Rovinné úlohy

Klasická formulace úlohy

$$-\nabla \cdot (p\nabla u) + qu = f \quad \text{v } \Omega$$

Okrajové podmínky:
Dirichletova: $u = g$ na Γ_1

Newtonova (Neumanova pro $\alpha = 0$): $-p\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha u - \beta$ na Γ_2
$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \Gamma$.

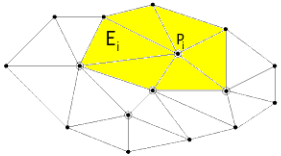
Slabá formulace úlohy

$$\int_\Omega [p\nabla u \cdot \nabla v + quv] dxdy + \int_{\Gamma_2} \alpha uv \, ds = \int_\Omega fv \, dxdy + \int_{\Gamma_2} \beta v \, ds$$

$$a(u, v) = L(v) \; \forall v.$$

Metoda konečných prvků

Oblast triangulujeme a pro každý uzel triangulace (vrchol) P_i je definována jedna bázová funkce w_i (spojitá a po částech lineární) nenulová na polygonu E_i tvořeném sousedními uzly.



Pojmy a ozančení:

Elementy (prvky): e, resp. e_i, N_e je počet elementů.

Vrcholy elementů, *uzly*, P, resp. $P_i = (x_i, y_i)$, všech uzlů je N_U, na $\bar{\Gamma}_1$ je jich N_1, zbývajících je N_0, uzly mimo $\bar{\Gamma}_1$ mají indexy $1, \ldots, N_0$ uzly na $\bar{\Gamma}_1$ mají indexy $N_0 + 1, \ldots, N_U$.

Strany na $\bar{\Gamma}_2$ označíme S, resp. S_i, jejich počet N_S.

Pro každý element e známe jeho vrcholy P_1^e, P_3^e, P_3^e.

Aproximace slabé formulace

$$a_h(u,v) = \sum_{i=1}^{N_e} I^{e_i}(p\nabla u \cdot \nabla v + quv) + \sum_{j=1}^{N_S} I^{S_j}(\alpha uv),$$

$$L_h(v) = \sum_{i=1}^{N_e} I^{e_i}(fv) + \sum_{j=1}^{N_S} I^{S_j}(\beta v).$$

$$0 = a_h(U,V) - L_h(V) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_0} V_i \left\{ \sum_{j=1}^{N_0} a_h(w_j,w_i)U_j - \left[L_h(w_i) - \sum_{j=N_0+1}^{N_U} a_h(w_j,w_i)g(P_j) \right] \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_0} V_i \left[\sum_{j=1}^{N_0} k_{ij}U_j - F_i \right] = \mathbb{V}^T[K\mathbb{U} - \mathbb{F}].$$

Rovnice pro jeden element

Buď e element s vrcholy P_1^e, P_3^e, P_3^e, $P_i^e = (x_i^e, y_i^e)$.
Na e se využívají bázové funkce w_1^e, w_3^e, w_3^e.

Označme $N^e = N^e(x,y) = (w_1^e(x,y), w_2^e(x,y), w_3^e(x,y))$,
$w_i^e(x,y) = a_i^e x + b_i^e y + c_i^e$, $i = 1,2,3$.

$U^e = (U_1^e, U_2^e, U_3^e)^T$, $U_i^e = U(P_i^e)$, $V^e = (V_1^e, V_2^e, V_3^e)^T$.

Na e platí:
$U = U_1^e w_1^e + U_2^e w_2^e + U_3^e w_3^e = N^e U^e$, podobně $V = N^e V^e$.

Označme B^e gradient N^e:
$B^e = \nabla N^e = \begin{pmatrix} a_1^e & a_2^e & a_3^e \\ b_1^e & b_2^e & b_3^e \end{pmatrix}$, tedy

$\nabla U = \nabla(N^e U^e) = B^e U^e$,
$\nabla V = \nabla(N^e V^e) = B^e V^e$.

Rovnice pro jeden element

Buď e element s vrcholy P_1^e, P_3^e, P_3^e, $P_i^e = (x_i^e, y_i^e)$.
Na e se využívají bázové funkce w_1^e, w_3^e, w_3^e.

Označme $N^e = N^e(x,y) = (w_1^e(x,y), w_2^e(x,y), w_3^e(x,y))$,
$w_i^e(x,y) = a_i^e x + b_i^e y + c_i^e$, $i = 1,2,3$.

