1 Bodové rozložení četností

1.1 Základní, výběrový a datový soubor

Na množině objektů $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$, která tvoří výběrový soubor rozsahu n a jejíž prvky byly vybrány ze základního souboru E, zjišťujeme hodnoty znaku X. Hodnota znaku X na objektu ϵ_i se značí x_i, $i = 1, \dots, n$. Tyto hodnoty zaznamenáme do jednorozměrného datového souboru $(x_1, \dots, x_n)^T$. Uspořádané hodnoty $x_1 \leq \dots \leq x_n$ tvoří uspořádaný datový soubor $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})^T$ a navzájem různé uspořádané hodnoty $x_{[1]} < \dots < x_{[r]}$, $r \leq n$, tvoří vektor variant $(x_{[1]}, \dots, x_{[r]})^T$.

1.2 Jednorozměrné bodové rozložení četností

Je-li počet variant r malý ve srovnání s rozsahem n výběrového souboru, přiřazujeme četnosti jednotlivým variantám a hovoříme o bodovém rozložení četností. Pro $j = 1, \dots, r$ definujeme

- n_j = počet těch objektů ve výběrovém souboru, pro něž $X = x_{[j]}$ – absolutní četnost varianty $x_{[j]}$ ve výběrovém souboru,
- $p_j = \frac{n_j}{n}$ – relativní četnost varianty $x_{[j]}$ ve výběrovém souboru,
- $N_j = N(X \leq x_{[j]}) = n_1 + \dots + n_j$ – absolutní kumulativní četnost prvních j variant ve výběrovém souboru,
- $F_j = \frac{N_j}{n} = p_1 + \dots + p_j$ – relativní kumulativní četnost prvních j variant ve výběrovém souboru.

Tabulka 1 se nazývá variační řada (nebo též tabulka rozložení četností). Absolutní či relativní četnosti znázorňujeme graficky např. pomocí sloupkového diagramu či polygonu četností.

Tabulka 1: Variační řada znaku X

$x_{[j]}$	n_j	p_j	N_j	F_j
$x_{[1]}$	n_1	p_1	N_1	F_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{[r]}$	n_r	p_r	N_r	F_r

Pomocí relativních četností definujeme četnostní funkci:

$$p(x) = \begin{cases} p_j \text{ pro } x = x_{[j]}, j = 1, \dots, r, \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Pomocí relativních kumulativních četností definujeme empirickou distribuční funkci:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } x < x_{[1]}, \\ F_j \text{ pro } x_{[j]} \leq x < x_{[j+1]}, j = 1, \dots, r-1, \\ 1 \text{ pro } x \geq x_{[r]}. \end{cases}$$

Mezi četnostní funkcí a empirickou distribuční funkcí platí součtový vztah: $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \sum_{t \leq x} p(t)$.

Příklad 1.1. Řešený příklad
Načtěte datový soubor 22-multinom-palmar-lines.txt obsahující údaje o zakončení tří hlavních dlaňových linií (Hi – vysoké; Mi – střední; Li – nízké) a údaje o odstínu barvy vlasů (LiH – světlý; MH – střední; DaH – tmavý) u mužů a žen. Za předpokladu, že znak X popisuje zakončení tří hlavních dlaňových linií mužů, (a) popište jednotlivé varianty znaku X; (b) vytvořte variační řadu; (c) nakreslete sloupkový diagram a polygon četností; (d) nakreslete graf četnostní funkce $p(x)$ a graf empirické distribuční funkce $F(x)$.

Řešení příkladu 1.1
Datový soubor načteme příkazem read.delim(). Z načtených dat vybereme pomocí operátoru [ ] pouze tabulku

obsahující údaje pro muže. Absolutní četnosti n_j jednotlivých variant znaku X získáme jako součty hodnot v jednotlivých sloupcích tabulky. Sloupcové součty vypočítáme pomocí funkce apply() s argumenty MARGIN = 2 a FUN = sum. Variační řadu vytvoříme pomocí funkce variacni.rada(), implementované v R-skriptu AS-sbirka-funkce.R, který je součástí této publikace. Vstupním argumentem funkce variacni.rada() je vektor údajů o typu zakončení tří hlavních dlaňových linií, který vytvoříme pomocí příkazu rep().

```
data <- read.delim('22-multinom-palmar-lines.txt', sep = '\t', dec = '.', row.names = 1)
palmar.PM <- apply(data[, 1:3], MARGIN = 2, FUN = sum)
palmar.DM <- rep(3:1, palmar.PM)
source('AS-sbirka-funkce.R')
vr <- variacni.rada(palmar.DM, row.names = c('nizka', 'stredni', 'vysoka'))
```

```
        nj   pj  Nj   Fj
nizke   23 0,23  23 0,23
stredni 33 0,33  56 0,56
vysoke  44 0,44 100 1,00
```

