatní trajektorie) jsou uzavřeny v pozitivně invariantní množině a musí zůstat v jistém okolí počátku.

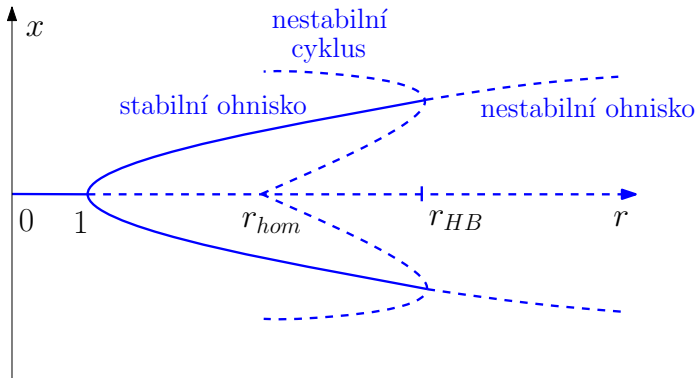
Pro $r < 1$ jediný stabilní počátek atrahuje všechny trajektorie v \mathbb{R}^3 , pro $r > 1$ vidličkovou bifurkací vzniklé stabilní rovnováhy (ohniska) vytvoří své oblasti přitažlivosti a obě nestabilní separatrix počátku náleží každá jedné z oblastí přitažlivosti nově vzniklých rovnováh.



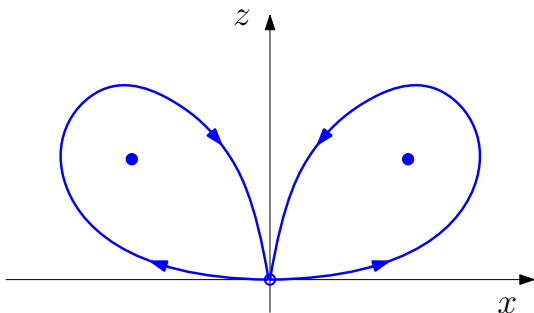
Stabilní ohniska ovšem pro $\sigma > b + 1$ a parametr

$$r_{HB} = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

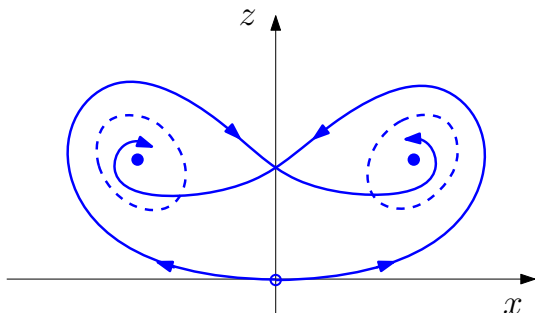
svou stabilitu ztratí subkritickou Hopfovou bifurkací. Lorenz používal hodnoty $\sigma = 10$ a $b = 8/3$, pro ně pak bifurkační diagram vypadá nějak takto:



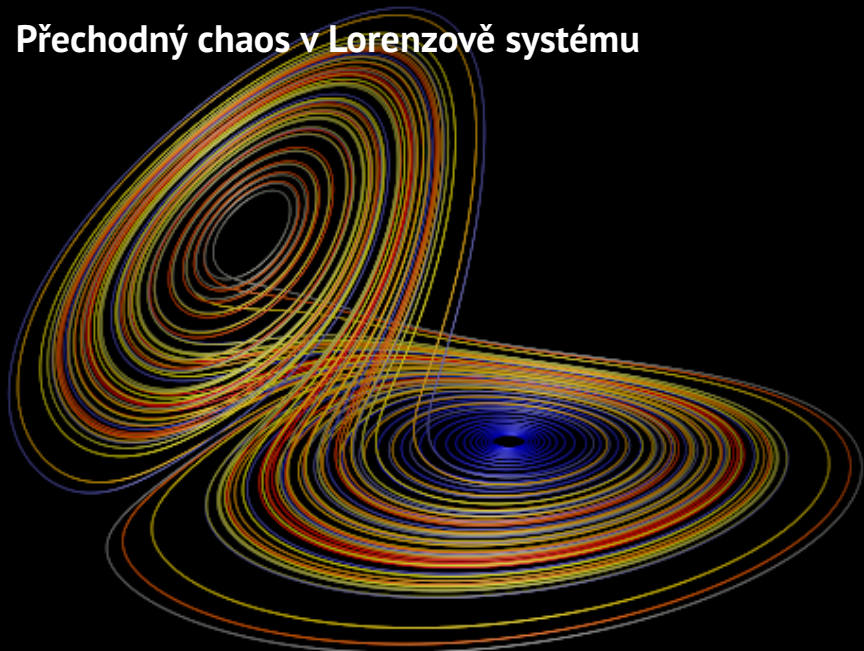
Všimněte si, že subkritická bifurkace znamená, že v okolí stabilního ohniska existuje nestabilní cyklus. Vzhledem k symetrii systému existuje r_{hom} , ve kterém se oba cykly najednou rozpadnou na separatrix sedla – počátku.



Pokud budeme sledovat oblast parametrů, kde $r_{hom} < r < r_{HB}$ (pro standardní parametry asi $13,9 < r < 24,7$), zde existuje dvojí chování. V okamžiku, kdy oblast přitažlivosti zachytí trajektorii v blízkosti stabilního ohniska, je dynamika predikovatelná, odpovídá tlumeným oscilacím. Mimo tuto oblast se trajektorie přechodně chová chaoticky. Mluvíme o přechodném chaosu – transient chaos. Připomíná to preperiodické body Bernoulliho posunu, racionální čísla s velmi vysokým jmenovatelem v základním tvaru.

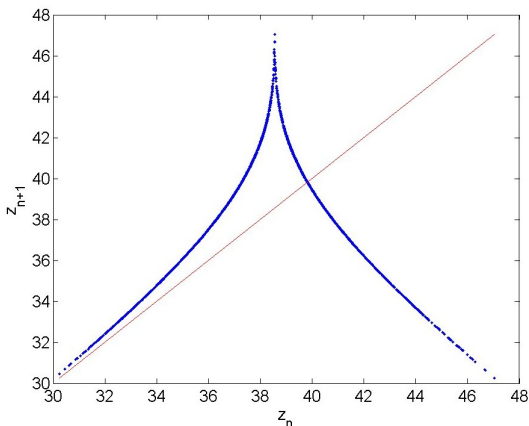


Přechodný chaos v Lorenzově systému



Úplný chaos vzniká v okamžiku zániku stabilních ohnisek pro $r = r_{HB}$. Trajektorie jsou „polapeny“ v oblasti přitažlivosti podivného atraktoru a protože rovnováhy nejsou stabilní a cykly zmizely, střídají křídla atraktoru. Ale jaký typ chaosu tu je?

Úplný chaos vzniká v okamžiku zániku stabilních ohnisek pro $r = r_{HB}$. Trajektorie jsou „polapeny“ v oblasti přitažlivosti podivného atraktoru a protože rovnováhy nejsou stabilní a cykly zmizely, střídají křídla atraktoru. Ale jaký typ chaosu tu je? To prozkoumáme na Poincarého řezu atraktorem v oblasti úplného chaosu:



Vzhedem k tomu, co již víme o jednodimenzionálních zobrazeních, tvar stanu (ač není jednodimenzionální) nás okamžitě směřuje ke zdvojování periody. Jde ovšem o zdvojování periody cyklu, takže vznikají Möbiovy proužky a proužky z proužků atd. V blízkosti fold bifurkace cyklu (např. 3-cyklu Poincarého zobrazení) vzniká samozřejmě intermitence. To všechno si osaháme na cvičení.

