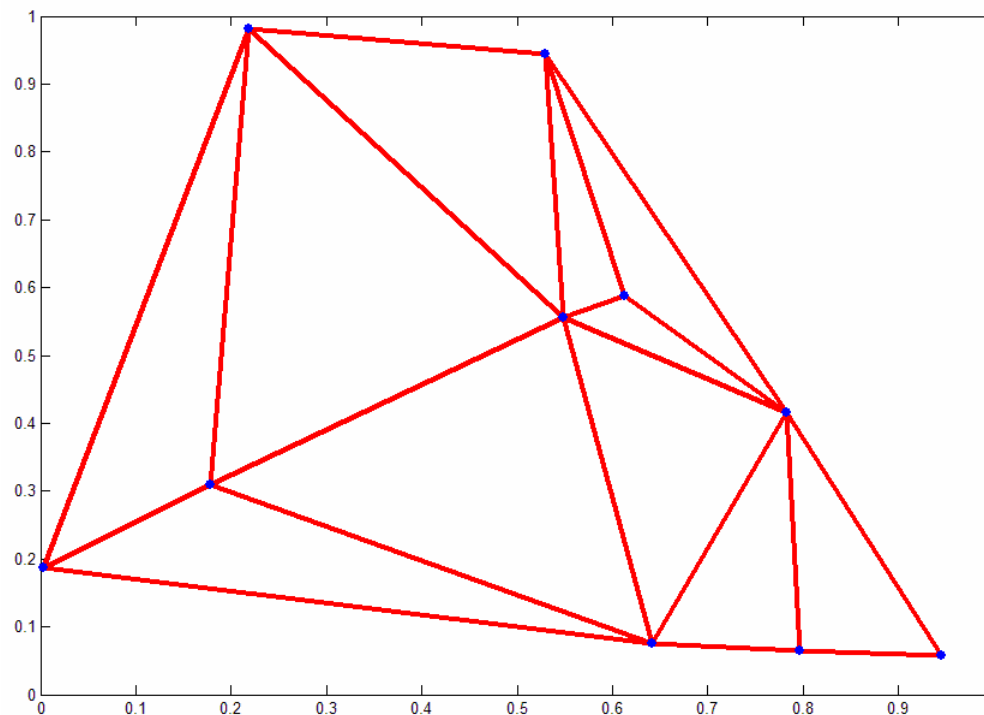


Triangulace

□ Význam triangulace

- trojúhelník je základní grafický element
- aproximace ploch
- předzpracování pro jiné algoritmy
- ...

příklad triangulace



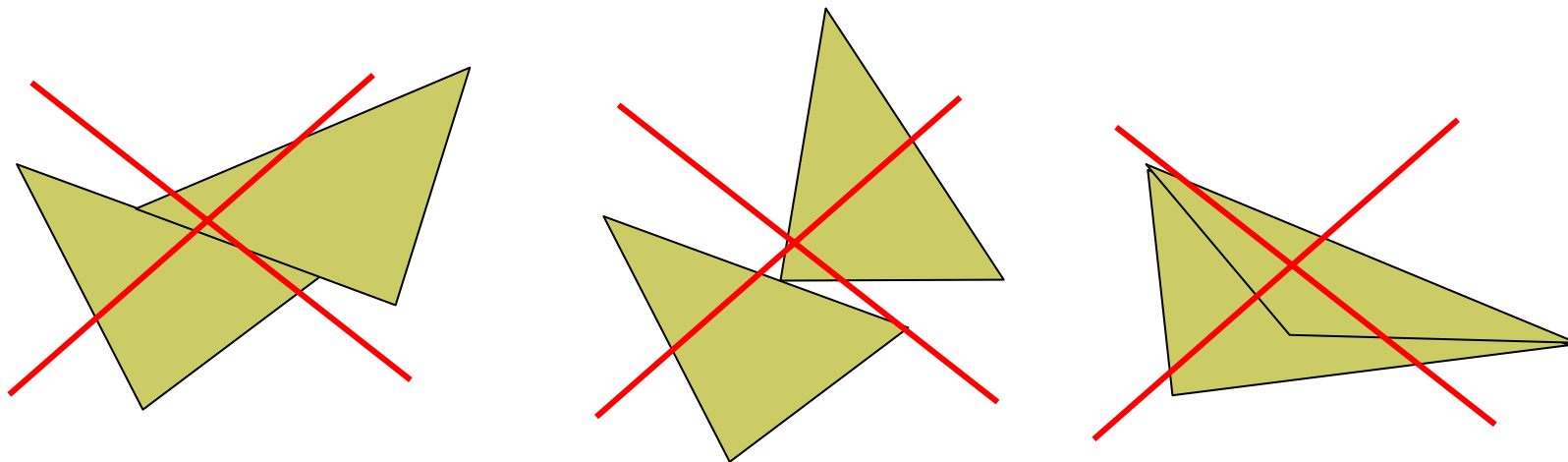
Triangulace

□ Definice

Triangulace T nad množinou bodů $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ v rovině představuje takové planární rozdělení, které vytvoří soubor m trojúhelníků $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ tak, aby platilo

- **libovolné dva trojúhelníky** $t_i, t_j \in T, i \neq j$ mají společnou **nejvýše hranu nebo vrchol**
- **sjednocení trojúhelníků je souvislá množina** ve 2D (obecně nemusí být konvexní a může obsahovat díry)
- (uvnitř žádného trojúhelníku neleží žádný další bod z P)

Triangulace



**ukázky vzájemných poloh
trojúhelníků, které tato definice
vylučuje**

Triangulace

- Pro **triangulaci** T nad množinou bodů $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ v rovině platí

$$m = 2n - n_{KO} + 2n_D - 2$$

$$n_H = 3n - n_{KO} + 3n_D - 3$$

- m - počet trojúhelníků
- n_H - počet hran
- n_{KO} - počet vrcholů konvexní obálky
- n_D - počet děr

- vztahy lze odvodit z Eulerovy formule

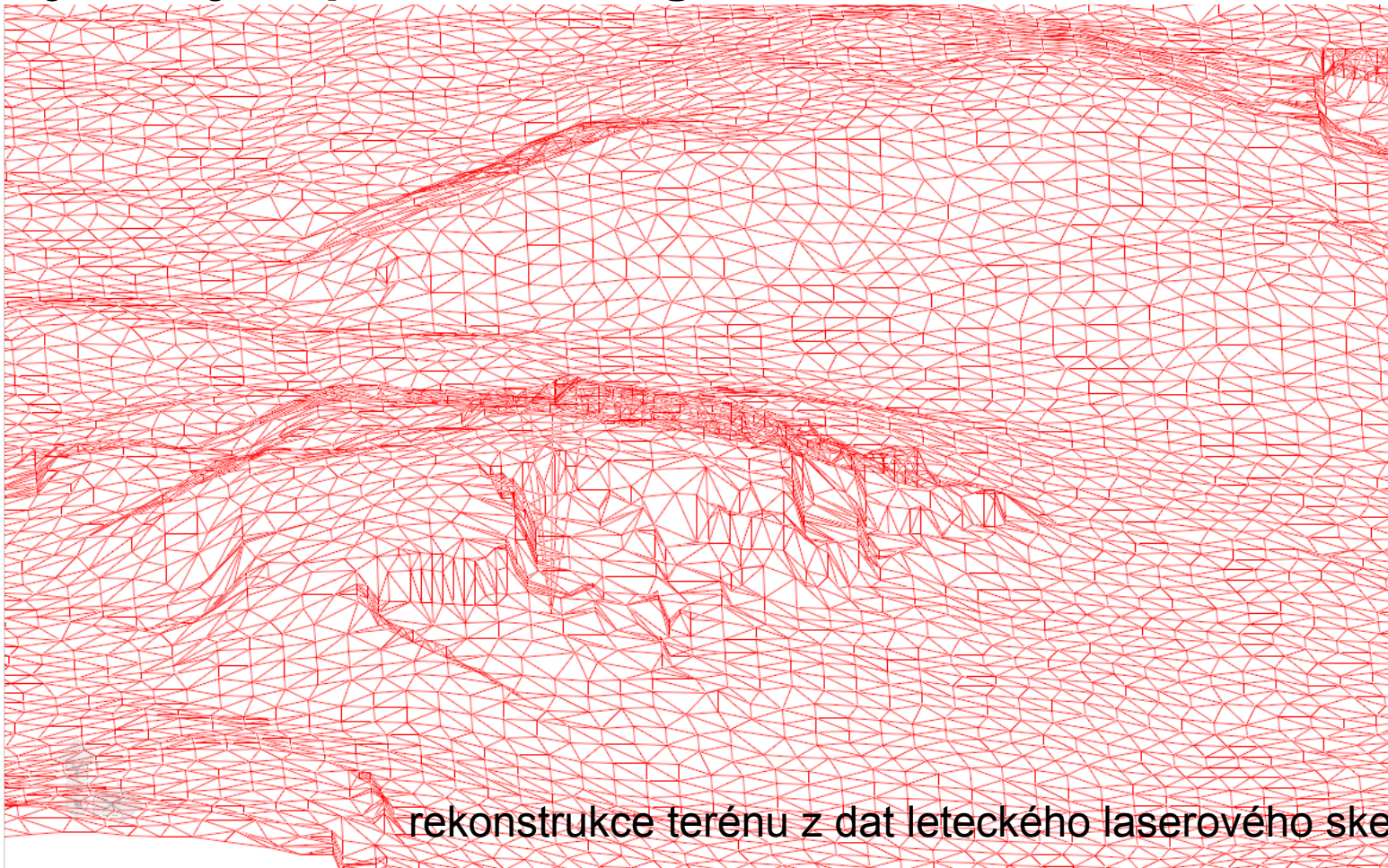
Triangulace

□ Nejčastější aplikace triangulací

- kartografie – tvorba digitálního modelu terénu
- aproximace ploch
- zpracování obrazu – segmentace, rozpoznávání vzoru
- tvorba prostorových modelů z dat laserového skenování
- počítačová grafika – vizualizace prostorových dat ve scénách
- kartografická generalizace
- modelování přírodních jevů – eroze
- interpolační techniky
- biometrie – detekce otisků prstů
- předzpracování pro jiné algoritmy