Znak X popisující hlavní zakončení tří hlavních dlaňových linií má tři varianty: (1) vysoké zakončení, (2) střední zakončení, (3) nízké zakončení. Z celkového počtu 100 mužů má 23 mužů (23,00 %) nízké, 33 mužů (33,00 %) střední a 44 mužů (44,00 %) vysoké zakončení tří hlavních dlaňových linií. Z celkového počtu 100 mužů má 23 (23,00 %) mužů nízké, 56 mužů (56,00 %) střední nebo nízké a 100 mužů (100 %) vysoké, střední nebo nízké zakončení tří hlavních dlaňových linií.

Sloupkový diagram vykreslíme pomocí funkce barplot(). Rámeček okolo grafu doplníme příkazem box(). Popisky s údaji o absolutních a relativních četnostech všech tří variant znaku X vypíšeme příkazem text(). Polygon četností vykreslíme pomocí funkce plot() s argumentem type = 'o'. Názvy variant znaku X doplníme do grafu samostatným vykreslením osy x pomocí příkazu axis() s argumentem side = 1. Stejným příkazem s argumentem side = 2 potom vykreslíme osu y. Sloupkový diagram a polygon četností jsou zobrazeny na obrázku 1.

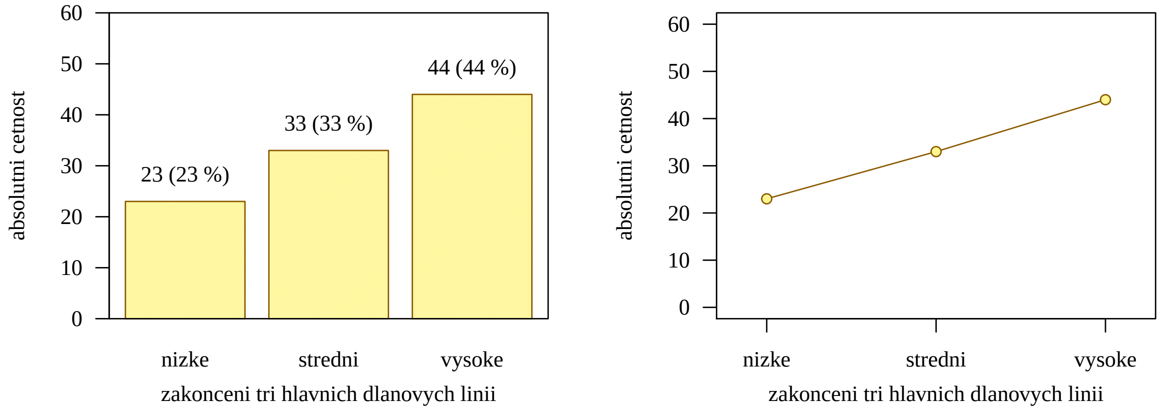
```
nj <- vr$nj; pj <- vr$pj
barplot(nj, width = 1, space = 0.2, col = 'khaki1', border = 'orange4', density = 80,
        ylim = c(0, 60), las = 1, xlab = 'zakonceni tri hlavnich dlanovych linii',
        ylab = 'absolutni cetnost', names = c('nizke', 'stredni', 'vysoke'))
box(bty = 'o')
text(seq(0.7, 5, by = 1.2), nj + 5, labels = paste(nj, ' (',pj * 100, ' %)', sep = '' ))

plot(nj, type = 'o', xlim = c(0.8, 3.2), ylim = c(0, 60), axes = F, lwd = 1, pch = 21,
     col = 'orange4', bg = 'khaki1', xlab = 'zakonceni tri hlavnich dlanovych linii',
     ylab = 'absolutni cetnost')
box(bty = 'o')
axis(side = 1, at = 1:3, labels = c('nizke', 'stredni', 'vysoke'))
axis(side = 2, las = 1)
```

Graf četnostní funkce $p(x)$ vykreslíme pomocí funkce plot() s argumentem type = 'h'. Do grafu doplníme body ve výšce odpovídající hodnotám četnostní funkce $p(x)$ pomocí příkazu points(). Graf empirické distribuční funkce $F(x)$ vykreslíme pomocí funkce plot() aplikované na výstup funkce ecdf(), která vrací hodnoty empirické distribuční funkce $F(x)$. Graf četnostní funkce $p(x)$ a graf empirické distribuční funkce $F(x)$ jsou zobrazeny na obrázku 2.

