Okrajová úloha 4. stupně.

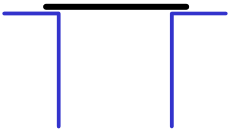
$$(pu'')'' - (ru')' + qu = f$$

na $[0, l]$.

Okrajové podmínky - dvě z následujících pro $c = 0$ a $c = l$, $v_0 = -1$, $v_l = 1$:

$$\begin{aligned} u(c) &= u_c && (1) \\ u'(c) &= \varphi_c && (2) \\ -v_c p(c) u''(c) &= \gamma_c u'(c) - \delta_c && (3) \\ v_c\{[p(c)u''(c)]' - r(c)u'(c)\} &= \alpha_c u(c) - \beta_c && (4) \end{aligned}$$

Možné kombinace okrajových podmínek:
(1) a (2), (1) a (3), (2) a (4), (3) a (4).



Aplikace - průhyb nosníku podle Kirchhoffovy teorie.

Podmínky vložení - zaručují existenci a jednoznačnost řešení, existuje jich ekvivalentních celá řada (p kladná, ostaní funkce a konstanty nezáporné).

Slabá formulace:
rovnici vynásobíme testovací funkcí $v(x)$ a integrujeme přes $[0, l]$.

Pro okrajové podmínky (1) a (2) v bodě 0 a (3) a (4) v bodě l dostaneme:

$$\int_0^l [pu''v'' + ru'v' + quv]dx + \alpha_l u(l)v(l) + \gamma_l u'(l)v'(l) = \int_0^l fvdx + \beta_l v(l) + \delta_l v'(l)$$

neboli

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v.$$

Zobecněná slabá formulace:

$$a(u, v) = \int_0^l [pu''v'' + ru'v' + quv]dx + \sum_i [\alpha_i u(c_i)v(c_i) + \gamma_i u'(c_i)v'(c_i)]$$

$$L(v) = \int_0^l fvdx + \sum_i [\beta_i v(c_i) + \delta_i v'(c_i)]$$

Metoda konečných prvků:
Řešení aproximujeme Hermitovým splajnem na uzlech $x_0, \ldots x_N$.
Hermitův splajn - kubický splajn s předepsanými funkčními hodnotami a hodnotami deraivace v krajních bodech intervalu. Např. na $[x_0, x_1]$ je

$$H(x) = H_0 h_0(x) + H_1 h_1(x) + H_0' \bar{h}_0(x) + H_1' \bar{h}_1(x),$$

kde

$$h_0(x) = [1 - 2\frac{x - x_0}{x_0 - x_1}](\frac{x - x_1}{x_0 - x_1})^2,\ h_1(x) = [1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}](\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})^2,$$

$$\bar{h}_0(x) = (x - x_0)(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1})^2,\ \bar{h}_1(x) = (x - x_1)(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})^2.$$

Pro funkce $h,\ \bar{h}$ platí:

$$h_i(x_j) = \delta_{i,j}, h_i'(x_j) = 0,\ \bar{h}_i(x_j) = 0,\ \bar{h}_i'(x_j) = \delta_{i,j}.$$

Celkem máme 2(N+1) bázových funkcí $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{2N+1}$,
za něž použijeme $h_0, \bar{h}_0, h_1, \bar{h}_1, \ldots, h_N, \bar{h}_N$.

Přibližné řešení je dáno nejen funkčními hodnotami v uzlových bodech, ale také hodnotami derivací, takže hledáme neznámý vektor

$$U = (U_0, U_0', U_1, U_1', \ldots, U_N, U_N').$$

Integrál ve slabé formulaci nahradíme přibližnou formulí, takže řešíme rovnici

$$\sum_k I^k(pu''v'' + ru'v' + quv) + \sum_i [\alpha_i u(c_i)v(c_i) + \gamma_i u'(c_i)v'(c_i)] =$$
$$= \sum_k I^k(fv) + \sum_i [\beta_i v(c_i) + \delta_i v'(c_i)]$$

Pro numerickou integraci můžeme použít Simpsonovo pravidlo.
Pro funkční hodnotu v uzlovém bodě ovšem potřebujeme tři další neznáme hodnoty v pravém i levém souseedním intervalu, takže v každé rovnici je celkem 7 neznámých - matice soustavy je sedmidiagonální.

Simpsonovo pravidlo:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx \approx \frac{h_i}{6}[g(x_{i-1}) + 4g(x_{i-1/2}) + g(x_i)]$$