Rovnice:

$$-(pu')' + qu = f$$

+ okr. podmínky $u(c_i) = g_i$ nebo $\pm p(c_i)u'(c_i) = \alpha_i u(c_i) - \beta_i,\ c_i \in \{0, l\}$

Slabá formulace:

$$\int_0^l [pu'v' + quv]dx + \sum_i \alpha_i u(c_i)v(c_i) = \int_0^l fvdx + \sum_i \beta_i v(c_i)$$

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v$$

Volba funkcí v: báze prostoru lin. splajnů na uzlech $x_0, \dots x_N,\ w_i(x_j) = \delta_{ij}$

$U(x)$ aproximace řešení $u(x),\ U(x) = \sum_{i=0}^{N} U_i w_i(x)$ -> Metoda konečných prvků

$$\int_0^l pu'v'dx = \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} pu'v'dx \approx \sum_{k=1}^N I^k(pu'v'), \qquad \int_0^l quvdx \approx \sum_{k=1}^N I^k(quv)$$

$I^k(\cdot)$ jsou aproximace integrálů přes jednotlivé subintervaly obdélníkovým nebo lichoběžníkovým pravidlem.

Obdélníkové pravidlo na $[x_{k-1}, x_k]$ pro funkci w_k:

$$I^k(pu'w_k') = p_{k-1/2}\frac{U_k - U_{k-1}}{h_k}\frac{1}{h_k}h_k = p_{k-1/2}\frac{U_k - U_{k-1}}{h_k}$$

Obdélníkové pravidlo na $[x_{k-1}, x_k]$ pro funkci w_{k-1}:

$$I^k(pu'w_{k-1}') = p_{k-1/2}\frac{U_k - U_{k-1}}{h_k}(-\frac{1}{h_k})h_k = p_{k-1/2}\frac{U_{k-1} - U_k}{h_k}$$

Lichoběžníkové pravidlo na $[x_{k-1}, x_k]$ pro funkci w_k:

$$I^k(pu'w'_k) = \frac{p_{k-1}+p_k}{2}\frac{U_k - U_{k-1}}{h_k}\frac{1}{h_k}h_k = \frac{p_{k-1}+p_k}{2}\frac{U_k - U_{k-1}}{h_k}$$

Lichoběžníkové pravidlo na $[x_{k-1}, x_k]$ pro funkci w_{k-1}:

$$I^k(pu'w'_{k-1}) = \frac{p_{k-1}+p_k}{2}\frac{U_{k-1} - U_k}{h_k}$$

Podobně pro další integrály

Obdélníkové pravidlo:

$$I^k(quw_k) = q_{k-1/2}U_{k-1/2}\frac{1}{2}h_k = q_{k-1/2}\frac{U_k - U_{k-1}}{4}h_k$$

$$I^k(quw_{k-1}) = q_{k-1/2}U_{k-1/2}\frac{1}{2}h_k = q_{k-1/2}\frac{U_k - U_{k-1}}{4}h_k$$

$$I^k(fw_k) = f_{k-1/2}\frac{1}{2}h_k = I^k(fw_{k-1})$$

Lichoběžníkové pravidlo:

$$I^k(quw_k) = \frac{1}{2}[q_{k-1}U_{k-1}0 + q_kU_k1]h_k = \frac{1}{2}q_kU_kh_k$$

$$I^k(quw_{k-1}) = \frac{1}{2}[q_{k-1}U_{k-1}1 + q_kU_k0]h_k = \frac{1}{2}q_{k-1}U_{k-1}h_k$$

$$I^k(fw_k) = \frac{1}{2}[f_{k-1}0 + f_k1]h_k = \frac{1}{2}f_kh_k$$

$$I^k(fw_{k-1}) = \frac{1}{2}[f_{k-1}1 + f_k0]h_k = \frac{1}{2}f_{k-1}h_k$$

Doporučení - pro $I^k(pu'w_j')$ použít obdélníkové pravidlo, jinak lichoběžníkové.

Pro každou funkci w_k získáme jednu lineární rovnici.

$$I^k(pu'w_k') + I^{k+1}(pu'w_k') + I^k(quw_k) + I^{k+1}(quw_k) + \alpha_k U_k =$$
$$= I^k(fw_k) + I^{k+1}(fw_k) + \beta_k$$

pro $k = 1, \dots, N-1$

$$p_{k-1/2}\frac{U_k - U_{k-1}}{h_k} + p_{k+1/2}\frac{U_k - U_{k+1}}{h_{k+1}} + \frac{1}{2}U_k[h_k q_k + h_{k+1} q_k] + \alpha_k U_k =$$
$$= \frac{1}{2} f_k [h_k + h_{k+1}] + \beta_k$$

pro $k = 0$: $$p_{1/2}\frac{U_0 - U_1}{h_1} + \frac{1}{2}h_1 q_0 U_0 + \alpha_0 U_0 = \frac{1}{2} f_0 h_1 + \beta_0$$

pro $k = N$: $$p_{N-1/2}\frac{U_N - U_{N-1}}{h_N} + \frac{1}{2}h_N q_N U_N + \alpha_N U_N = \frac{1}{2} f_N h_N + \beta_N$$