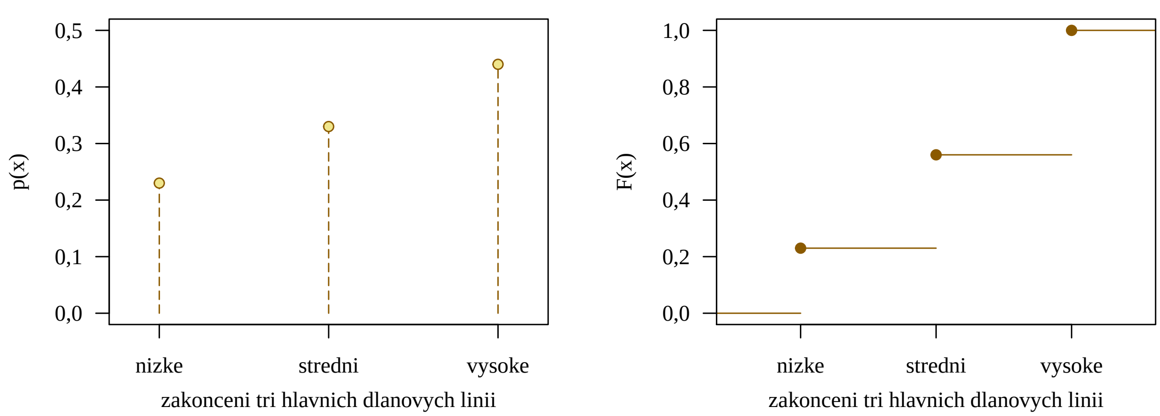
```
plot(pj, type = 'h', lty = 5, xlim = c(0.8, 3.2), ylim = c(0, 0.50), axes = F,
     col = 'orange4', xlab = 'zakonceni tri hlavnich dlanovych linii', ylab = 'p(x)')
points(1:3, pj, pch = 21, col = 'orange4', bg = 'khaki')
box(bty = 'o')
axis(side = 1, at = 1:3, labels = c('nizke', 'stredni', 'vysoke'))
axis(side = 2, las = 1)

plot(ecdf(palmar.DM), xlim = c(0.5, 3.5), axes = F, col.01line = NA, col = 'orange4',
     xlab = 'zakonceni tri hlavnich dlanovych linii', ylab = 'F(x)', main = '')
```



Obrázek 1: (a) Sloupkový diagram (vlevo); (b) polygon četností (vpravo) pro zakončení tří hlavních dlaňových linií u mužů

```
box(bty = 'o')
axis(side = 1, at = 1:3, labels = c('nizke', 'stredni', 'vysoke'))
axis(side = 2, las = 1)
```



Obrázek 2: (a) Graf četnostní funkce $p(x)$ (vlevo); (b) graf empirické distribuční funkce $F(x)$ (vpravo) pro zakončení tří hlavních dlaňových linií u mužů

