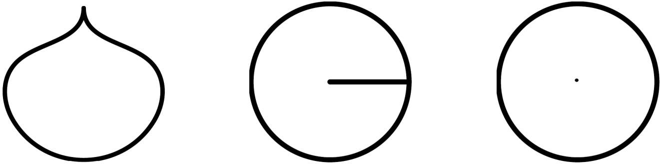
Rovinné úlohy

Ω: oblast v $\mathbb{R}^2$ s Lipschitzovskou hranicí Γ, též *regulární* oblast.
Příklady oblastí, které nejsou regulární:



Označení:

$C(\Omega)$, $PC(\Omega)$, $L_2(\Omega)$,
$H^k(\Omega)$ je prostor funkcí, jejichž derivace do řádu k jsou v $L_2(\Omega)$.

$\nabla = grad = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)^T$, $n = (n_x, n_y)^T = (n_1, n_2)^T$ je jednotkový vektor vnější normály.

Derivace ve směru vnější normály: $\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \nabla u = n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y}$.

Greenova formule

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \int_\Gamma u v n_k dS - \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx$$

Klasická formulace úlohy

$$-\nabla \cdot (p \nabla u) + qu = f \quad \text{v } \Omega$$

kde

$-\nabla \cdot (p \nabla u) = -(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})^T \cdot p(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})^T =$

$= -\frac{\partial}{\partial x}(p\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(p\frac{\partial u}{\partial y}) = -(pu_x)_x - (pu_y)_y.$

Okrajové podmínky:

Dirichletova: $u = g$ na Γ_1

Newtonova (Neumanova pro $\alpha = 0$): $-p\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha u - \beta$ na Γ_2

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \Gamma$.

Podmínky: hladkost funkcí podle potřeby,

$p(x, y) \geq p_0 > 0$, $q(x, y) \geq 0$.

Podmínky pro jednoznačnost řešení:

$\mu_1(\Gamma_1) > 0$ nebo
$q(x,y) \geq q_0 > 0$ na $\Omega_0 \subseteq \Omega$, $\mu_2(\Omega_0) > 0$ nebo
$\alpha(x,y) \geq \alpha_0 > 0$ na $\Gamma_{20} \subseteq \Gamma_2$, $\mu_1(\Gamma_{20}) > 0$

Nesplnění těchto podmínek vede na úlohu

$$-\nabla \cdot (p\nabla u) + qu = f \quad \text{v } \Omega, \; -p\frac{\partial u}{\partial n} = -\beta,$$

která je řešitelná, pokud platí (odvození pomocí Greenovy formule)

$$\int\limits_{\Omega} f \, dxdy + \int\limits_{\Gamma} \beta \, ds = 0.$$

Slabá formulace úlohy

$v = v(x, y)$ – testovací funkce, $v = 0$ na Γ_1.
Rovnici vynásobíme testovací funkcí v a integrujeme přes Ω.
Za použití Greenovy formule a okrajových podmínek dostaneme

$$\int_{\Omega} [p \nabla u \cdot \nabla v + quv] dxdy + \int_{\Gamma_2} \alpha uv \, ds = \int_{\Omega} fv \, dxdy + \int_{\Gamma_2} \beta v \, ds$$

Můžeme psát

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [p \nabla u \cdot \nabla v + quv] dxdy + \int_{\Gamma_2} \alpha uv \, ds$$

$$L(v) = \int_{\Omega} fv \, dxdy + \int_{\Gamma_2} \beta v \, ds,$$

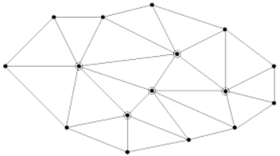
tedy

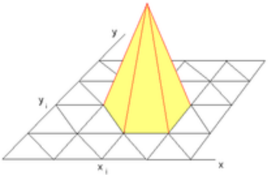
$$a(u, v) = L(v) \; \forall v.$$

Triangulace

Předpokládejme, že Ω je polygon (hranice je tvořena úsečkami).