$U^e = (U_1^e, U_2^e, U_3^e)^T$, $U_i^e = U(P_i^e)$, $V^e = (V_1^e, V_2^e, V_3^e)^T$.

Na e platí:
$U = U_1^e w_1^e + U_2^e w_2^e + U_3^e w_3^e = N^e U^e$, podobně $V = N^e V^e$.

Označme B^e gradient N^e:
$B^e = \nabla N^e = \begin{pmatrix} a_1^e & a_2^e & a_3^e \\ b_1^e & b_2^e & b_3^e \end{pmatrix}$, tedy

$\nabla U = \nabla(N^e U^e) = B^e U^e$,
$\nabla V = \nabla(N^e V^e) = B^e V^e$.

Elementární matice

Rovnice pro jeden element

Buď e element s vrcholy P_1^e, P_3^e, P_3^e, $P_i^e = (x_i^e, y_i^e)$.
Na e se využívají bázové funkce w_1^e, w_3^e, w_3^e.

Označme $N^e = N^e(x,y) = (w_1^e(x,y), w_2^e(x,y), w_3^e(x,y))$,
$w_i^e(x,y) = a_i^e x + b_i^e y + c_i^e$, $i = 1,2,3$.

$U^e = (U_1^e, U_2^e, U_3^e)^T$, $U_i^e = U(P_i^e)$, $V^e = (V_1^e, V_2^e, V_3^e)^T$.

Na e platí:
$U = U_1^e w_1^e + U_2^e w_2^e + U_3^e w_3^e = N^e U^e$, podobně $V = N^e V^e$.

Označme B^e gradient N^e:
$B^e = \nabla N^e = \begin{pmatrix} a_1^e & a_2^e & a_3^e \\ b_1^e & b_2^e & b_3^e \end{pmatrix}$, tedy

$\nabla U = \nabla(N^e U^e) = B^e U^e$,
$\nabla V = \nabla(N^e V^e) = B^e V^e$.

Elementární matice

Rovnice pro jeden element

Buď e element s vrcholy P_1^e, P_3^e, P_3^e, $P_i^e = (x_i^e, y_i^e)$.
Na e se využívají bázové funkce w_1^e, w_3^e, w_3^e.

Označme $N^e = N^e(x, y) = (w_1^e(x, y), w_2^e(x, y), w_3^e(x, y))$,
$w_i^e(x, y) = a_i^e x + b_i^e y + c_i^e$, $i = 1, 2, 3$.

$U^e = (U_1^e, U_2^e, U_3^e)^T$, $U_i^e = U(P_i^e)$, $V^e = (V_1^e, V_2^e, V_3^e)^T$.

Na e platí:
$U = U_1^e w_1^e + U_2^e w_2^e + U_3^e w_3^e = N^e U^e$, podobně $V = N^e V^e$.

Označme B^e gradient N^e:
$B^e = \nabla N^e = \begin{pmatrix} a_1^e & a_2^e & a_3^e \\ b_1^e & b_2^e & b_3^e \end{pmatrix}$, tedy

$\nabla U = \nabla(N^e U^e) = B^e U^e$,
$\nabla V = \nabla(N^e V^e) = B^e V^e$.

Rovnice pro jeden element

Buď e element s vrcholy P_1^e, P_3^e, P_3^e, $P_i^e = (x_i^e, y_i^e)$.
Na e se využívají bázové funkce w_1^e, w_3^e, w_3^e.

Označme $N^e = N^e(x,y) = (w_1^e(x,y), w_2^e(x,y), w_3^e(x,y))$,
$w_i^e(x,y) = a_i^e x + b_i^e y + c_i^e$, $i = 1,2,3$.

$U^e = (U_1^e, U_2^e, U_3^e)^T$, $U_i^e = U(P_i^e)$, $V^e = (V_1^e, V_2^e, V_3^e)^T$.

Na e platí:
$U = U_1^e w_1^e + U_2^e w_2^e + U_3^e w_3^e = N^e U^e$, podobně $V = N^e V^e$.

Označme B^e gradient N^e:

$B^e = \nabla N^e = \begin{pmatrix} a_1^e & a_2^e & a_3^e \\ b_1^e & b_2^e & b_3^e \end{pmatrix}$, tedy

$\nabla U = \nabla(N^e U^e) = B^e U^e$,
$\nabla V = \nabla(N^e V^e) = B^e V^e$.

Rovnice pro jeden element

Buď e element s vrcholy $P_1^e,\ P_3^e,\ P_3^e,\ P_i^e = (x_i^e, y_i^e)$.
Na e se využívají bázové funkce $w_1^e,\ w_3^e,\ w_3^e$.