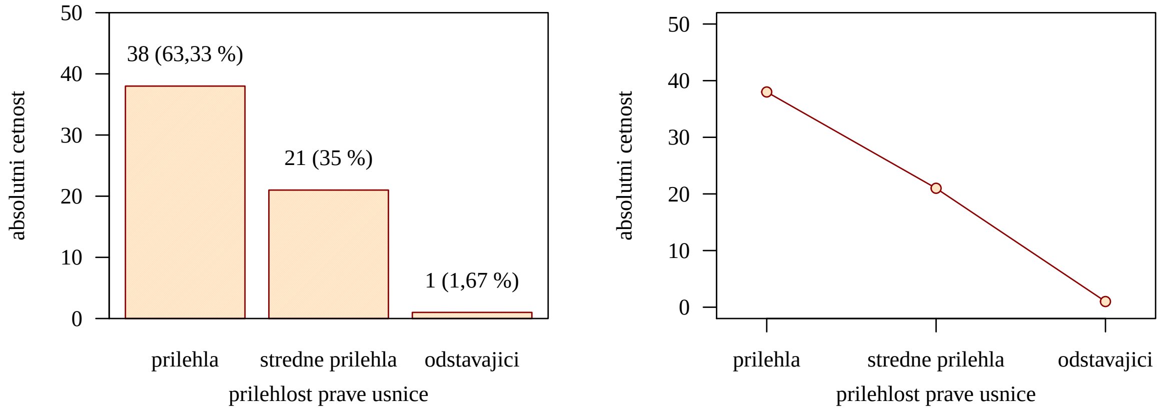
★

Příklad 1.2. Neřešený příklad
Načtěte datový soubor 23-multinom-earlobe.txt obsahující údaje o přilehlosti ušnic (1 – přilehlá; 2 – středně přilehlá; 3 – odstávající) z pravé a z levé strany u mužů a u žen. Za předpokladu, že znak X popisuje přilehlost ušnice z pravé strany u žen, (a) popište jednotlivé varianty znaku X; (b) vytvořte variační řadu; (c) nakreslete sloupkový diagram a polygon četností; (d) nakreslete graf četnostní funkce $p(x)$ a graf empirické distribuční funkce $F(x)$.
Výsledky: (a) tři varianty znaku X: (1) přilehlá ušnice, (2) středně přilehlá ušnice, (3) odstávající ušnice; (b) variační řada viz tabulka 2; (c) sloupkový diagram a polygon četností viz obrázek 3; (d) graf četnostní funkce $p(x)$ a graf empirické distribuční funkce $F(x)$ viz obrázek 4.

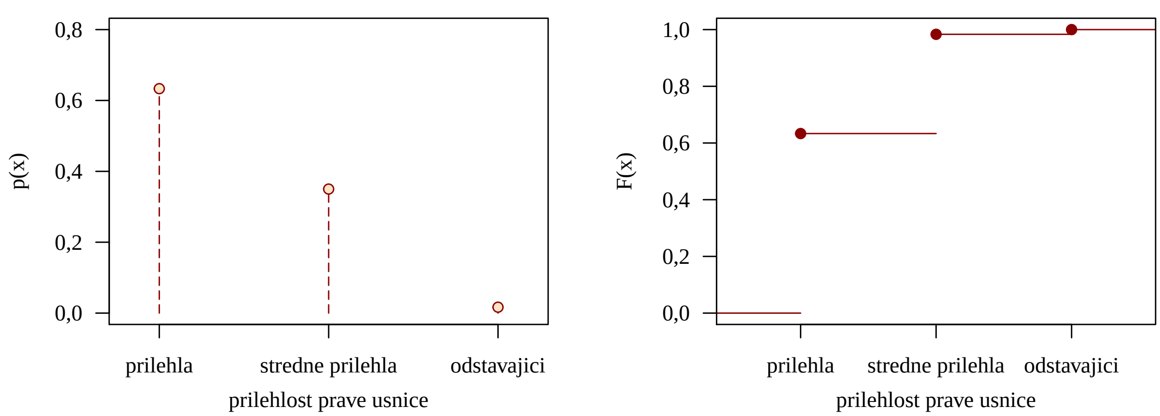
★

Tabulka 2: Variační řada znaku X

	n_j	p_j	N_j	F_j
přilehlá	38,00	0,63	38,00	0,63
středně přilehlá	21,00	0,35	59,00	0,98
odstávající	1,00	0,02	60,00	1,00



Obrázek 3: (c) Sloupkový diagram (vlevo); polygon četností (vpravo) pro přilehlost ušnice z pravé strany u žen



Obrázek 4: (d) Graf četnostní funkce (vlevo); graf empirické distribuční funkce (vpravo) pro přilehlost ušnice z pravé strany u žen

1.3 Dvourozměrné bodové rozložení četností

Máme dvourozměrný datový soubor $(x_1, y_1)^T, \ldots, (x_n, y_n)^T$, kde znak X má r variant a znak Y má s variant. Pak definujeme:

- n_{jk} = počet těch objektů ve výběrovém souboru, pro něž $X = x_{[j]}$ a současně $Y = y_{[k]}$ – simultánní absolutní četnost dvojice $(x_{[j]}, y_{[k]})^T$ ve výběrovém souboru,
- $p_{jk} = \frac{n_{jk}}{n}$ – simultánní relativní četnost dvojice $(x_{[j]}, y_{[k]})^T$ ve výběrovém souboru,
- $n_{j.} = N(X = x_{[j]}) = n_{j1} + \cdots + n_{js}$ – marginální absolutní četnost varianty $x_{[j]}$,
- $p_{j.} = \frac{n_{j.}}{n} = p_{j1} + \cdots + p_{js}$ – marginální relativní četnost varianty $x_{[j]}$,
- $n_{.k} = N(Y = y_{[k]}) = n_{1k} + \cdots + n_{rk}$ – marginální absolutní četnost varianty $y_{[k]}$,
- $p_{.k} = \frac{n_{.k}}{n} = p_{1k} + \cdots + p_{rk}$ – marginální relativní četnost varianty $y_{[k]}$.

Simultánní a marginální četnosti zapisujeme do kontingenční tabulky (viz tabulka 3).