Matice soustavy pro neznámé $U_0, \ldots, U_N$:

$$\begin{bmatrix}
\frac{p_{1/2}}{h_1} + \frac{1}{2} h_1 q_0 + \alpha_0 & -\frac{p_{1/2}}{h_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
-\frac{p_{1/2}}{h_1} & \frac{p_{1/2}}{h_1} + \frac{p_{3/2}}{h_2} + \frac{1}{2}[h_1 q_1 + h_2 q_1] + \alpha_1 & -\frac{p_{3/2}}{h_2} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & -\frac{p_{3/2}}{h_2} & & -\frac{p_{5/2}}{h_3} & 0 & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{bmatrix}$$

Prvky na hlavní diagonále: $\frac{p_{k-1/2}}{h_k} + \frac{p_{k+1/2}}{h_{k+1}} + \frac{1}{2}[h_k q_k + h_{k+1} q_{k+1}] + \alpha_k$

Vedlejší prvky: $-\frac{p_{k-1/2}}{h_k}, \quad -\frac{p_{k+1/2}}{h_{k+1}}$

Diferenční metoda:

$$-(pu')' + qu = f$$

+ Dirichletovy okrajové podmínky, hledáme přibližné řešení na uzlech

$x_0, \ldots x_N$

Náhrada derivací (pro ekvidistantní uzly):

$$u'(x_k) \approx \frac{1}{2h}[u(x_{k+1}) - u(x_{k-1})]$$

$$u''(x_k) \approx \frac{1}{h^2}[u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1})$$

Náhrada rovnice, pokud známe p' (u_j značí přibližnou hodnotu řešení v x_j):

$$-p_k \frac{1}{h^2}[u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}] - p'_k \frac{1}{2h}[u_{k+1} - u_{k-1}] + q_k u_k = f_k$$

Náhrada rovnice, pokud neznáme p':

$$z = pu',\ (z_k)' \approx \frac{z_{k+1/2} - z_{k-1/2}}{h}$$

$$z_{k+1/2} = p_{k+1/2} u'_{k+1/2} \approx p_{k+1/2} \frac{u_{k+1} - u_k}{h},\ z_{k-1/2} = p_{k-1/2} u'_{k-1/2} \approx p_{k-1/2} \frac{u_k - u_{k-1}}{h}$$

Celkem

$$-\frac{p_{k+1/2} u_{k+1} - (p_{k+1/2} + p_{k-1/2}) u_k + p_{k-1/2} u_{k-1}}{h^2} + q_k u_k = f_k$$

pro $k = 1, \ldots, N-1$, u_0 a u_N jsou známé.

Po vynásobení h^2 dostáváme rovnice

$$-p_{k+1/2}u_{k+1} + (p_{k+1/2} + p_{k-1/2})u_k - p_{k-1/2}u_{k-1} + h^2 q_k u_k = h^2 f_k$$

s maticí soustavy (členy s u_0 a u_N převedeme na pravou stranu)

$$\begin{bmatrix} p_{3/2} + p_{1/2} + h^2 q_1 & -p_{3/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -p_{3/2} & p_{5/2} + p_{3/2} + h^2 q_2 & -p_{5/2} & 0 & 0 & \\ 0 & -p_{5/2} & p_{7/2} + p_{5/2} + h^2 q_3 & -p_{7/2} & 0 & \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}$$

a pravou stranou

$$[h^2 f_1 + p_{1/2}u_0, h^2 f_2, h^2 f_3, \ldots, h^2 f_{N-2}, h^2 f_{N-1} + p_{N-1/2}u_N]^T$$

Porovnání s rovnicemi slabé formulace:
Pro Dirichletovy okrajové podmínky budou chybět diskrétní části a dále předpokládáme ekvidistantní uzly, tj. $h_k = h \ \forall k$. Rovnice

$$p_{k-1/2}\frac{U_k - U_{k-1}}{h_k} + p_{k+1/2}\frac{U_k - U_{k+1}}{h_{k+1}} + \frac{1}{2}U_k[h_k q_k + h_{k+1} q_k] + \alpha_k U_k =$$

$$= \frac{1}{2} f_k [h_k + h_{k+1}] + \beta_k$$

se tedy zjednoduší na

$$p_{k-1/2}\frac{U_k - U_{k-1}}{h} + p_{k+1/2}\frac{U_k - U_{k+1}}{h} + \frac{1}{2}U_k[h q_k + h q_k] = \frac{1}{2} f_k [h + h]$$

a po vynásobení h dostaneme

$$p_{k-1/2}[U_k - U_{k-1}] + p_{k+1/2}[U_k - U_{k+1}] + U_k h^2 q_k = f_k h^2$$

což po úpravě dá

$$-p_{k-1/2}U_{k-1} + (p_{k-1/2} + p_{k+1/2})U_k - p_{k+1/2}U_{k+1} + h^2 q_k U_k = h^2 f_k$$

pro $k = 1, \ldots, N-1$, tedy stejný systém rovnic jako pro diferenční metodu.

Domácí úkol:
Program (v Matlabu) pro řešení rovnice -(pu')'+qu=f s Dirichletovými okrajovými podmínkami.
Vstup: p, q, f, I=[a,b], N (pro ekvidist. dělení intervalu) nebo uzly
Výstup: U_k - přibližné hodnoty řešení v uzlech
Poslat do pondělí.