Triangulace

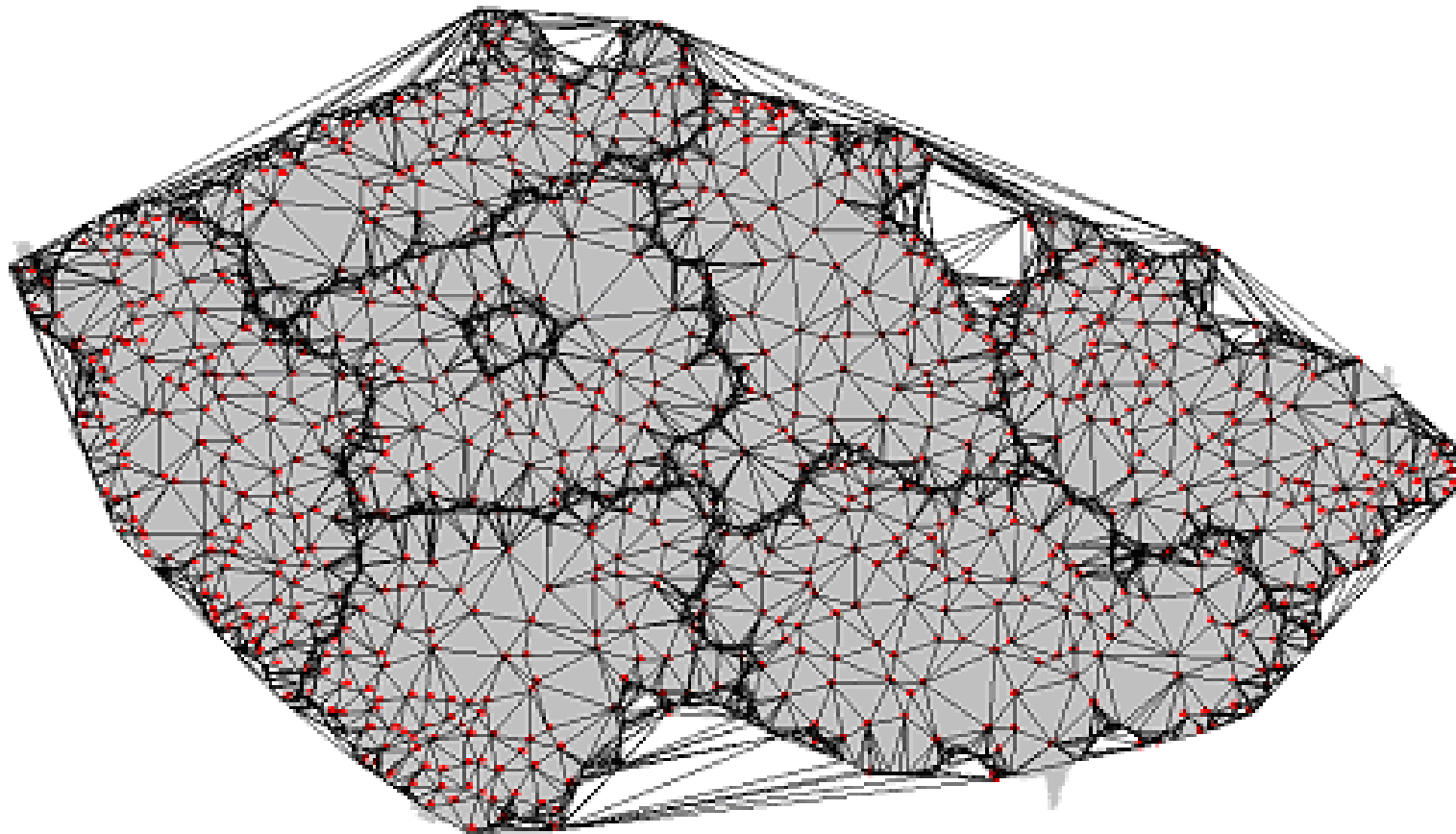
□ Nejčastější aplikace triangulací



rekonstrukce terénu z dat leteckého laserového skenování

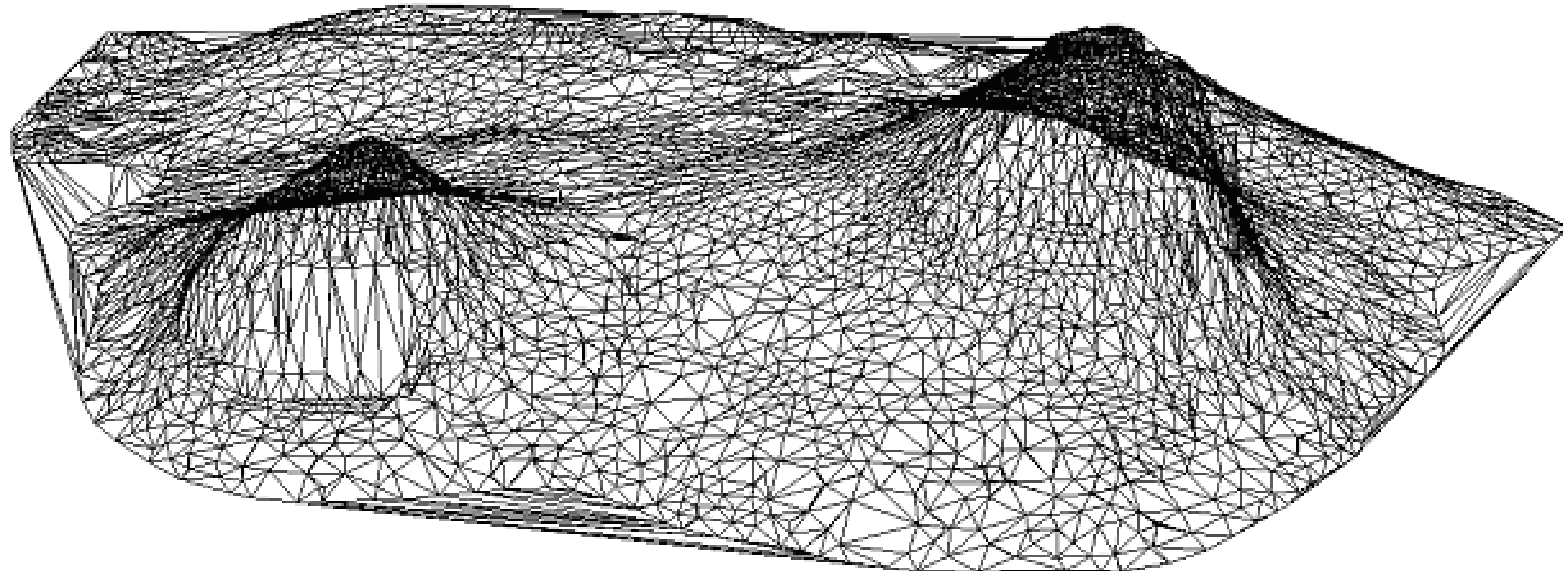
Triangulace

- Nejčastější aplikace triangulací



Triangulace

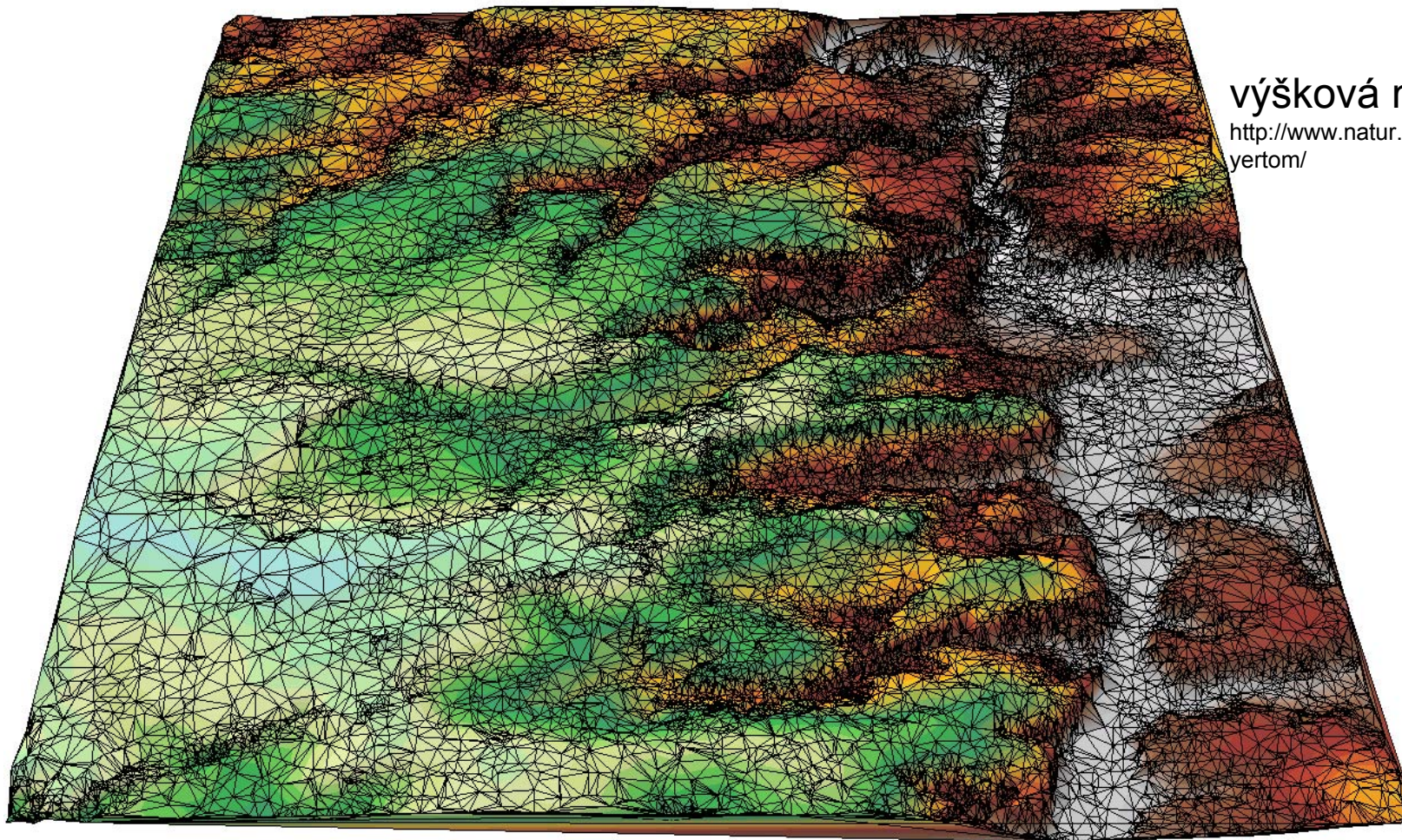
- ▣ Nejčastější aplikace triangulací



výšková mapa

Triangulace

□ Nejčastější aplikace triangulací

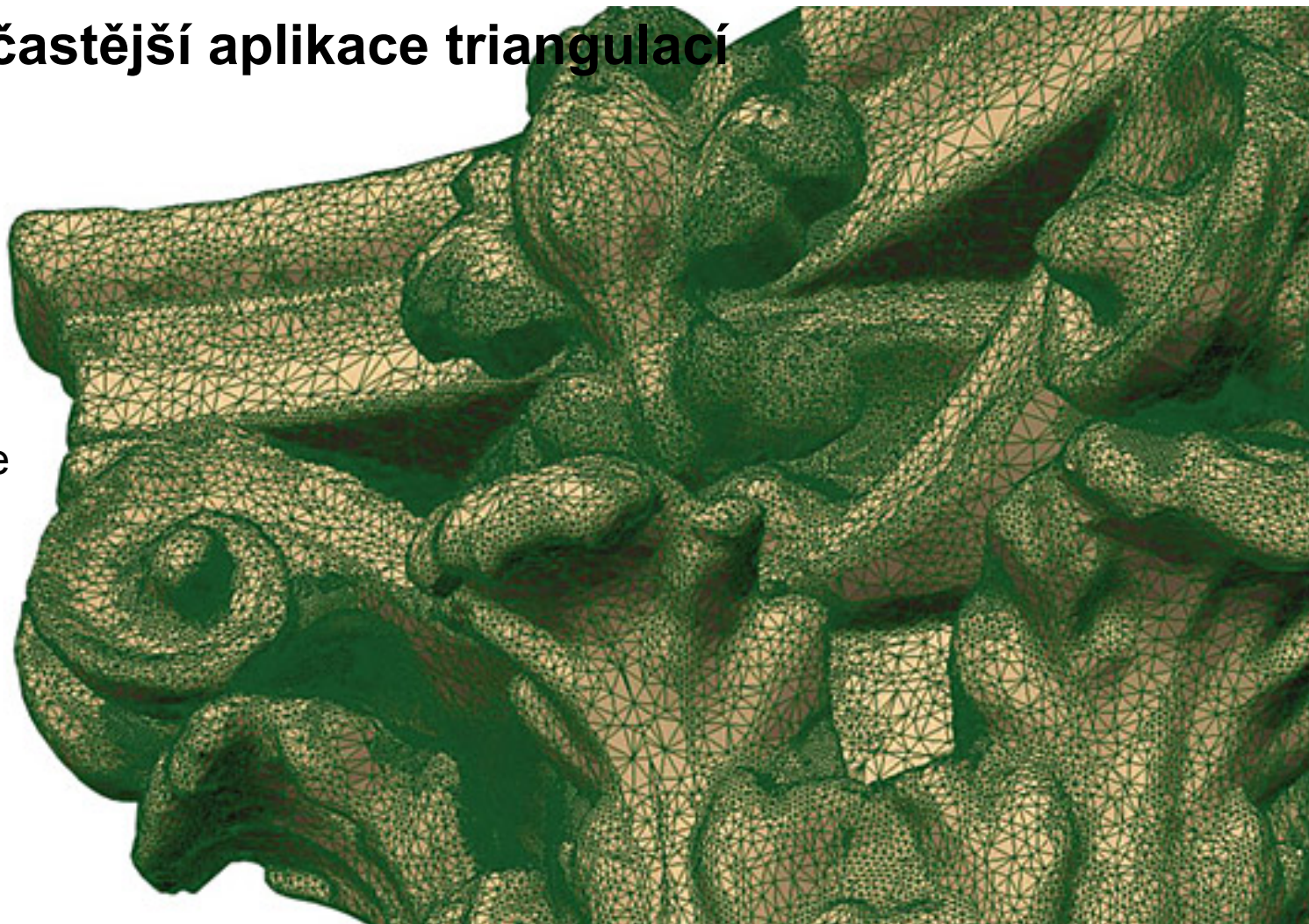


výšková mapa
<http://www.natur.cuni.cz/~bayertom/>

Triangulace

- ▣ Nejčastější aplikace triangulací

triangulace
povrchu



Triangulace

□ Kritéria kvality triangulace

- jednoduchost algoritmu, snadná implementace
- převod do vyšších dimenzí
- optimální tvar trojúhelníkové sítě
- malá citlivost na singulární případy, kdy triangulace není jednoznačná nebo ji nelze sestavit
- triangulace by měla produkovat pravidelné trojúhelníky vhodných tvarů (blíží se rovnostranným)

□ některé požadavky v kontrastu

- triangulační algoritmy patří mezi jedny z nejvíce teoreticky rozpracované postupy

Triangulace

- **Volba triangulace** – co je nutné zohlednit
 - **tvár trojúhelníků**
 - triangulace by měla produkovat **pravidelné trojúhelníky** (důležité při tvorbě digitálního modelu terénu)
 - **povinné hrany**
 - možnost vkládat povinné hrany a modifikovat tvar triangulace
 - **triangulace nekonvexní oblasti nebo oblasti obsahující díry**
 - v mapách se triangulace neprovádí např. pro vodní plochy, budovy, ...

Triangulace

□ Dělení triangulací

■ podle geometrické konstrukce

- Delaunay triangulace
- Greedy triangulace
- MWT – Minimum Weight Triangulation
- triangulace s povinnými hranami – Constrained Triangulation