Tabulka 3: Kontingenční tabulka simultánních a marginálních absolutních četností

	Y			
X	$y_{[1]}$	$\ldots$	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
$x_{[1]}$	n_{11}	$\ldots$	n_{1s}	$n_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{[r]}$	n_{r1}	$\ldots$	n_{rs}	$n_{r.}$
$n_{.k}$	$n_{.1}$	$\ldots$	$n_{.s}$	n

Pomocí simultánních relativních četností zavedeme simultánní četnostní funkci:

$$p(x,y) = \begin{cases} p_{jk} \text{ pro } x = x_{[j]}, y = y_{[k]}, j = 1, \ldots, r; k = 1, \ldots, s, \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Pomocí marginálních relativních četností zavedeme marginální četnostní funkce $p_1(x)$, $p_2(y)$:

$$p_1(x) = \begin{cases} p_{j.}(x) \text{ pro } x = x_{[j]}, j = 1, \ldots, r, \\ 0 \text{ jinak,} \end{cases}$$

$$p_2(y) = \begin{cases} p_{.k}(y) \text{ pro } y = y_{[k]}, k = 1, \ldots, s, \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Mezi simultánní četnostní funkcí a marginálními četnostními funkcemi platí vztahy: $p_1(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p(x,y)$, $p_2(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p(x,y)$.

Znaky X a Y jsou v daném výběrovém souboru četnostně nezávislé, právě když pro $\forall j = 1, \ldots, r$, $\forall k = 1, \ldots, s$ platí: $p_{jk} = p_{j.}p_{.k}$ neboli pro $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $p(x,y) = p_1(x)p_2(y)$.

Sloupcově podmíněná relativní četnost varianty $x_{[j]}$ za předpokladu $y_{[k]}$: $p_{j(k)} = \frac{n_{jk}}{n_{.k}}$. Řádkově podmíněná relativní četnost varianty $y_{[k]}$ za předpokladu $x_{[j]}$: $\frac{n_{jk}}{n_{j.}}$. Podmíněné relativní četnosti zapisujeme do kontingenční tabulky.

Dvourozměrné rozložení četností graficky znázorníme pomocí dvourozměrného tečkového diagramu. Na vodorovnou osu vyneseme varianty znaku X, na svislou varianty znaku Y a do příslušných průsečíků nakreslíme tolik teček, jaká je absolutní četnost dané dvojice variant. Dále můžeme vykreslit graf simultánní četnostní funkce $p(x,y)$ a grafy marginálních četnostních funkcí $p_1(x)$ a $p_2(y)$.

Příklad 1.3. Řešený příklad

Načtěte datový soubor 22-multinom-palmar-lines.txt. Za předpokladu, že znak X popisuje odstín barvy vlasů a znak Y popisuje zakončení tří hlavních dlaňových linií u mužů, (a) popište jednotlivé varianty znaku X, resp. znaku Y; (b) vytvořte kontingenční tabulku simultánních absolutních, resp. relativních četností; (c) vytvořte kontingenční tabulku řádkově, resp. sloupcově podmíněných relativních četností; (d) ověřte četnostní nezávislost znaků X a Y; (e) nakreslete graf simultánní četnostní funkce $p(x, y)$; (f) nakreslete graf marginální četnostní funkce znaku X, tj. $p_1(x)$, resp. znaku Y, tj. $p_2(y)$.

Řešení příkladu 1.3

Datový soubor načteme příkazem read.delim(). Pomocí operátoru [,] vybereme z tabulky pouze sloupce týkající se mužů. Sloupce v tabulce přeuspořádáme tak, aby pořadí typu zakončení tří hlavních dlaňových linií bylo od nejnižšího po nejvyšší. Výsledná tabulka je rovnou kontingenční tabulkou simultánních absolutních četností. Kontingenční tabulku simultánních relativních četností získáme příkazem prop.table().

```r
data <- read.delim('22-multinom-palmar-lines.txt', sep = '\t', dec = '.', row.names = 1)
data.M <- data[, 3:1]
KT.abs <- data.frame(data.M, row.names = c('svetle', 'stredni', 'tmave'))
names(KT.abs) <- c('nizke', 'stredni', 'vysoke')
```

```
        nizke  stredni  vysoke
svetle      4        6       6
stredni     7       15      20
tmave      12       12      18
```

```r
KT.rel <- prop.table(KT.abs)
```

```
        nizke  stredni  vysoke
svetle   0,04     0,06    0,06
stredni  0,07     0,15    0,20
tmave    0,12     0,12    0,18
```

Znak X popisující odstín barvy vlasů u mužů má tři varianty: (1) světlý odstín, (2) střední odstín, (3) tmavý odstín. Znak Y popisující zakončení tří hlavních dlaňových linií u mužů má rovněž tři varianty: (1) nízké zakončení, (2) střední zakončení, (3) vysoké zakončení. V datovém souboru se vyskytují čtyři muži (4 %) se světlým odstínem barvy vlasů a s nízkým zakončením tří hlavních dlaňových linií, šest mužů (6 %) se světlým odstínem barvy vlasů a se středním zakončením tří hlavních dlaňových linií, sedm mužů (7 %) středním odstínem barvy vlasů a s nízkým zakončením tří hlavních dlaňových linií, apod.