Provedeme triangulaci oblasti Ω pomocí trojúhelníkové sítě $\mathcal{T}$ tvořené prvky (elementy) e, pro něž platí, že jsou buď disjunktní, nebo mají společnou stranu nebo vrchol, přičemž hraniční body Γ_1, Γ_2 jsou součástí triangulace.
Pro každý vrchol triangulace (uzel) definujeme bázovou funkci w jako po částech lineární spojitou s hodnotou 1 v daném vrcholu, v ostatních vrcholech 0.

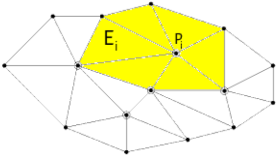




Obecnou oblast aproximujeme polygonem.

Metoda konečných prvků

Pro každý uzel triangulace (vrchol) P_i je definována jedna bázová funkce w_i nenulová na polygonu E_i tvořeném sousedními uzly.



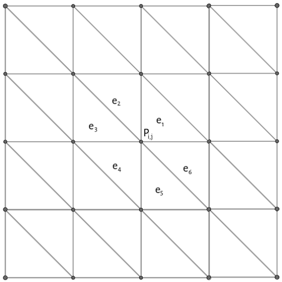
Přibližné řešení rovnice U je pak $U = \sum_i U_i w_i$, kde U_i je hodnota U v uzlu P_i.
Pro w_i máme rovnici

$$\int_{E_i} [p \nabla U \cdot \nabla w_i + qUw_i] dxdy + \int_{\Gamma_{2i}} \alpha U w_i \, ds = \int_{E_i} f w_i \, dxdy + \int_{\Gamma_{2i}} \beta w_i \, ds,$$

kde ∇U a ∇w_i jsou konstantní funkce na každém elementu, Γ_{2i} je průnik Γ_2 s hranicí E_i.

Porovnáme MKP a diferenční metodu pro Laplaceovu rovnici $-\Delta u = 0$ a pravidelnou triangulaci na čtverci s nulovými Dirichletovými okrajovými podmínkami.

Pro tuto situaci je vhodné použít dvojité indexování:
$P_{i,j} = (x_i, y_j)$, $x_i = x_0 + ih$, $y_j = y_0 + jh$.
Elementy sousedící s $P_{i,j}$ označme pro jednoduchost $e_1, \dots, e_6$.



Diferenční metoda pro Laplaceovu rovnici:
$\Delta u(x_i, y_j) = (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}[u(x_i + h, y_j) + u(x_i - h, y_j) + u(x_i, y_j + h) + u(x_i, y_j - h) - 4u(x_i, y_j)] + O(h^2)$

Náhrada Laplaceovy rovnice:
$\frac{1}{h^2}[4U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1}] = 0.$

MKP

Rovnice pro $w_{i,j}$:
na e_1: $w(x, y) = \frac{1}{h}[x_i + y_j + h - x - y]$
na e_2: $w(x, y) = \frac{1}{h}[y_j + h - y]$
na e_3: $w(x, y) = \frac{1}{h}[x_i + h + x]$
na e_4: $w(x, y) = \frac{1}{h}[x_i + y_j + h + x + y]$
na e_5: $w(x, y) = \frac{1}{h}[y_j + h + y]$
na e_6: $w(x, y) = \frac{1}{h}[x_i + h - x]$

Domácí úkol:

Dokončit odvození ekvivalence MKP s diferenční metodou:

- určit ∇U
- určit $\nabla w_{i,j}$
- spočítat $\int\limits_{E_{i,j}} [\nabla U \cdot \nabla w_i] dxdy$ $(p = 1,\ q = f = \alpha = \beta = 0)$
- Jak vypadá matice soustavy? (bloková struktura)

Příští týden budeme pracovat v Matlabu s programem `pdetool`, který je součástí knihovny (toolboxu) pro parciální diferenciální rovnice. Vyzkoušejte, prosím, jeho funkčnost, případně toolbox nainstalujte.