- datově závislé triangulace

■ podle použitých kritérií

- lokálně optimální triangulace
- globálně optimální triangulace
- multikriteriálně optimalizované triangulace

- vlastnosti triangulace se posuzují ve vztahu k těmto kritériím

Triangulace

□ Lokálně optimální triangulace

- každý čtyřúhelník tvořený dvojicí trojúhelníků se společnou stranou je triangularizován optimálně vzhledem k zadanému kritériu
- pro danou množinu bodů v rovině existuje více lokálně optimálních triangulací, každá z nich optimalizuje jiné kritérium

□ Globálně optimální triangulace

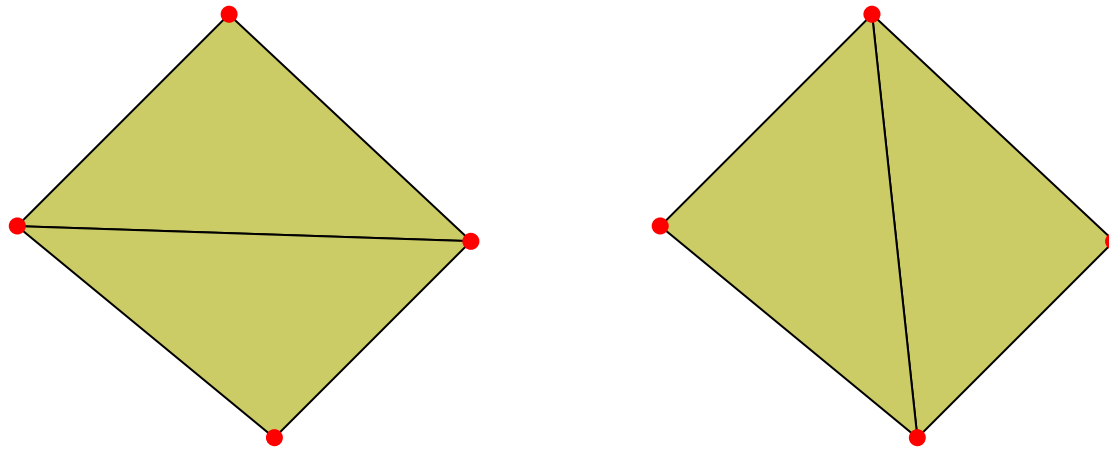
- všechny trojúhelníky triangulace jsou optimální vzhledem k zadanému kritériu
- neexistuje jiná triangulace, která by dosáhla alespoň u jednoho trojúhelníku lepší hodnoty posuzovaného kritéria
- je současně lokálně optimální

□ Multikriteriálně optimalizované triangulace

- kombinace několika lokálních či globálních kritérií
- doposud nejsou známy efektivní algoritmy, dlouhé výpočetní časy

Triangulace

- **Př.** 4 body v rovině (všechny leží na konvexní obálce) a jejich možné triangulace



- existují pouze dvě různé triangulace



- **vzhledem k posuzovanému kritériu je jedna z triangulací optimální**

Triangulace

□ Lokální kritéria

- jsou založeny na geometrických zákonitostech

■ nejčastěji užívaná kritéria

- minimální/maximální úhel v trojúhelníku
- minimální/maximální výška v trojúhelníku
- minimální/maximální poloměr vepsané kružnice
- minimální/maximální poloměr opsané kružnice
- minimální/maximální plocha trojúhelníku
- úhel mezi normálami sousedních trojúhelníků
- ...