Kontingenční tabulku řádkově podmíněných relativních četností získáme příkazem prop.table() s argumentem margin = 1. Kontingenční tabulku sloupcově podmíněných relativních četností získáme příkazem prop.table() s argumentem margin = 2. Prvním vstupním argumentem příkazu bude kontingenční tabulka absolutních četností ve tvaru matice. Proměnnou typu data.frame převedeme na proměnnou typu matrix příkazem as.matrix().

```r
prop.T.r <- prop.table(as.matrix(KT.abs), margin = 1)
```

```
         nizke  stredni vysoke
svetle  0,2500   0,3750 0,3750
stredni 0,1667   0,3571 0,4762
tmave   0,2857   0,2857 0,4286
```

Ze všech mužů, kteří měli světlý odstín barvy vlasů, mělo 25,00 % nízké, 37,50 % střední a 37,50 % vysoké zakončení tří hlavních dlaňových linií. Ze všech mužů, kteří měli střední odstín barvy vlasů, mělo 16,67 % nízké, 35,71 % střední a 47,62 % vysoké zakončení tří hlavních dlaňových linií. Ze všech mužů, kteří měli tmavý odstín barvy vlasů, mělo 28,57 % nízké, 28,57 % střední a 42,86 % vysoké zakončení tří hlavních dlaňových linií.

```r
prop.T.s <- prop.table(as.matrix(KT.abs), margin = 2)
```

```
        nizke stredni vysoke
svetle  0,1739  0,1818 0,1364
stredni 0,3043  0,4545 0,4545
tmave   0,5217  0,3636 0,4091
```

Ze všech mužů, kteří měli nízké zakončení tří hlavních dlaňových linií, mělo 17,39 % světlý, 30,43 % střední a 52,17 % tmavý odstín barvy vlasů. Ze všech mužů, kteří měli střední zakončení tří hlavních dlaňových linií, mělo 18,18 % světlý, 45,45 % střední a 36,36 % tmavý odstín barvy vlasů. Ze všech mužů, kteří měli vysoké zakončení tří hlavních dlaňových linií, mělo 13,64 % světlý, 45,45 % střední a 40,91 % tmavý odstín barvy vlasů.

Četnostní nezávislost ověříme porovnáním simultánních relativních četností p_{jk} (viz kontingenční tabulka relativních četností KT.rel) se součiny marginálních relativních četností $p_{j.}p_{.k}$. Tabulku součinů marginálních relativních četností získáme jako výstup expected funkce chisq.test().

```
pj.p.k <- chisq.test(KT.rel)$expected
```

```
        nizke stredni vysoke
svetle  0,0368  0,0528 0,0704
stredni 0,0966  0,1386 0,1848
tmave   0,0966  0,1386 0,1848
```

Po porovnání simultánních relativních četností p_{jk} se součiny marginálních relativních četností $p_{j.}p_{.k}$ vidíme, že mezi znaky X a Y neexistuje četnostní nezávislost. Například $p_{11} \neq p_{1.}p_{.1}$ $(0,04 \neq 0,0368)$, $p_{23} \neq p_{2.}p_{.3}$ $(0,20 \neq 0,1848)$, $p_{31} \neq p_{3.}p_{.1}$ $(0,12 \neq 0,0966)$, apod.