Vzhledem k tomu, co již víme o jednodimenzionálních zobrazeních, tvar stanu (ač není jednodimenzionální) nás okamžitě směřuje ke zdvojování periody. Jde ovšem o zdvojování periody cyklu, takže vznikají Möbiovy proužky a proužky z proužků atd. V blízkosti fold bifurkace cyklu (např. 3-cyklu Poincarého zobrazení) vzniká samozřejmě intermitence. To všechno si osaháme na cvičení.

Pro velká r Lorenzův atraktor kolabuje do stabilního cyklu, přičemž stabilní okna jsou pro $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ např. $r \in (99.534, 100.795)$, $r \in (145.96, 166.07)$ nebo $r \in (214.364, \infty)$. Některé cykly jsou uzly, což není překvapivé.

Vzhedem k tomu, co již víme o jednodimenzionálních zobrazeních, tvar stanu (ač není jednodimenzionální) nás okamžitě směřuje ke zdvojování periody. Jde ovšem o zdvojování periody cyklu, takže vznikají Möbiovy proužky a proužky z proužků atd. V blízkosti fold bifurkace cyklu (např. 3-cyklu Poincarého zobrazení) vzniká samozřejmě intermitence. To všechno si osaháme na cvičení.

Pro velká r Lorenzův atraktor kolabuje do stabilního cyklu, přičemž stabilní okna jsou pro $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ např. $r \in (99.534, 100.795)$, $r \in (145.96, 166.07)$ nebo $r \in (214.364, \infty)$. Některé cykly jsou uzly, což není překvapivé.

Najdete zde samozřejmě mnoho cest k chaosu - intermitenci, homoklinickou trajektorii, zdvojování periody To, že zde dochází k ohybu a střídání „křídel“ umožňuje vysvětlit také tvar **centrální variety triviální rovnováhy**.

Fraktální dimenze a Ljapunovovo spektrum

Z definice musí platit, že Ljapunovovo spektrum Lorenzova atraktoru splňuje

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(\sigma + 1 + b) < 0,$$

takže na chaotickém atraktoru musí být $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ a $\lambda_3 = -(\sigma + 1 + b) - \lambda_1$.

Fraktální dimenze a Ljapunovovo spektrum

Z definice musí platit, že Ljapunovovo spektrum Lorenzova atraktoru splňuje

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(\sigma + 1 + b) < 0,$$

takže na chaotickém atraktoru musí být $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ a $\lambda_3 = -(\sigma + 1 + b) - \lambda_1$.

Kaplanova–Yorkova dimenze chaotického Lorenzova atraktoru (L) je pak dána vztahem

$$\dim_{KY}(L) = 2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \sigma + 1 + b} > 2.$$

Fraktální dimenze a Ljapunovovo spektrum

Z definice musí platit, že Ljapunovovo spektrum Lorenzova atraktoru splňuje

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(\sigma + 1 + b) < 0,$$

takže na chaotickém atraktoru musí být $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ a $\lambda_3 = -(\sigma + 1 + b) - \lambda_1$.

Kaplanova–Yorkova dimenze chaotického Lorenzova atraktoru (L) je pak dána vztahem

$$\dim_{KY}(L) = 2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \sigma + 1 + b} > 2.$$

Pro standardní parametry $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ a $r = 28$ je numericky vypočtená hodnota maximálního Ljapunovova exponentu $\lambda_1 = 0.9056$, tedy $\dim_{KY} \doteq 2.062$. Hausdorfova dimenze pro standardní parametry je odhadována numericky na 2.06 ± 0.01 .