- nejčastěji užíváno první kritérium

Triangulace

□ Lokální kritéria

■ hodnota nejmenšího úhlu $\alpha(T)$

- trojúhelníky by neměly mít malé úhly, tzv. **max-min úhlové kritérium**
- T^* je optimální $\implies \alpha(T^*) \geq \alpha(T_i), T_i$ jsou možné triangulace
- triangulace T^* je vzhledem k tomuto kritériu narozdíl od T_i optimální, je-li nejmenší úhel generovaný triangulací T^* větší než nejmenší úhel generovaný triangulací T_i

■ hodnota maximálního úhlu $\beta(T)$

- trojúhelníky by neměly mít tupé úhly, tzv. **min-max úhlové kritérium**
- T^* je optimální $\implies \beta(T^*) \leq \beta(T_i), T_i$ jsou možné triangulace
- triangulace T^* je vzhledem k tomuto kritériu narozdíl od T_i optimální, je-li největší úhel generovaný triangulací T^* menší než největší úhel generovaný triangulací T_i

Triangulace

□ Globální kritéria

- optimalizují geometrické parametry všech trojúhelníků v triangulaci
- **nejčastěji užívaná kritéria**
 - součet délek hran
 - povinné hrany
 - ...

Triangulace

□ Globální kritéria

■ Součet délek hran

- součet délek hran – minimální
- triangulace minimalizující součet délek hran – MWT (Minimal Weight Triangulation)

■ Povinné hrany

- předem definované hrany uvnitř triangulace – Constrained Triangulation
- taková triangulace není lokálně optimální
- při tvorbě digitálního modelu terénu lze do takové triangulace zadat charakteristické terénní tvary a vylepšit tak modelování terénu

Triangulace


□ Greedy triangulace

- hladová triangulace
- triangulace složená z nejkratších možných neprotínajících se hran
- **vlastnosti GT**
 - jednoznačné za předpokladu, že neexistují stejně dlouhé hrany
 - **necitlivá na úhlová kritéria** – vytváří trojúhelníky s nejkratšími stranami, trojúhelníky tak nemusí splňovat žádnou speciální geometrickou podmínku
 - síť trojúhelníků **není z tvarového hlediska optimalizována** – do triangulace tak mohou být přidány tvarově nevhodné trojúhelníky
 - **jednoduchá implementace**
 - výsledná triangulace se blíží MWT

Triangulace

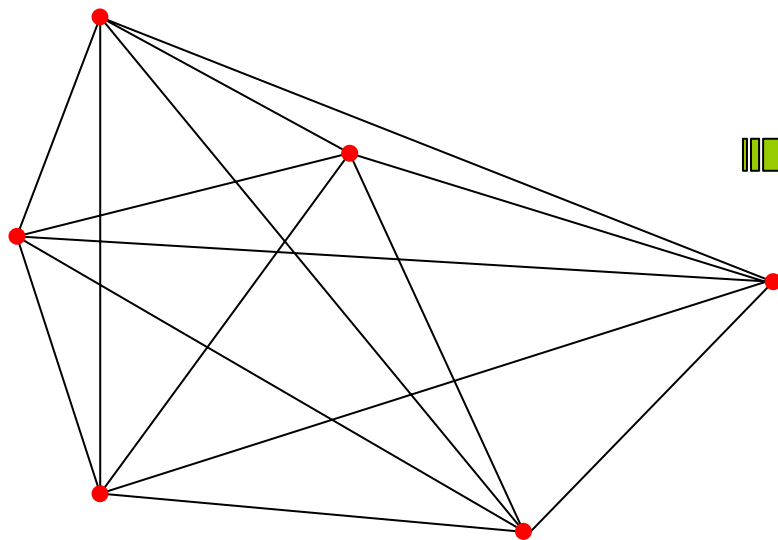
□ Greedy triangulace

■ algoritmus

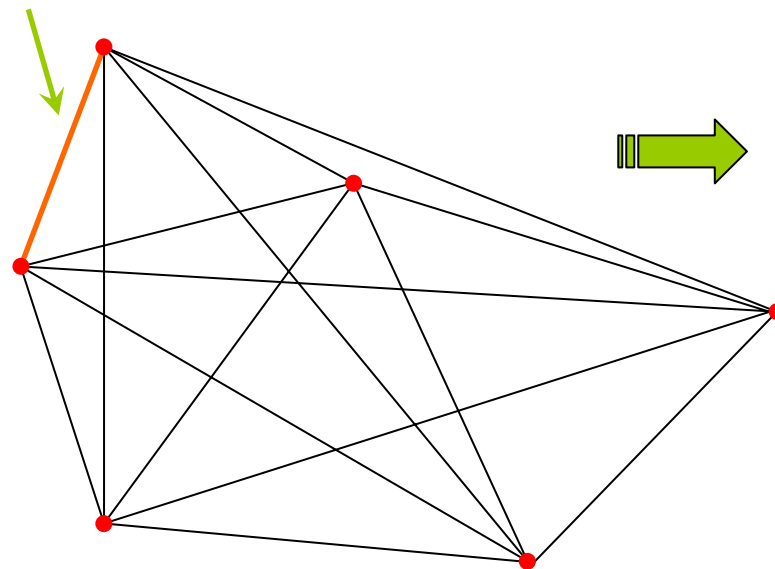
- vytvoří všechny potenciální hrany
- setřídí vzestupně hrany podle délky  seznam hran
 $n(n-1)/2$
- do výsledné triangulace se postupně přidávají hrany – začíná se nejkratší
 - dokud seznam hran není prázdný nebo dokud počet hran v triangulaci je menší než $3n - 6$
 - hrana ze seznamu se do triangulace přidá, pokud neprotíná žádnou hranu, která už v triangulaci je