Označme $N^e = N^e(x,y) = (w_1^e(x,y), w_2^e(x,y), w_3^e(x,y))$,
$w_i^e(x,y) = a_i^e x + b_i^e y + c_i^e,\ i = 1,2,3.$

$U^e = (U_1^e, U_2^e, U_3^e)^T,\ U_i^e = U(P_i^e),\ V^e = (V_1^e, V_2^e, V_3^e)^T.$

Na e platí:
$U = U_1^e w_1^e + U_2^e w_2^e + U_3^e w_3^e = N^e U^e$, podobně $V = N^e V^e$.

Označme B^e gradient N^e:

$$B^e = \nabla N^e = \begin{pmatrix} a_1^e & a_2^e & a_3^e \\ b_1^e & b_2^e & b_3^e \end{pmatrix},$$ tedy

$$\nabla U = \nabla(N^e U^e) = B^e U^e,$$
$$\nabla V = \nabla(N^e V^e) = B^e V^e.$$

$$I^e(p\nabla U \cdot \nabla V + qUV) =$$
$$= I^e((B^eV^e)^T pB^eU^e + (N^eV^e)^T qN^eU^e) =$$
$$= I^e((V^e)^T(B^e)^T pB^eU^e + (V^e)^T(N^e)^T qN^eU^e) =$$
$$= (V^e)^T I^e((B^e)^T pB^e + (N^e)^T qN^e)U^e =$$
$$= (V^e)^T(K_1^e + K_2^e)U^e = (V^e)^T K^eU^e$$

K^e se nazývá *elementární matice*.

Pro výpočet K_1^e používáme kvadraturní formuli s těžištěm elementu $T^e = \frac{1}{3}(P_1^e + P_2^e + P_3^e)$:

$$K_1^e = S^e p(x_T, y_T)\begin{pmatrix} a_1^ea_1^e + b_1^eb_1^e & a_1^ea_2^e + b_1^eb_2^e & a_1^ea_3^e + b_1^eb_3^e \\ a_2^ea_1^e + b_2^eb_1^e & a_2^ea_2^e + b_2^eb_2^e & a_2^ea_3^e + b_2^eb_3^e \\ a_3^ea_1^e + b_3^eb_1^e & a_3^ea_2^e + b_3^eb_2^e & a_3^ea_3^e + b_3^eb_3^e \end{pmatrix}$$

$$I^e(p\nabla U \cdot \nabla V + qUV) =$$
$$= I^e((B^eV^e)^T pB^eU^e + (N^eV^e)^T qN^eU^e) =$$
$$= I^e((V^e)^T(B^e)^T pB^eU^e + (V^e)^T(N^e)^T qN^eU^e) =$$
$$= (V^e)^T I^e((B^e)^T pB^e + (N^e)^T qN^e)U^e =$$
$$= (V^e)^T(K_1^e + K_2^e)U^e = (V^e)^T K^e U^e$$

K^e se nazývá *elementární matice*.

Pro výpočet K_1^e používáme kvadraturní formuli s těžištěm elementu $T^e = \frac{1}{3}(P_1^e + P_2^e + P_3^e)$:

$$K_1^e = S^e p(x_T, y_T) \begin{pmatrix} a_1^e a_1^e + b_1^e b_1^e & a_1^e a_2^e + b_1^e b_2^e & a_1^e a_3^e + b_1^e b_3^e \\ a_2^e a_1^e + b_2^e b_1^e & a_2^e a_2^e + b_2^e b_2^e & a_2^e a_3^e + b_2^e b_3^e \\ a_3^e a_1^e + b_3^e b_1^e & a_3^e a_2^e + b_3^e b_2^e & a_3^e a_3^e + b_3^e b_3^e \end{pmatrix}$$

$$I^e(p\nabla U \cdot \nabla V + qUV) =$$
$$= I^e((B^e V^e)^T p B^e U^e + (N^e V^e)^T q N^e U^e) =$$
$$= I^e((V^e)^T (B^e)^T p B^e U^e + (V^e)^T (N^e)^T q N^e U^e) =$$
$$= (V^e)^T I^e((B^e)^T p B^e + (N^e)^T q N^e) U^e =$$
$$= (V^e)^T (K_1^e + K_2^e) U^e = (V^e)^T K^e U^e$$

K^e se nazývá *elementární matice*.