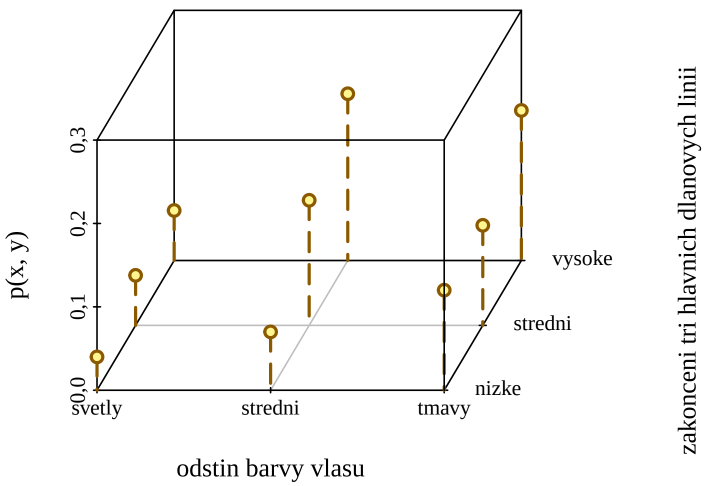
Graf simultánní četnostní funkce $p(x, y)$ (viz obrázek 5) vykreslíme příkazem scatterplot3d() z knihovny scatterplot3d. Vstupními argumenty příkazu je vektor x-ových souřadnic x, vektor y-ových souřadnic y a vektor simultánních relativních četností z příslušných každé dvojici souřadnic $[x_j, y_k]$, $j = 1, \ldots, 3$, $k = 1, \ldots, 3$. Graf simultánní četnostní funkce $p(x, y)$ je zobrazen na obrázku 5.

```
x <- rep(1:3, 3)
y <- rep(1:3, rep(3, 3))
z <- c(as.matrix(KT.rel))
library(scatterplot3d)
scatterplot3d(x, y, z, type = 'h', angle = 65, pch = 21, lwd = 2, lty.hplot = 5,
              color = 'orange4', bg = 'khaki1', y.margin.add = 0.4,
              lab = c(2, 2), xlab = 'odstin barvy vlasu',
              ylab = 'zakonceni tri hlavnich dlanovych linii', zlab = 'p(x, y)',
              x.ticklabs = c('svetly', 'stredni', 'tmavy'),
              y.ticklabs = c('nizke', 'stredni', 'vysoke'))
```

K vykreslení grafů marginálních četnostních funkcí $p_1(x)$ a $p_2(y)$ potřebujeme znát hodnoty marginálních relativních četností. Ty vypočítáme pomocí funkce apply() aplikované na kontingenční tabulku relativních četností. Samotné grafy marginálních četnostních funkcí vykreslíme pomocí příkazu plot() s argumentem type = 'h'. Do grafu dokreslíme body pomocí příkazu points(), okolo grafu vykreslíme rámeček příkazem box() a osy x a y dokreslíme zvlášť pomocí příkazu axis(). Grafy marginálních četnostních funkcí $p_1(x)$ a $p_2(y)$ jsou zobrazeny na obrázku 6.

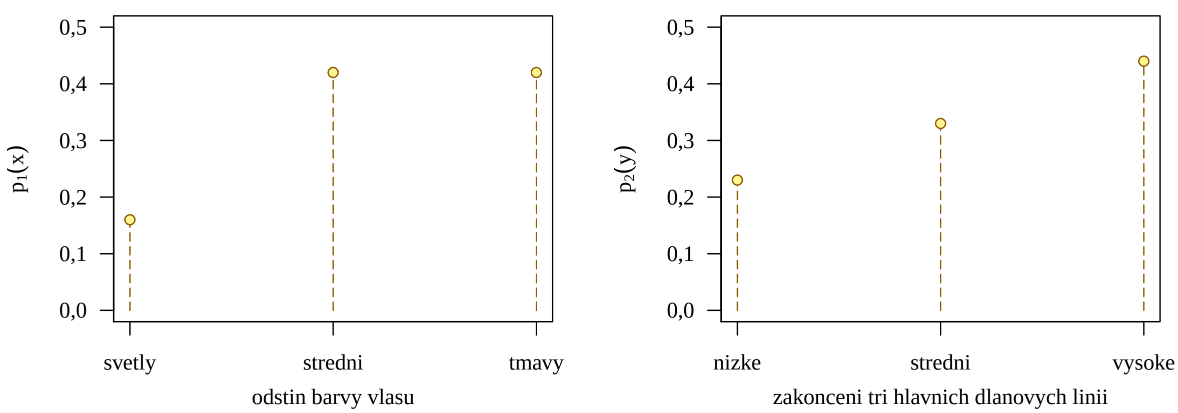
```
pj. <- apply(KT.rel, 1, sum)
p.k <- apply(KT.rel, 2, sum)
plot(pj., type = 'h', lty = 5, ylim = c(0, 0.5), axes = F, col = 'orange4',
     xlab = 'odstin barvy vlasu', ylab = bquote(p[1](x)))
points(1:3, pj., pch = 21, col = 'orange4', bg = 'khaki1')
box(bty = 'o')
axis(side = 1, at = 1:3, labels = c('svetly', 'stredni', 'tmavy'))
axis(side = 2, las = 1)

plot(p.k, type = 'h', lty = 5, ylim = c(0, 0.5), axes = F, col = 'orange4',
```