V roce 2016 Genadij A. Leonov s kolegy našli analytický přístup založený na Ljapunovských funkcích a v [LKKK16] publikovali exaktní vzorec pro kvalitní horní odhad Kaplanovy–Yorkovy dimenze chaotického Lorenzova atraktoru na široké množině parametrů, včetně standardních, tvaru:

$$\dim_{KY}(L) = 3 - \frac{2\sigma + 2b + 2}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r}}$$

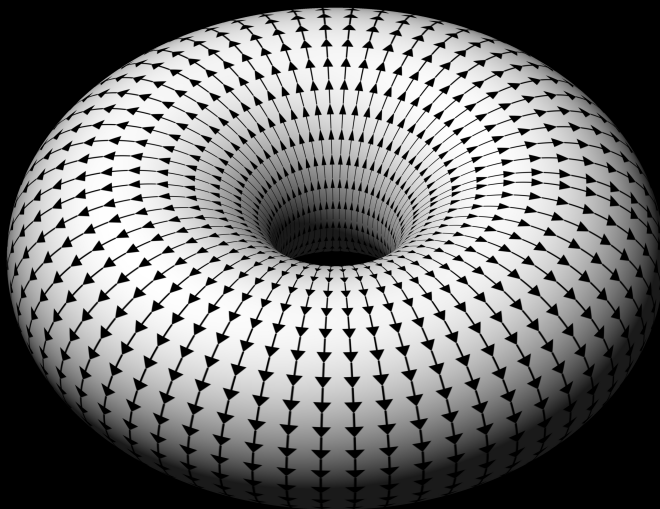
V roce 2016 Genadij A. Leonov s kolegy našli analytický přístup založený na Ljapunovských funkcích a v [LKKK16] publikovali exaktní vzorec pro kvalitní horní odhad Kaplanovy–Yorkovy dimenze chaotického Lorenzova atraktoru na široké množině parametrů, včetně standardních, tvaru:

$$\dim_{KY}(L) = 3 - \frac{2\sigma + 2b + 2}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r}}$$

Horní hranici Kaplanovy–Yorkovy dimenze (shodnou s informační dimenzí) tak odhaduje pro standardní parametry na

$$3 - \frac{82}{33 + 3\sqrt{1201}} \doteq 2.4$$

Řízení chaosu a synchronizace



Co se naučíme:

- OGY metodu

Co se naučíme:

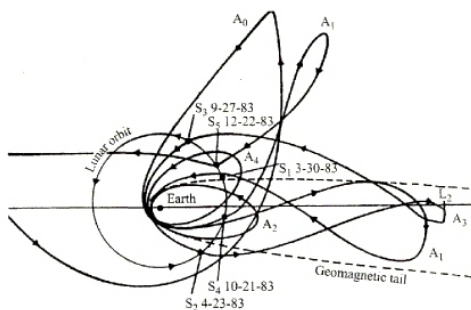
- OGY metodu
- popsat synchronizaci oscilací

Co se naučíme:

- OGY metodu
- popsat synchronizaci oscilací
- znát synchronizaci chaotické dynamiky

Řízení chaosu

V roce 1982 plánovala NASA vyslání rakety k Giacobiniho–Zinnerově kometě. Napadla je ale levnější varianta, než posílat loď ze Země. Využít sondu, která již ukončila svou misi v blízkosti Měsíce, ale měla zbytky paliva. Dynamický systém Země–Měsíc–sonda je chaotický a vyčkáním na vhodný okamžik bylo možné využít gravitace Měsíce k urychlení sondy a k jejímu vyslání ke kometě hluboko do Sluneční soustavy.



Pravděpodobně šlo o první využití chaotické trajektorie a tzv. řízení (kontroly) chaosu. Možnost řízení chaotické dynamiky (chaos control) a synchronizace se tak na konci minulého století dostaly do popředí vědeckého zájmu vzhledem k možným aplikacím v šifrovaném přenosu dat, v elektrotechnice a mechatronice (boost convertery), aplikacích využívajících tunelového jevu kvantové mechaniky (Josephsonův jev), mechanice, fyzice (řízení turbulencí, laserů, chaosu v plazmě), strojírenství (řízení oscilací), chemickém a zpracovatelském průmyslu (míchání, zpracování tekoucích materiálů), biologii, ekologii, ekonomii a medicíně (mikro biosensory).