Pro výpočet K_1^e používáme kvadraturní formuli s těžištěm elementu $T^e = \frac{1}{3}(P_1^e + P_2^e + P_3^e)$:

$$K_1^e = S^e p(x_T, y_T) \begin{pmatrix} a_1^e a_1^e + b_1^e b_1^e & a_1^e a_2^e + b_1^e b_2^e & a_1^e a_3^e + b_1^e b_3^e \\ a_2^e a_1^e + b_2^e b_1^e & a_2^e a_2^e + b_2^e b_2^e & a_2^e a_3^e + b_2^e b_3^e \\ a_3^e a_1^e + b_3^e b_1^e & a_3^e a_2^e + b_3^e b_2^e & a_3^e a_3^e + b_3^e b_3^e \end{pmatrix}$$

Pro výpočet koeficientů a_i^e, b_i^e a c_i^e využijeme vlastnost bázových funkcí

$$w_i^e(x_j^e, y_j^e) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad i \neq j \\ 1 & \text{pro} \quad i = j \end{cases}$$

Dostáváme systém rovnic

$$\begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e & 1 \\ x_2^e & y_2^e & 1 \\ x_3^e & y_3^e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^e & a_2^e & a_3^e \\ b_1^e & b_2^e & b_3^e \\ c_1^e & c_2^e & c_3^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinant první matice je
$d^e = (y_3^e - y_1^e)(x_2^e - x_1^e) - (x_3^e - x_1^e)(y_2^e - y_1^e)$, $|d^e| = 2S^e$. Pak

$$\begin{array}{lll} a_1^e = (y_2^e - y_3^e)/d^e & b_1^e = (x_3^e - x_2^e)/d^e & c_1^e = (x_2^e y_3^e - y_2^e x_3^e)/d^e \\ a_2^e = (y_3^e - y_1^e)/d^e & b_2^e = (x_1^e - x_3^e)/d^e & c_2^e = (x_3^e y_1^e - y_3^e x_1^e)/d^e \\ a_2^e = (y_1^e - y_2^e)/d^e & b_2^e = (x_2^e - x_1^e)/d^e & c_2^e = (x_1^e y_2^e - y_1^e x_2^e)/d^e \end{array}$$

Pro výpočet koeficientů a_i^e, b_i^e a c_i^e využijeme vlastnost bázových funkcí

$$w_i^e(x_j^e, y_j^e) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad i \neq j \\ 1 & \text{pro} \quad i = j \end{cases}$$

Dostáváme systém rovnic

$$\begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e & 1 \\ x_2^e & y_2^e & 1 \\ x_3^e & y_3^e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^e & a_2^e & a_3^e \\ b_1^e & b_2^e & b_3^e \\ c_1^e & c_2^e & c_3^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinant první matice je
$d^e = (y_3^e - y_1^e)(x_2^e - x_1^e) - (x_3^e - x_1^e)(y_2^e - y_1^e)$, $|d^e| = 2S^e$. Pak

$$\begin{array}{lll} a_1^e = (y_2^e - y_3^e)/d^e & b_1^e = (x_3^e - x_2^e)/d^e & c_1^e = (x_2^e y_3^e - y_2^e x_3^e)/d^e \\ a_2^e = (y_3^e - y_1^e)/d^e & b_2^e = (x_1^e - x_3^e)/d^e & c_2^e = (x_3^e y_1^e - y_3^e x_1^e)/d^e \\ a_2^e = (y_1^e - y_2^e)/d^e & b_2^e = (x_2^e - x_1^e)/d^e & c_2^e = (x_1^e y_2^e - y_1^e x_2^e)/d^e \end{array}$$

Pro výpočet koeficientů a_i^e, b_i^e a c_i^e využijeme vlastnost bázových funkcí

$$w_i^e(x_j^e, y_j^e) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad i \neq j \\ 1 & \text{pro} \quad i = j \end{cases}$$

Dostáváme systém rovnic

$$\begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e & 1 \\ x_2^e & y_2^e & 1 \\ x_3^e & y_3^e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^e & a_2^e & a_3^e \\ b_1^e & b_2^e & b_3^e \\ c_1^e & c_2^e & c_3^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinant první matice je
$d^e = (y_3^e - y_1^e)(x_2^e - x_1^e) - (x_3^e - x_1^e)(y_2^e - y_1^e)$, $|d^e| = 2S^e$. Pak

$$\begin{array}{lll} a_1^e = (y_2^e - y_3^e)/d^e & b_1^e = (x_3^e - x_2^e)/d^e & c_1^e = (x_2^e y_3^e - y_2^e x_3^e)/d^e \\ a_2^e = (y_3^e - y_1^e)/d^e & b_2^e = (x_1^e - x_3^e)/d^e & c_2^e = (x_3^e y_1^e - y_3^e x_1^e)/d^e \\ a_2^e = (y_1^e - y_2^e)/d^e & b_2^e = (x_2^e - x_1^e)/d^e & c_2^e = (x_1^e y_2^e - y_1^e x_2^e)/d^e \end{array}$$