Triangulace

$$n = 6 \implies 6(6-1)/2 = 15 \text{ hran}$$



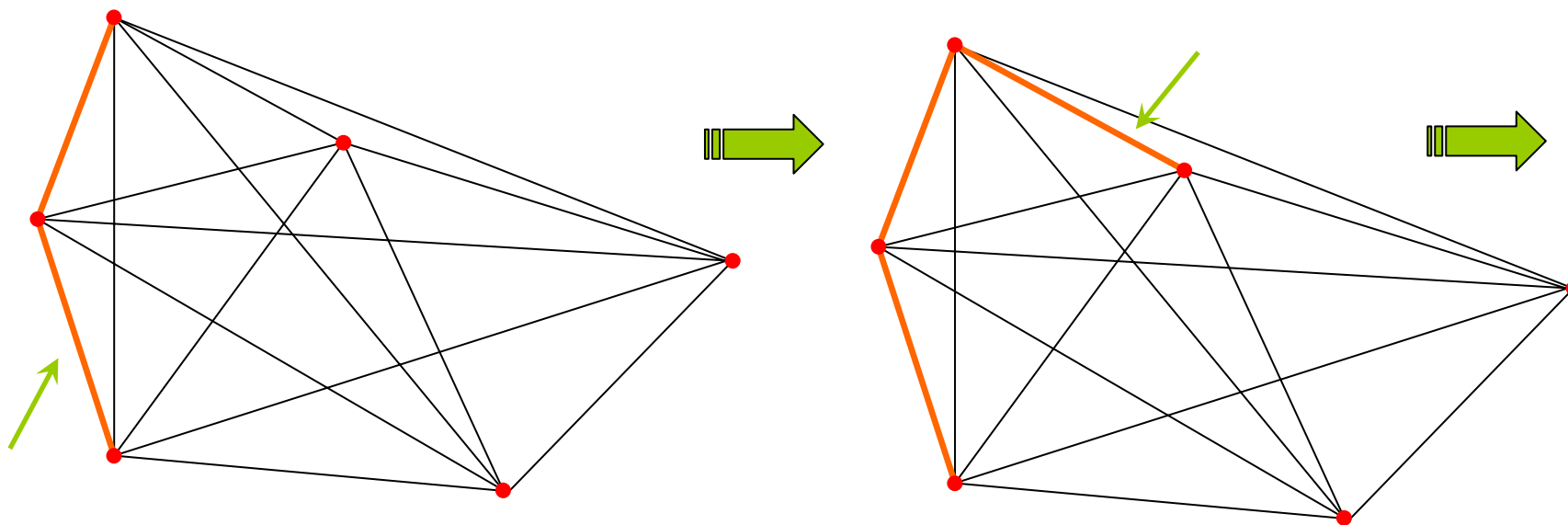
všechny potenciální hrany



1. přidávaná hrana - nejkratší

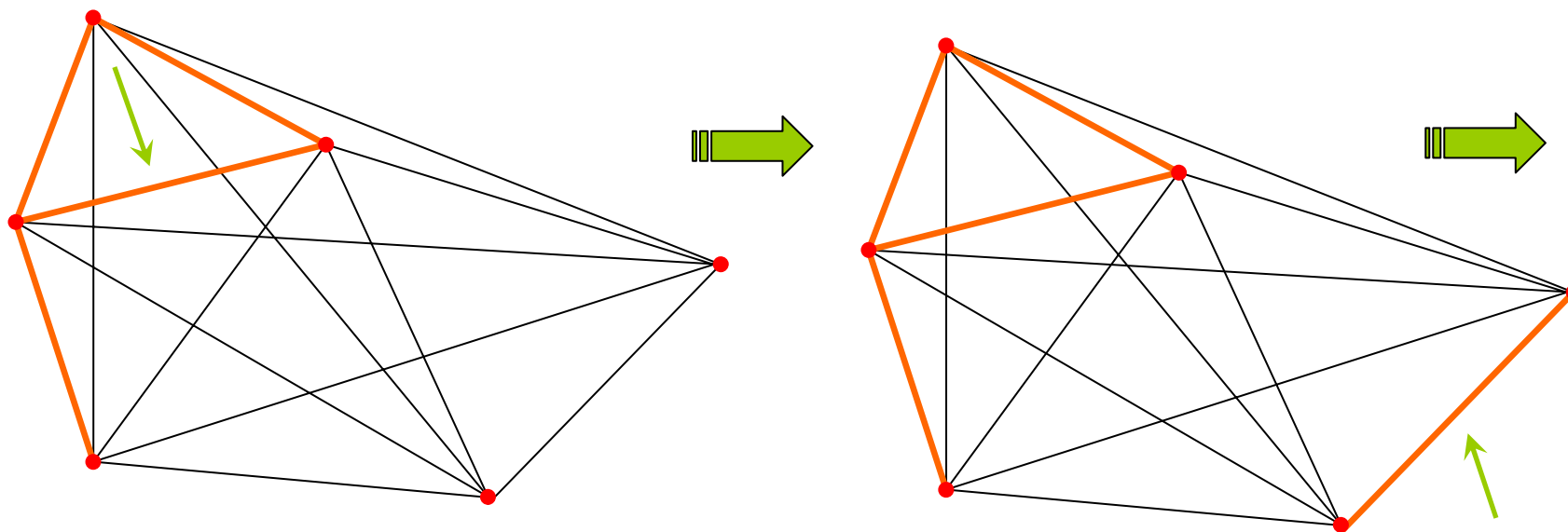
Triangulace

postupně přidáváme hrany do triangulace ...



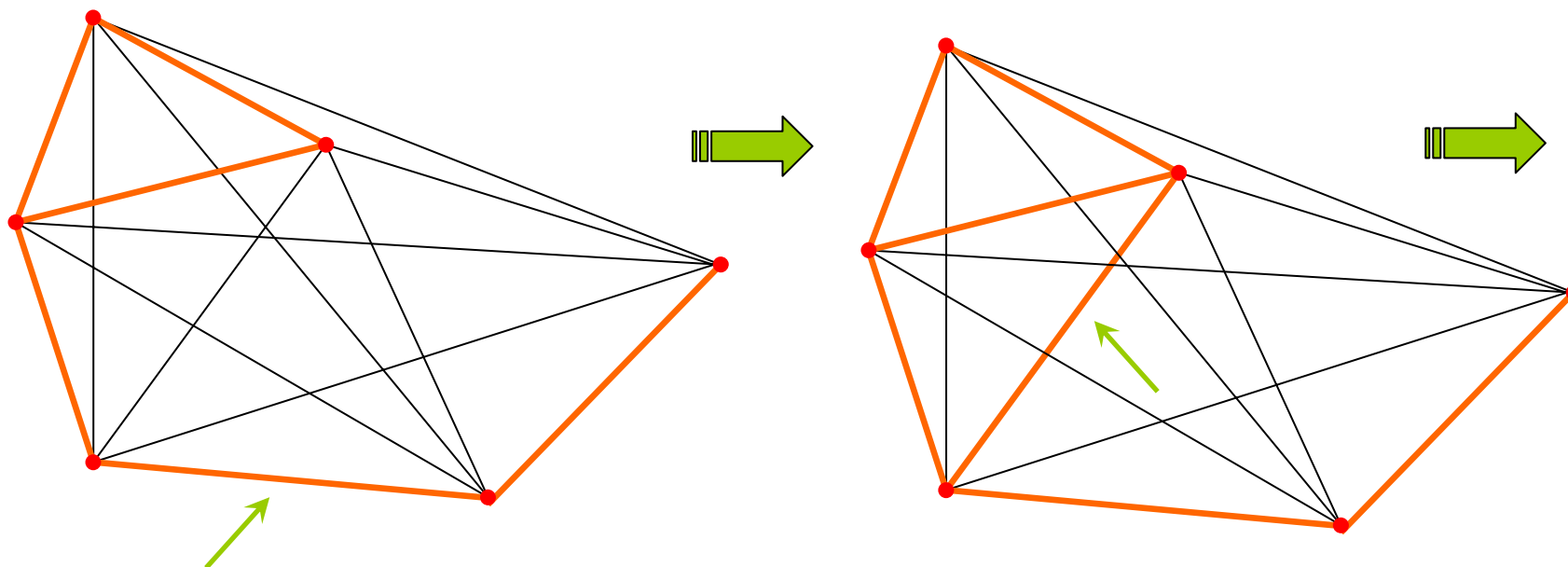
Triangulace

postupně přidáváme hrany do triangulace ...



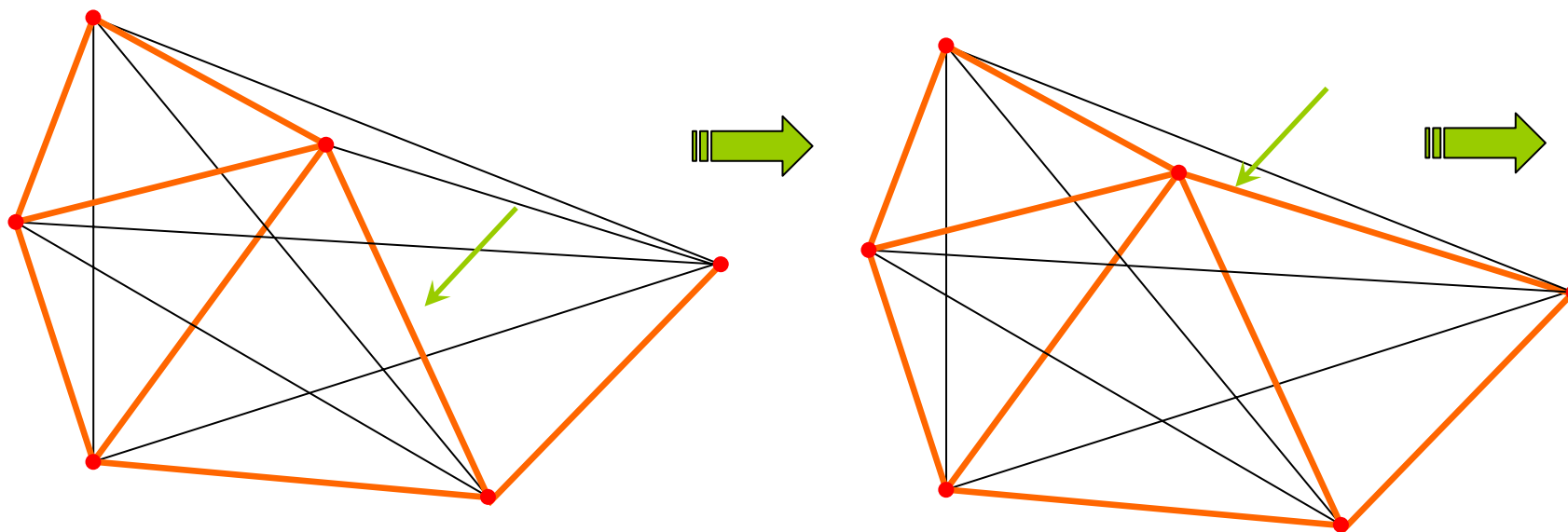
Triangulace

postupně přidáváme hrany do triangulace ...



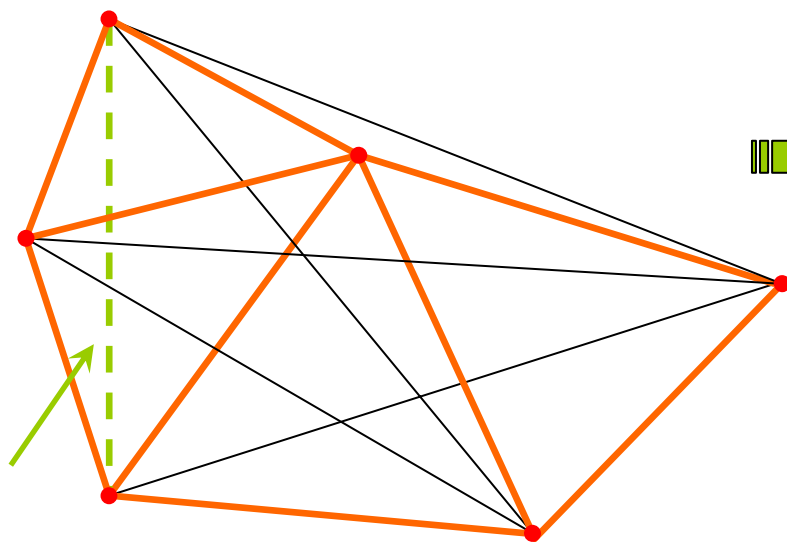
Triangulace

postupně přidáváme hrany do triangulace ...