Pravděpodobně šlo o první využití chaotické trajektorie a tzv. řízení (kontroly) chaosu. Možnost řízení chaotické dynamiky (chaos control) a synchronizace se tak na konci minulého století dostaly do popředí vědeckého zájmu vzhledem k možným aplikacím v šifrovaném přenosu dat, v elektrotechnice a mechatronice (boost convertery), aplikacích využívajících tunelového jevu kvantové mechaniky (Josephsonův jev), mechanice, fyzice (řízení turbulencí, laserů, chaosu v plazmě), strojírenství (řízení oscilací), chemickém a zpracovatelském průmyslu (míchání, zpracování tekoucích materiálů), biologii, ekologii, ekonomii a medicíně (mikro biosensory).

V roce 1990 Ott, Grebogi a Yorke uvedli praktickou metodu (úspěšnou i v aplikacích) stabilizace nestabilních chaotických cyklů. Metoda je založena na faktu, že chaotický atraktor obsahuje nekonečné husté množství nestabilních cyklů. Ty jsou stabilizovány malými perturbacemi kontrolního parametru.

Uvažujme zobrazení

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), a), \quad (39)$$

kde a je dostupný parametr, který můžeme změnit v nějakém okolí své „nominální“ hodnoty a_0 . Označme $\mathbf{x}^*(a)$ nestabilní pevný bod zobrazení (39). V malém okolí a_0 můžeme aproximovat

$$\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}^*(a_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(a_0), a_0)(\mathbf{x}(n) - \mathbf{x}^*(a_0)) + \mathbf{c}(a - a_0), \quad (40)$$

kde $\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a_0), a_0)$ je sloupcový vektor.

Vzhledem k transitivnosti a hustotě chaotické trajektorie musí v nějakém malém okolí $\mathbf{x}^*(a_0)$ pro nějaké $\mathbf{x}(n)$ platit

$$a - a_0 = -k \cdot (\mathbf{x}(n) - \mathbf{x}^*(a_0)) \quad (41)$$

Vzhledem k transitivnosti a hustotě chaotické trajektorie musí v nějakém malém okolí $\mathbf{x}^*(a_0)$ pro nějaké $\mathbf{x}(n)$ platit

$$a - a_0 = -\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}(n) - \mathbf{x}^*(a_0)) \quad (41)$$

Substitucí (41) do (40) dostaneme

$$\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}^*(a_0) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(a_0), a_0) - \mathbf{ck})(\mathbf{x}(n) - \mathbf{x}^*(a_0)).$$

Volbou $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$ můžeme dosáhnout stability regulovaného pevného bodu, tj. najdeme \mathbf{k} tak, aby

$$|D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(a_0), a_0) - \mathbf{ck}| < 1.$$

Podobně jako řízení dynamiky v blízkosti nestabilních cyklů a jejich stabilizace je v praxi velice využitelná synchronizace cyklů více oscilátorů nebo chaotických atraktorů.

Podobně jako řízení dynamiky v blízkosti nestabilních cyklů a jejich stabilizace je v praxi velice využitelná synchronizace cyklů více oscilátorů nebo chaotických atraktorů.

Periodické nebo chaotické oscilátory je možné synchronizovat

- pomocí vnější síly

Podobně jako řízení dynamiky v blízkosti nestabilních cyklů a jejich stabilizace je v praxi velice využitelná synchronizace cyklů více oscilátorů nebo chaotických atraktorů.

Periodické nebo chaotické oscilátory je možné synchronizovat

- pomocí vnější síly
- vzájemně spřažením

Podobně jako řízení dynamiky v blízkosti nestabilních cyklů a jejich stabilizace je v praxi velice využitelná synchronizace cyklů více oscilátorů nebo chaotických atraktorů.