Pokud označíme

$r^e = (y_2^e - y_3^e)(y_3^e - y_1^e) - (x_3^e - x_2^e)(x_1^e - x_3^e)$
$s^e = (y_2^e - y_3^e)(y_1^e - y_2^e) - (x_3^e - x_2^e)(x_2^e - x_1^e)$
$t^e = (y_3^e - y_1^e)(y_1^e - y_2^e) - (x_1^e - x_3^e)(x_2^e - x_1^e)$

platí

$$K_1^e = \frac{p(x_T, y_T)}{2|d^e|} \begin{pmatrix} -r^e - s^e & r^e & s^e \\ r^e & -r^e - t^e & t^e \\ s^e & t^e & -s^e - t^e \end{pmatrix}$$

Pro výpočet K_2^e můžeme využít kvadraturní formuli pro hodnoty ve vrcholech trojúhelníku, pak dostaneme

$$K_2^e = \frac{|d^e|}{6} \begin{pmatrix} q(x_1^e, y_1^e) & 0 & 0 \\ 0 & q(x_2^e, y_2^e) & 0 \\ 0 & 0 & q(x_3^e, y_3^e) \end{pmatrix},$$

nebo formuli pro těžiště, pak vyjde

$$K_2^e = \frac{|d^e|}{18} q(x_T^e, y_T^e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro integrál na pravé straně rovnice dostáváme $I^e(fV) = I^e((N^e V^e)^T f) = (V^e)^T I^e((N^e)^T f) = (V^e)^T \mathbb{F}^e$, pak podle použité kvadraturní formule

$\mathbb{F}^e = \frac{1}{6}|d^e|(f(P_1^e), f(P_2^e), f(P_3^e))^T$ nebo

$\mathbb{F}^e = \frac{1}{6}|d^e| f(T^e)(1,1,1)^T$.

Pro výpočet K_2^e můžeme využít kvadraturní formuli pro hodnoty ve vrcholech trojúhelníku, pak dostaneme

$$K_2^e = \frac{|d^e|}{6} \begin{pmatrix} q(x_1^e, y_1^e) & 0 & 0 \\ 0 & q(x_2^e, y_2^e) & 0 \\ 0 & 0 & q(x_3^e, y_3^e) \end{pmatrix},$$

nebo formuli pro těžiště, pak vyjde

$$K_2^e = \frac{|d^e|}{18} q(x_T^e, y_T^e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro integrál na pravé straně rovnice dostáváme $I^e(fV) = I^e((N^e V^e)^T f) = (V^e)^T I^e((N^e)^T f) = (V^e)^T \mathbb{F}^e$, pak podle použité kvadraturní formule

$\mathbb{F}^e = \frac{1}{6}|d^e|(f(P_1^e), f(P_2^e), f(P_3^e))^T$ nebo

$\mathbb{F}^e = \frac{1}{6}|d^e| f(T^e)(1,1,1)^T$.

Elementární matice pro strany S na Γ_2 jsou dány jednorozměrnými kvadraturními formulemi.

Buď S strana určena uzly P_1^S a P_2^S, w_1^S a w_2^S jsou restrikce příslušných bázových funkcí na S. Označme

$N^S = N^S(x, y) = (w_1^S(x, y), w_2^S(x, y))$,

$U^S = (U_1^S, U_2^S)^T = (U(P_1^S), U(P_2^S))^T$,

$V^S = (V_1^S, V_2^S)^T = (V(P_1^S), V(P_2^S))^T$.

Pak na S máme $U = N^S U^S$, $V = N^S V^S$ a

$I^S(\alpha UV) = (V^S)^T I^S((N^S)^T \alpha N^S) U^S = (V^S)^T K^S U^S$,

$I^S(\beta V) = (V^S)^T I^S((N^S)^T \beta) = (V^S)^T \mathbb{F}^S$.

Elementární matice pro strany S na Γ_2 jsou dány jednorozměrnými kvadraturními formulemi.

