Rovinné úlohy

Klasická formulace úlohy

$$-\nabla \cdot (p\nabla u) + qu = f \quad \text{v } \Omega$$

kde
$-\nabla \cdot (p\nabla u) = -\frac{\partial}{\partial x}(p\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(p\frac{\partial u}{\partial y}) = -(pu_x)_x - (pu_y)_y.$

Okrajové podmínky:
Dirichletova: $u = g$ na Γ_1

Newtonova (Neumanova pro $\alpha = 0$): $-p\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha u - \beta$ na Γ_2
$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \Gamma$.

Podmínky: hladkost funkcí podle potřeby,
$p(x, y) \geq p_0 > 0$, $q(x, y) \geq 0$.

Slabá formulace úlohy

$v = v(x, y)$ – testovací funkce, $v = 0$ na Γ_1.
Rovnici vynásobíme testovací funkcí v a integrujeme přes Ω.
Za použití Greenovy formule a okrajových podmínek dostaneme

$$\int\limits_{\Omega} [p\nabla u \cdot \nabla v + quv] dxdy + \int\limits_{\Gamma_2} \alpha uv \, ds = \int\limits_{\Omega} fv \, dxdy + \int\limits_{\Gamma_2} \beta v \, ds$$

Můžeme psát

$$a(u, v) = \int\limits_{\Omega} [p\nabla u \cdot \nabla v + quv] dxdy + \int\limits_{\Gamma_2} \alpha uv \, ds$$

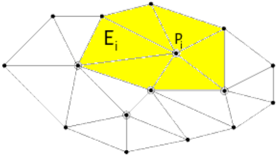
$$L(v) = \int\limits_{\Omega} fv \, dxdy + \int\limits_{\Gamma_2} \beta v \, ds,$$

tedy

$$a(u, v) = L(v) \; \forall v.$$

Metoda konečných prvků

Oblast triangulujeme a pro každý uzel triangulace (vrchol) P_i je definována jedna bázová funkce w_i nenulová na polygonu E_i tvořeném sousedními uzly.



Přibližné řešení rovnice U je pak $U = \sum_i U_i w_i$, kde U_i je hodnota U v uzlu P_i.
Pro w_i máme rovnici

$$\int_{E_i} [p \nabla U \cdot \nabla w_i + q U w_i] dxdy + \int_{\Gamma_{2i}} \alpha U w_i \, ds = \int_{E_i} f w_i \, dxdy + \int_{\Gamma_{2i}} \beta w_i \, ds,$$

kde ∇U a ∇w_i jsou konstantní funkce na každém elementu, Γ_{2i} je průnik Γ_2 s hranicí E_i.

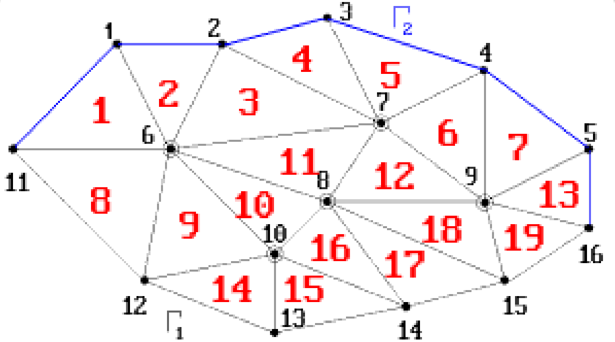
Pojmy a ozančení:

Trojúhelníky triangulace: *elementy* (*prvky*), značíme je e, resp. e_i, počet elementů označíme N_e, h maximální délka strany elementů.

Vrcholy trojúhelníků: *uzly*, značíme je P, resp. $P_i = (x_i, y_i)$, volíme je tak aby $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2$ byly uzly. Počet všech uzlů označíme N_U, počet uzlů na $\bar{\Gamma}_1$ označíme N_1, počet zbývajících uzlů N_0. Kvůli snadnějšímu zápisu můžeme uvažovat, že uzly mimo $\bar{\Gamma}_1$ mají indexy $1, \ldots, N_0$ uzly na $\bar{\Gamma}_1$ mají indexy $N_0 + 1, \ldots, N_U$.

Strany na $\bar{\Gamma}_2$ označíme S, resp. S_i, jejich počet N_S.

Pro každý element e známe jeho vrcholy P_1^e, P_3^e, P_3^e.