Periodické nebo chaotické oscilátory je možné synchronizovat

- pomocí vnější síly
- vzájemně spřažením
- šumem

Podobně jako řízení dynamiky v blízkosti nestabilních cyklů a jejich stabilizace je v praxi velice využitelná synchronizace cyklů více oscilátorů nebo chaotických atraktorů.

Periodické nebo chaotické oscilátory je možné synchronizovat

- pomocí vnější síly
- vzájemně spřažením
- šumem
- sdružením mnoha oscilátorů

Podobně jako řízení dynamiky v blízkosti nestabilních cyklů a jejich stabilizace je v praxi velice využitelná synchronizace cyklů více oscilátorů nebo chaotických atraktorů.

Periodické nebo chaotické oscilátory je možné synchronizovat

- pomocí vnější síly
- vzájemně spřažením
- šumem
- sdružením mnoha oscilátorů

Podobně jako řízení dynamiky v blízkosti nestabilních cyklů a jejich stabilizace je v praxi velice využitelná synchronizace cyklů více oscilátorů nebo chaotických atraktorů.

Periodické nebo chaotické oscilátory je možné synchronizovat

- pomocí vnější síly
- vzájemně spřažením
- šumem
- sdružením mnoha oscilátorů

Rozlišujeme

- úplnou synchronizaci

Podobně jako řízení dynamiky v blízkosti nestabilních cyklů a jejich stabilizace je v praxi velice využitelná synchronizace cyklů více oscilátorů nebo chaotických atraktorů.

Periodické nebo chaotické oscilátory je možné synchronizovat

- pomocí vnější síly
- vzájemně spřažením
- šumem
- sdružením mnoha oscilátorů

Rozlišujeme

- úplnou synchronizaci
- fázovou synchronizaci

Podobně jako řízení dynamiky v blízkosti nestabilních cyklů a jejich stabilizace je v praxi velice využitelná synchronizace cyklů více oscilátorů nebo chaotických atraktorů.

Periodické nebo chaotické oscilátory je možné synchronizovat

- pomocí vnější síly
- vzájemně spřažením
- šumem
- sdružením mnoha oscilátorů

Rozlišujeme

- úplnou synchronizaci
- fázovou synchronizaci
- zobecněnou synchronizaci

Pro popis úplné nebo fázové synchronizace můžeme použít následujícího triku. Na typickém periodickém atraktoru (limitním cyklu, toru nebo vhodném chaotickém atraktoru) definujeme průsečíky Poincarého řezem v čase t_i

$$\theta(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}$$

Pro limitní cyklus je $\mathbf{x}(t_n) = \mathbf{x}(t_{n+1})$ a čas $T = t_{n+1} - t_n$ je periodou cyklu a

$$\dot{\theta} = f(\theta),$$

kde f je difeomorfismem na kružnici. Synchronizaci fáze tedy lze vysvětlit Arnoldovými jazyky. Jednoduchý příklad jsme si uvedli v předmětu **Nelineární dynamika** jako synchronizaci dvou spřažených oscilátorů fold bifurkací na kružnici, zvanou také SNIPER – Saddle-Node Infinite PERiod bifurcation.

Uvažujme dva dynamické systémy v \mathbb{R}^m vzájemně provázané $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ (matice sil, např. diagonální).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{C}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (42)$$

Předpokládejme, že nejprve pro $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ systémy dokonvergují do blízkosti svého globálního atraktoru (cyklu, toru, chaotického atraktoru) v m -rozměrném stavovém prostoru. Pokud budeme měnit \mathbf{C} , např. zvyšovat hodnoty na diagonále, bude systém (42) v $2m$ -rozměrném prostoru, přičemž

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$$

splňují následující:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}),$$

trajektorie popsaná pomocí $\mathbf{u}(t)$ je tedy trajektorie na atraktoru.

Druhá proměnná představuje rozdíl mezi trajektoriemi.