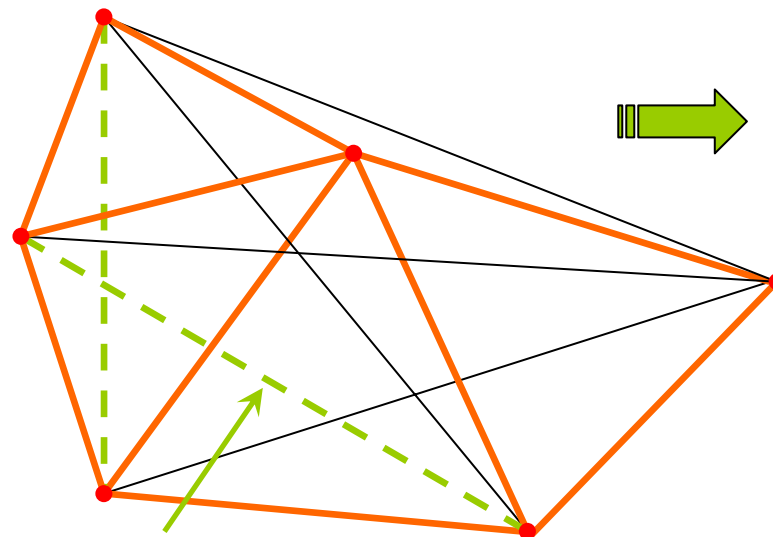


Triangulace

postupně přidáváme hrany do triangulace ...



nelze přidat, protíná
hrany v triangulaci

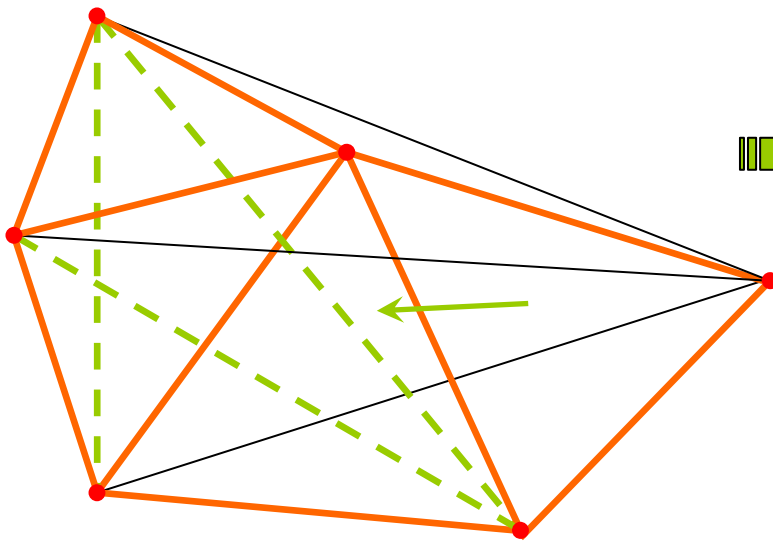


nelze přidat, protíná
hrany v triangulaci

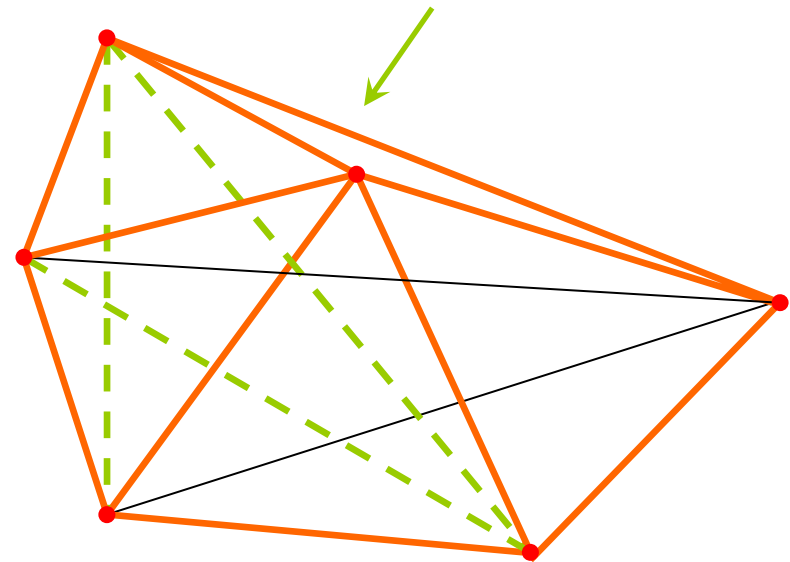


Triangulace

postupně přidáváme hrany do triangulace ...



nelze přidat, protíná
hrany v triangulaci



poslední přidaná hrana, další
by protínaly hrany v triangulaci

Triangulace

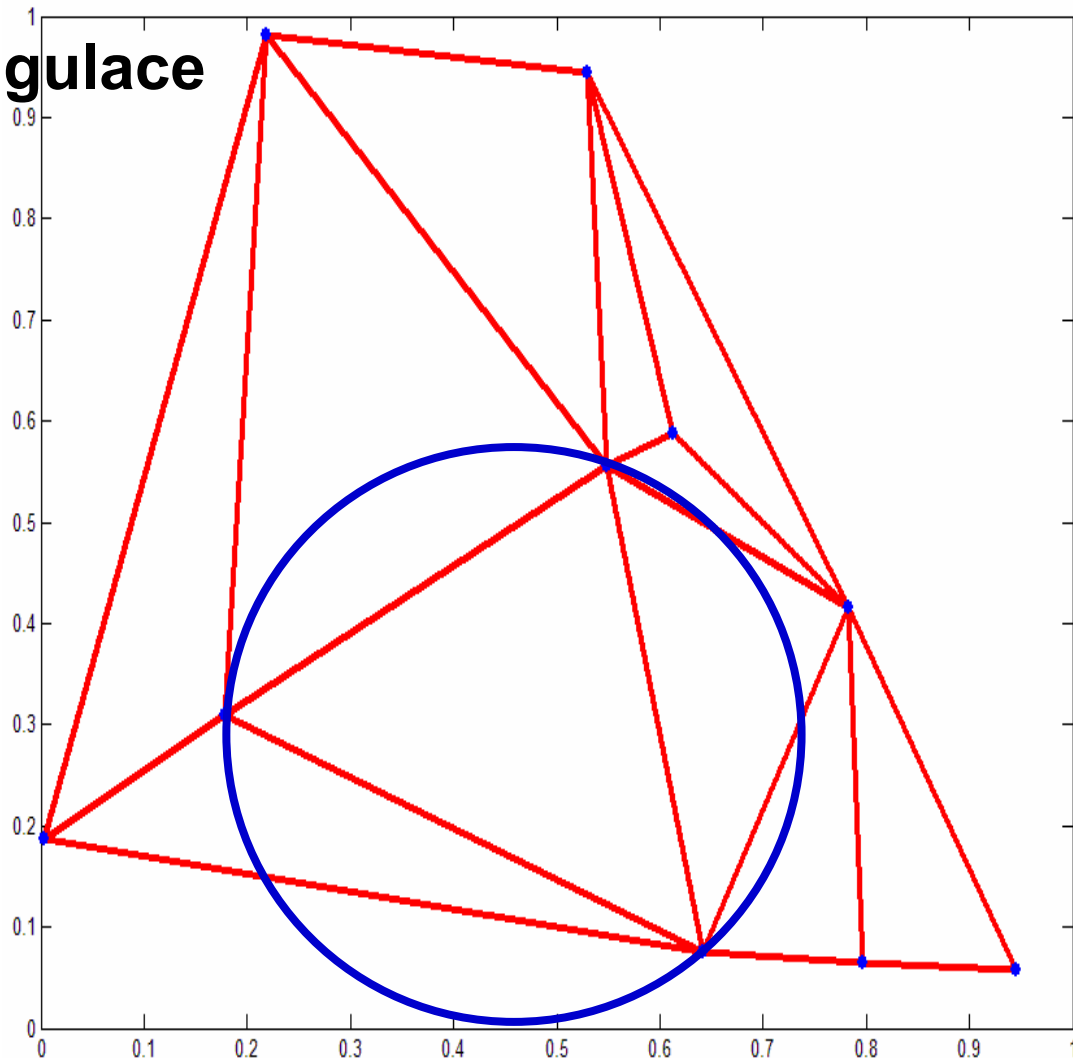
□ Delaunay triangulace

- nejčastěji používaná triangulace
- existuje i ve 3D – Delaunay tetrahedronizace
- **vlastnosti DT**
 - uvnitř **kružnice opsané** libovolnému trojúhelníku $t_i \in T$ **neleží** žádný jiný bod z množiny $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$
 - **maximalizuje minimální úhel**, avšak neminimalizuje maximální úhel
 - je lokálně optimální i globálně optimální vůči kritériu minimálního úhlu
 - je **jednoznačná**, pokud **žádné čtyři body neleží na kružnici**
 - **hranice je konvexní obálka**
 - výsledné trojúhelníky se v porovnání se všemi známými triangulacemi nejvíce blíží rovnostranným trojúhelníkům

Triangulace

□ Delaunay triangulace

**opsaná kružnice
libovolnému
trojúhelníku
neobsahuje žádný
jiný bod**



Triangulace

□ Delaunay triangulace

■ algoritmy

- metoda lokálního zlepšování
- inkrementální vkládání
- algoritmus radiálního zametání
- rozděl a panuj
- (nepřímá konstrukce pomocí Voronoi diagramu)
- ...