Například vrcholy elementu e_3 jsou uzly P_2, P_6 a P_7.

Dále označme $I^e(g)$ a $I^S(g)$ numerickou aproximaci integrálu z funkce g přes daný element e nebo danou stranu S. Pak

$$a(u,v) \approx a_h(u,v) = \sum_{i=1}^{N_e} I^{e_i}(p\nabla u \cdot \nabla v + quv) + \sum_{j=1}^{N_S} I^{S_j}(\alpha uv),$$

$$L(v) \approx L_h(v) = \sum_{i=1}^{N_e} I^{e_i}(fv) + \sum_{j=1}^{N_S} I^{S_j}(\beta v).$$

Hodnta přibližného řešení U v bodě P_i je U_i (neznámé hodnoty). Můžeme psát

$$U = \sum_{i=1}^{N_0} U_i w_i + \sum_{i=N_0+1}^{N_U} g(P_i) w_i$$

a váhová funkce V je rovna

$$V = \sum_{i=1}^{N_0} V_i w_i, \text{ pro } V_i = V(P_i).$$

Položíme

$$a_h(U, V) = L_h(V) \Rightarrow 0 = a_h(U, V) - L_h(V) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_0} V_i \left\{ \sum_{j=1}^{N_0} a_h(w_j, w_i) U_j - \left[L_h(w_i) - \sum_{j=N_0+1}^{N_U} a_h(w_j, w_i) g(P_j) \right] \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_0} V_i \left[\sum_{j=1}^{N_0} k_{ij} U_j - F_i \right] = \mathbb{V}^T [K\mathbb{U} - \mathbb{F}].$$

Protože vektor $\mathbb{V}$ je libovolný, musí platit

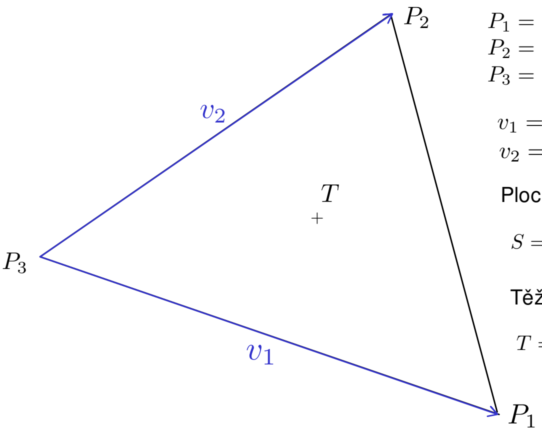
$$K\mathbb{U} = \mathbb{F}.$$

K – matice tuhosti,
$\mathbb{F}$ – vektor zatížení.

Vlastnosti matice K

1. K je symetrická: $a_h(w_i, w_j) = a_h(w_j, w_i)$.
2. K je řídká: $a_h(w_i, w_j) = 0$, pokud uzly P_i a P_j nejsou vrcholy téhož trojúhelníka.
3. K je pozitivně definitní

Integrování přes trojúhelník



$$P_1 = (x_1, y_1)$$
$$P_2 = (x_2, y_2)$$
$$P_3 = (x_3, y_3)$$

$$v_1 = P_1 - P_3 = (x_1 - x_3, y_1 - y_3)$$
$$v_2 = P_2 - P_3 = (x_2 - x_3, y_2 - y_3)$$

Plocha trojúhelníka:

$$S = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - x_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}\right|$$

Těžiště:

$$T = \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3)$$

Transformace na trojúhelník s vrcholy $[0,0], [0,1], [1,0]$:
$P = (x, y) = P_3 + sv_1 + tv_2$, $s \in [0,1]$, $t \in [0, 1-s]$, $|J| = 2S$.

Základní kvadraturní formule

S pomocí těžiště:

$$\int_e g(x,y)dxdy \approx g(T)\cdot S$$

S pomocí vrcholů trojúhelníka:

$$\int_e g(x,y)dxdy \approx \frac{1}{3}\left[g(P_1)+g(P_2)+g(P_3)\right]\cdot S$$

Obě formule jsou přesné pro lineární polynomy.

S pomocí středů stran trojúhelníka:
Označme S_1, S_2 a S_3 středy stran trojúhelníka, pak

$$\int_e g(x,y)dxdy \approx \frac{1}{3}\left[g(S_1)+g(S_2)+g(S_3)\right]\cdot S$$

Formule je přesná pro kvadratické polynomy.