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}) - 2\mathbf{C}\mathbf{v}$$

a $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ je rovnováhou. Tato rovnováha představuje synchronizovanou dynamiku na atraktoru. Linearizací ale dostáváme, že

$$\dot{\mathbf{v}} = (D\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t)) - 2\mathbf{C})\mathbf{v},$$

kde $\boldsymbol{\xi}(t)$ je trajektorie na atraktoru. Proto dostatečná velikost provázání \mathbf{C} vede nutně k synchronizaci.

Dalším typickým příkladem synchronizace jsou systémy typu „master–slave“, kdy řídicí signál hlavního systému (master) synchronizuje podřízený systém (slave). Zde si ukážeme synchronizaci podřízeného systému s hlavním systémem – Lorenzovým chaotickým atraktorem, tj.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned}$$

se standardními parametry. Podřízený systém z hlavního přebírá pouze $x(t)$, tj. jde o dvojrozměrný neautonomní systém

$$\begin{aligned}\dot{y}_s &= rx(t) - y_s - x(t)z_s, \\ \dot{z}_s &= -bz_s + x(t)y_s.\end{aligned}$$

Úplnou synchronizaci master a slave chaotických signálů lze dokázat nalezením Ljapunovské funkce pro systém, který je rozdílem stavových proměnných obou atraktorů. Označme $e_y = y - y_s$ a $e_z = z - z_s$. Pak platí

$$\begin{aligned}\dot{e}_y &= -e_y - x(t)e_z, \\ \dot{e}_z &= -be_z + x(t)e_y,\end{aligned}$$

což je systém s nulovou rovnováhou. Ljapunovská funkce

$$L(e_y, e_z) = e_y^2 + e_z^2$$

je pozitivně definitní a platí

$$\dot{L}(t) = 2e_y\dot{e}_y + 2e_z\dot{e}_z = -2e_y^2 - 2be_z^2 < 0$$

všude kromě počátku, takže se podřízený systém musí synchronizovat s hlavním dokonce exponenciálně rychle.

Podobně může dostatečně silný bílý šum, kterému jsou vystaveny dva totožné systémy, způsobit to, že se synchronizují.

- [CG13] Lennart Carleson and Theodore W Gamelin, *Complex dynamics*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [Dev08] Robert Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Westview press, 2008.
- [Dev20] Robert L Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems: Theory and experiment, second edition*, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2020.
- [GM84] John Guckenheimer and Richard McGehee, *A proof of the mandelbrot n^2 conjecture*, Institut Mittag-Leffler, 1984.
- [Haj19] Veronika Hajnova, *Bialternate matrix products and its application in bifurcation theory*, 2019.
- [Irw01] Michael Charles Irwin, *Smooth dynamical systems*, vol. 17, World Scientific, 2001.

- [KH97] Anatole Katok and Boris Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, vol. 54, Cambridge university press, 1997.
- [Kuz13] Yuri A Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, vol. 112, Springer Science & Business Media, 2013.
- [LKKK16] GA Leonov, NV Kuznetsov, NA Korzhemanova, and DV Kuzakin, *Lyapunov dimension formula for the global attractor of the lorenz system*, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **41** (2016), 84–103.
- [Ott02] Edward Ott, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge university press, 2002.
- [Shi01] Leonid P Shilnikov, *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics*, vol. 5, World Scientific, 2001.

- [Shi12] Andrey Shilnikov, *Complete dynamical analysis of a neuron model*, *Nonlinear Dynamics* **68** (2012), no. 3, 305–328.
- [SK08] Andrey Shilnikov and Marina Kolomiets, *Methods of the qualitative theory for the hindmarsh–rose model: A case study—a tutorial*, *International Journal of Bifurcation and chaos* **18** (2008), no. 08, 2141–2168.
- [Wig03] Stephen Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, vol. 2, Springer Science & Business Media, 2003.

Děkuji Vám za pozornost!