Triangulace

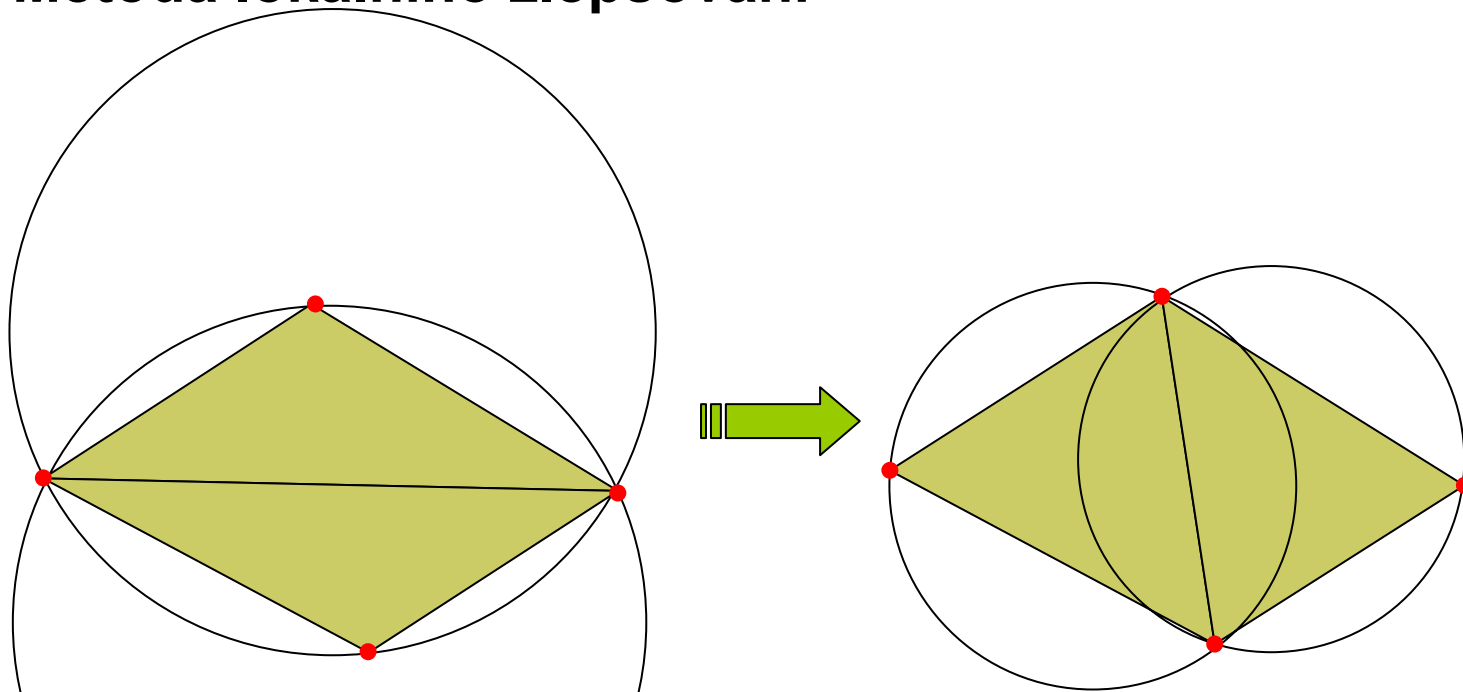
□ Delaunay triangulace

■ Metoda lokálního zlepšování

- metoda je použitelná pouze ve 2D, obtížně převeditelné do vyšší dimenze
- vychází se **z libovolné triangulace**
- provádí se tzv. **legalizace**
 - **modifikují se hrany sdílené dvojicí trojúhelníků** tvořících konvexní čtyřúhelník tak, aby bylo splněno **úhlové kritérium** – **maximalizace minimálního úhlu = prohození diagonál = odstranění nelegálních hran**
 - výsledkem je stav, kdy jsou oba **trojúhelníky legální**, tj. **lokálně optimální vzhledem ke kritériu vnitřního úhlu**

Triangulace

- Delaunay triangulace
 - Metoda lokálního zlepšování



uvnitř opsané kružnice
neleží žádný jiný vrchol

Triangulace

□ Delaunay triangulace

■ Platí

Nechť hrana p_i, p_j inciduje s trojúhelníkem t_1 tvořeným vrcholy p_i, p_j, p_k a trojúhelníkem t_2 tvořeným vrcholy p_i, p_j, p_l a kružnice prochází body p_i, p_j, p_k . Hrana p_i, p_j je **nelegální** právě tehdy, když bod p_l **leží uvnitř kružnice**.

Pokud body p_i, p_j, p_k tvoří konvexní čtyřúhelník a neleží na opsané kružnici, pak **jedna z hran** p_i, p_j nebo p_k, p_l **je nelegální**.

Triangulace

□ Delaunay triangulace

■ Inkrementální vkládání

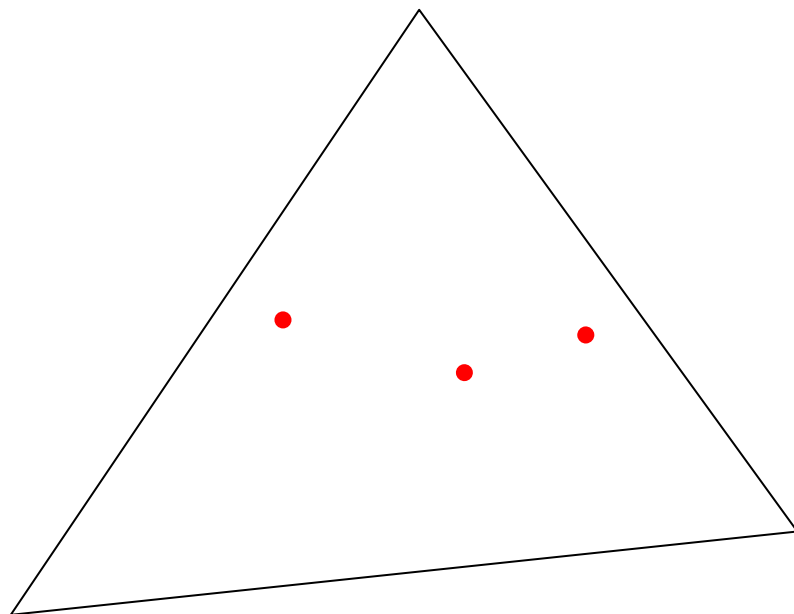
- často používaná metoda, lze použít i ve 3D
- klasický případ rekurzivní úlohy – fáze legalizace
- **princip algoritmu** – zjednodušeně
 - **konstrukce obalujícího trojúhelníku** (simplexu) – obsahuje všechny body vstupní množiny
 - **přidání bodu** do triangulace
 - **nalezení trojúhelníku**, se kterým přidávaný bod inciduje
 - **legalizace** nově vytvořené triangulace
 - **odstranění obklopujícího trojúhelníku**
 - **oříznutí na konvexní obálku**

opakujeme,
dokud v
triangulaci
nejsou všechny
body

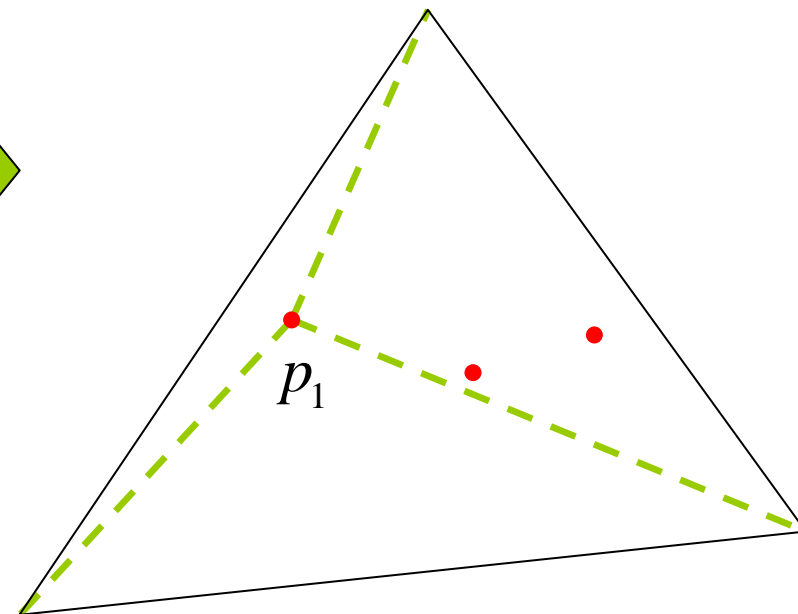
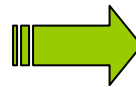
Triangulace