Buď S strana určena uzly P_1^S a P_2^S, w_1^S a w_2^S jsou restrikce příslušných bázových funkcí na S. Označme

$N^S = N^S(x, y) = (w_1^S(x, y), w_2^S(x, y))$,

$U^S = (U_1^S, U_2^S)^T = (U(P_1^S), U(P_2^S))^T$,

$V^S = (V_1^S, V_2^S)^T = (V(P_1^S), V(P_2^S))^T$.

Pak na S máme $U = N^S U^S$, $V = N^S V^S$ a

$I^S(\alpha UV) = (V^S)^T I^S((N^S)^T \alpha N^S) U^S = (V^S)^T K^S U^S$,

$I^S(\beta V) = (V^S)^T I^S((N^S)^T \beta) = (V^S)^T \mathbb{F}^S$.

Elementární matice pro strany S na Γ_2 jsou dány jednorozměrnými kvadraturními formulemi.

Buď S strana určena uzly P_1^S a P_2^S, w_1^S a w_2^S jsou restrikce příslušných bázových funkcí na S. Označme
$N^S = N^S(x,y) = (w_1^S(x,y), w_2^S(x,y))$,
$U^S = (U_1^S, U_2^S)^T = (U(P_1^S), U(P_2^S))^T$,
$V^S = (V_1^S, V_2^S)^T = (V(P_1^S), V(P_2^S))^T$.

Pak na S máme $U = N^S U^S$, $V = N^S V^S$ a
$I^S(\alpha UV) = (V^S)^T I^S((N^S)^T \alpha N^S) U^S = (V^S)^T K^S U^S$,
$I^S(\beta V) = (V^S)^T I^S((N^S)^T \beta) = (V^S)^T \mathbb{F}^S$.

Pro lichoběžníkovou formuli dostaneme

$$K^S = \frac{1}{2} d^S \begin{pmatrix} \alpha(P_1^S) & 0 \\ 0 & \alpha(P_2^S) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F}^S = \frac{1}{2} d^S \begin{pmatrix} \beta(P_1^S) \\ \beta(P_2^S) \end{pmatrix},$$

kde d^S je délka strany, pro obdélníkovou formuli

$$K^S = \frac{1}{2} d^S \alpha(T^S) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F}^S = \frac{1}{2} d^S \beta(T^S) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pro T^S střed strany S.

Sestavení globání matice K

Vzhledem k tomu, že integrování je aditivní, dostaneme globání matici tuhosti K jako součet elementárních matic na příslušných pozicích.

Algoritmus:

- Matici K vytvoříme jako nulovou čtvercovou matici řádu N_0.
- Pro každý element e vytvoříme matice K_1^e a K_2^e, které připočteme ke K na pozice (řadkové a sloupcové) odpovídájící skutečným indexům vrcholů elementu (příslušných uzlů). Hodnoty pro uzly z $\bar{\Gamma}_1$ (známé hodnoty funkce U) převádíme na pravou stranu rovnice – připočítáváme k vektoru, který podobně vytváříme z $\mathbb{F}$.
- Stejný postup provádíme pro každou stranu $S \in \Gamma_2$.

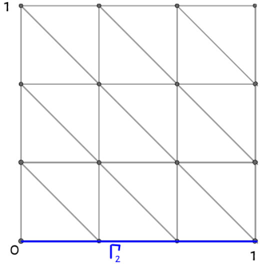
Sestavení globání matice K

Vzhledem k tomu, že integrování je aditivní, dostaneme globání matici tuhosti K jako součet elementárních matic na příslušných pozicích.

Algoritmus:

- Matici K vytvoříme jako nulovou čtvercovou matici řádu N_0.
- Pro každý element e vytvoříme matice K_1^e a K_2^e, které připočteme ke K na pozice (řadkové a sloupcové) odpovídájicí skutečným indexům vrcholů elementu (příslušných uzlů). Hodnoty pro uzly z $\bar{\Gamma}_1$ (známé hodnoty funkce U) převádíme na pravou stranu rovnice – připočítáváme k vektoru, který podobně vytváříme z $\mathbb{F}$.
- Stejný postup provádíme pro každou stranu $S \in \Gamma_2$.

Domácí úkol



Pro čtvercovou oblast Ω, jejíž dolní stranu tvoří Γ_2 (zbytek Γ_1) s pravidelnou tringulací (viz obrázek) sestavte a vyřešte systém rovnic pro Laplaceovu rovnici

$$-\Delta u = 0$$

s okrajovou podmínkou $u(x, y) = x$ na Γ_1, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ $(\alpha = \beta = 0)$ na Γ_2.