- Delaunay triangulace
 - Inkrementální vkládání

ukázka vkládání bodů



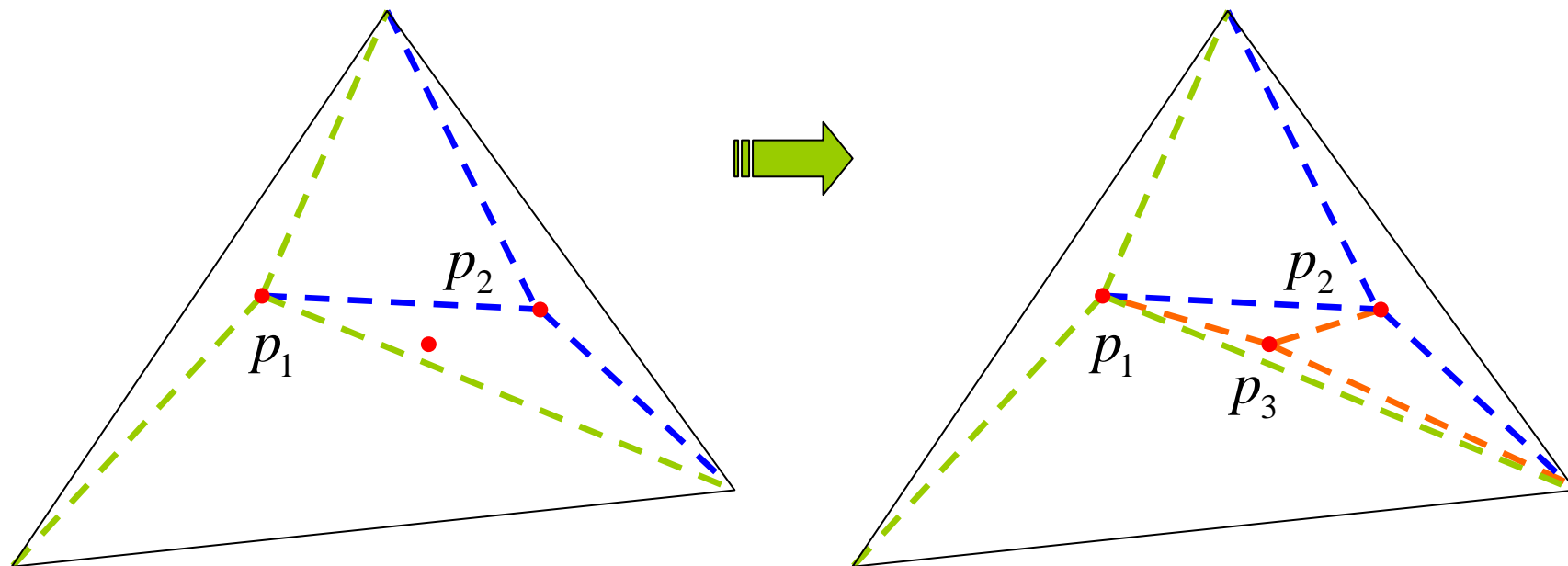
obklopující trojúhelník



postupné vkládání bodů

Triangulace

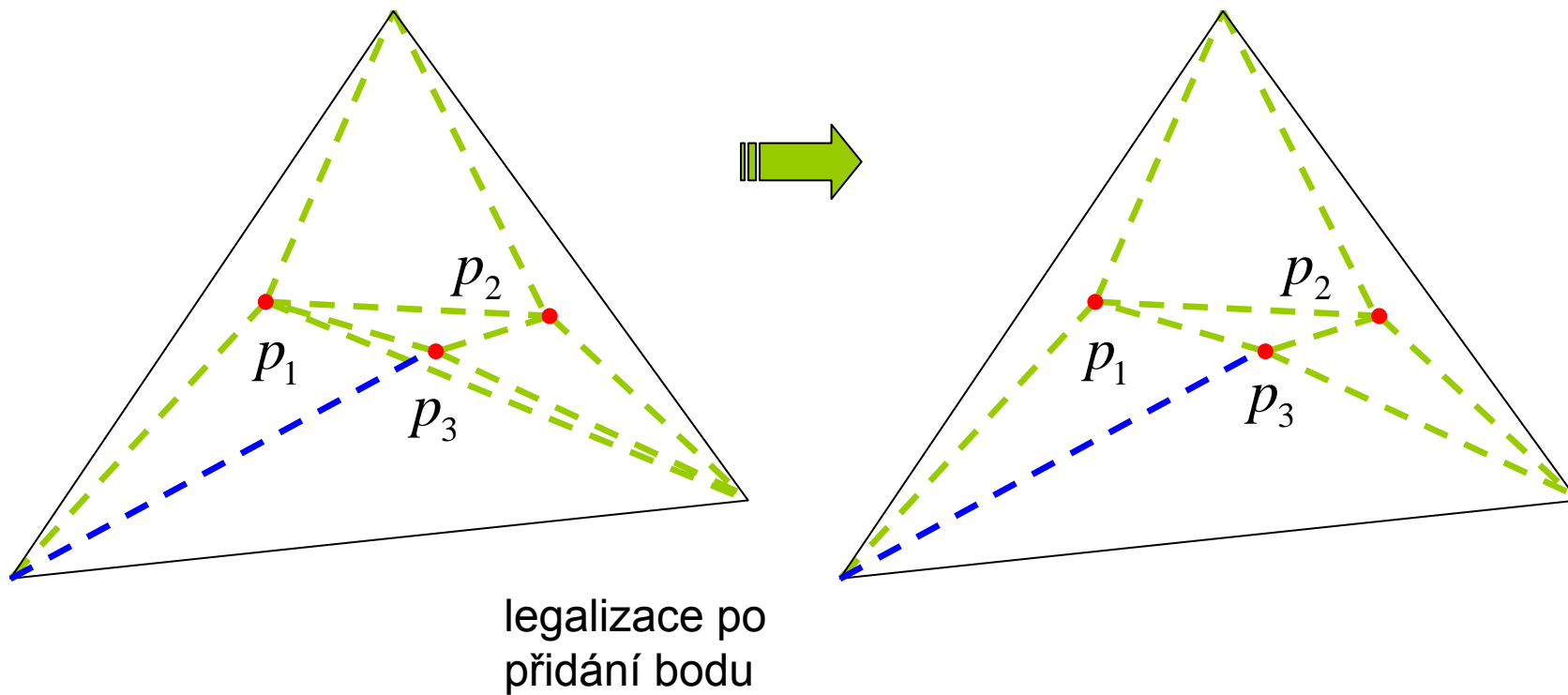
- Delaunay triangulace
 - Inkrementální vkládání



postupné vkládání bodů

Triangulace

- Delaunay triangulace
 - Inkrementální vkládání



Triangulace

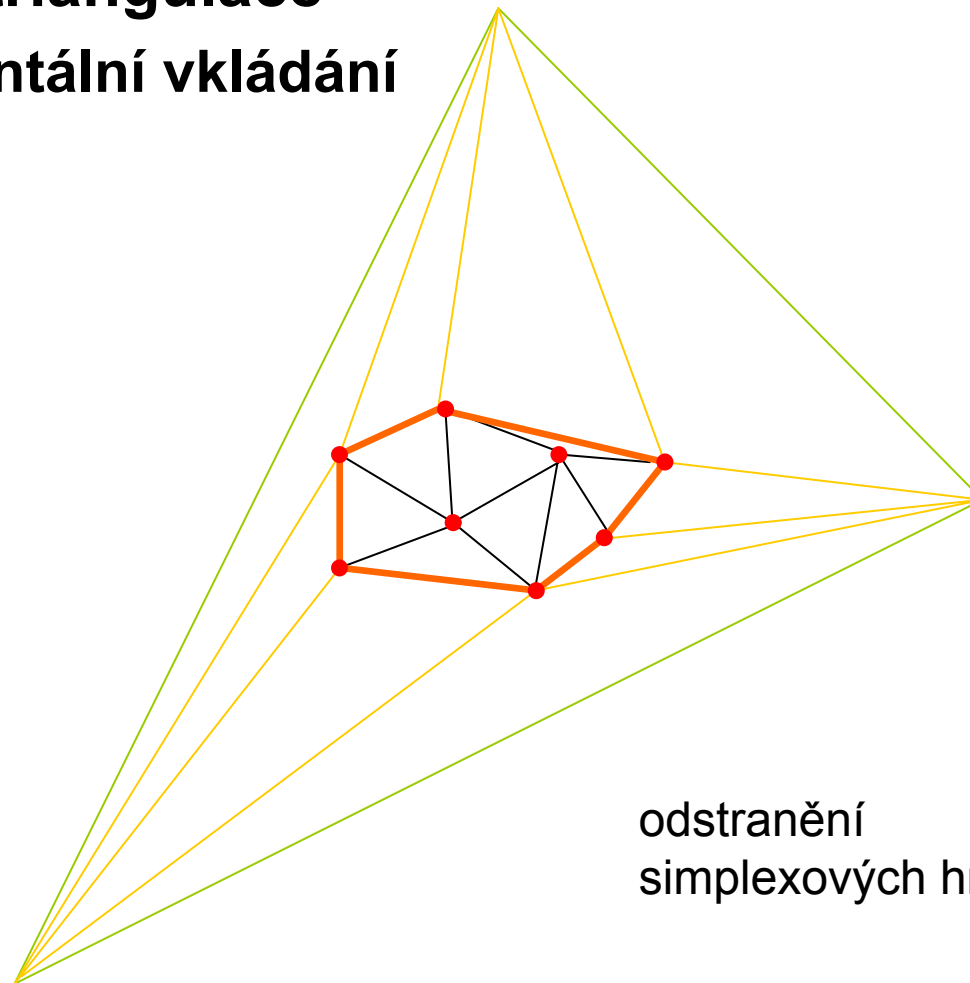
□ Delaunay triangulace

■ Inkrementální vkládání

- **přidání bodu** do triangulace a **nalezení trojúhelníku**, se kterým přidávaný bod inciduje
 - existují tři polohy
 - **bod leží ve vrcholu** – je zanedbán, již vytvořenou triangulaci neovlivní
 - **bod leží na straně** – oba incidující trojúhelníky, v jejichž společné hraně přidávaný bod leží, jsou rozděleny dvojicí úseček jdoucích z přidávaného bodu do protilehlých vrcholů – **vzniknou čtyři trojúhelníky** se společným vrcholem
 - **bod leží uvnitř trojúhelníku** – bod je spojen s jeho vrcholy – **vzniknou tři trojúhelníky**
- **dále legalizace** – někdy ovlivní již vytvořené trojúhelníky – nutné překontrolovat, nutné rozlišit případy

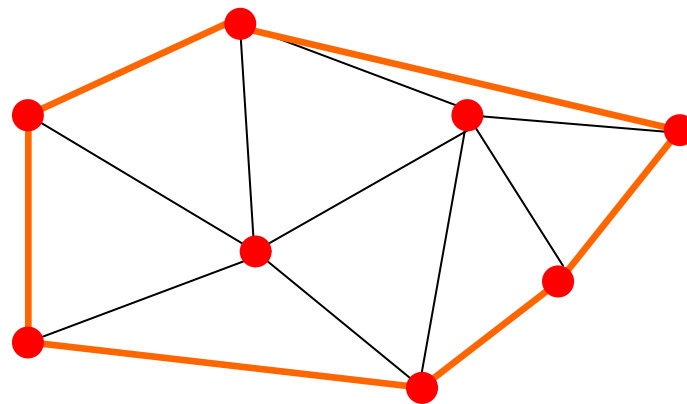
Triangulace

- Delaunay triangulace
 - Inkrementální vkládání



Triangulace

- Delaunay triangulace
 - Inkrementální vkládání



výsledná DT