Obrázek 5: (e) Graf simultánní četnostní funkce $p(x, y)$ pro znaky X a Y

```
     xlab = 'zakonceni tri hlavnich dlanovych linii', ylab = bquote(p[2](y)))
points(1:3, p.k, pch = 21, col = 'orange4', bg = 'khaki1')
box(bty = 'o')
axis(side = 1, at = 1:3, labels = c('nizke', 'stredni', 'vysoke'))
axis(side = 2, las = 1)
```



Obrázek 6: (f) Graf marginální četnostní funkce znaku X, tj. $p_1(x)$ (vlevo), resp. znaku Y, tj. $p_2(y)$ (vpravo)

★

Příklad 1.4. Neřešený příklad

Načtěte datový soubor 20-more-samples-probabilities-pubis.txt. Za předpokladu, že znak X popisuje původ žen a znak Y popisuje změnu kostního reliéfu na vnitřní straně stydké kosti v blízkosti stydké spony u těchto žen, (a) popište jednotlivé varianty znaku X, resp. znaku Y; (b) vytvořte kontingenční tabulku simultánních absolutních, resp. relativních četností; (c) vytvořte kontingenční tabulku řádkově, resp. sloupcově podmíněných relativních četností; (d) ověřte četnostní nezávislost znaků X a Y; (e) nakreslete graf simultánní četnostní funkce $p(x, y)$; (f) nakreslete graf marginální četnostní funkce znaku X, tj. $p_1(x)$, resp. znaku Y, tj. $p_2(y)$.

Výsledky: (a) tři varianty znaku X: (1) evropský původ, (2) africký původ, (3) inuitský původ; tři varianty znaku Y: (1) nepřítomný; (2) stopový až malý stupeň; (3) střední až výrazný stupeň; (b) kontingenční tabulka simultánních absolutních, resp. relativních četností (viz tabulka 4, resp. tabulka 5); (c) kontingenční tabulka řádkově, resp. sloupcově podmíněných relativních četností (viz tabulka 6, resp. tabulka 7); (d) mezi znaky X a Y neexistuje četnostní nezávislost (viz porovnání tabulky 5 s tabulkou 8); (e) graf simultánní četnostní funkce $p(x, y)$ (viz obrázek 7); (f) graf marginální četnostní funkce znaku X, tj. $p_1(x)$, resp. znaku Y, tj. $p_2(y)$ (viz obrázek 8).

Tabulka 4: Kontingenční tabulka simultánních absolutních četností

	nepřítomný	stopový až malý st.	střední až výrazný st.
evropský původ	30	20	10
africký původ	56	37	17
inuitský původ	16	6	13

Tabulka 5: Kontingenční tabulka simultánních relativních četností

	nepřítomný	stopový až malý st.	střední až výrazný st.
evropský původ	0,15	0,10	0,05
africký původ	0,27	0,18	0,08
inuitský původ	0,08	0,03	0,06

Tabulka 6: Kontingenční tabulka řádkově podmíněných relativních četností

	nepřítomný	stopový až malý st.	střední až výrazný st.
evropský původ	0,50	0,33	0,17
africký původ	0,51	0,34	0,15
inuitský původ	0,46	0,17	0,37

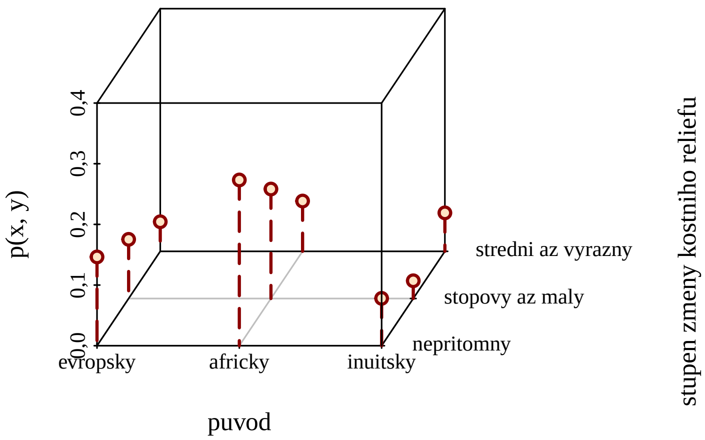
Tabulka 7: Kontingenční tabulka sloupcově podmíněných relativních četností

	nepřítomný	stopový až malý st.	střední až výrazný st.
evropský původ	0,29	0,32	0,25
africký původ	0,55	0,59	0,42
inuitský původ	0,16	0,10	0,32

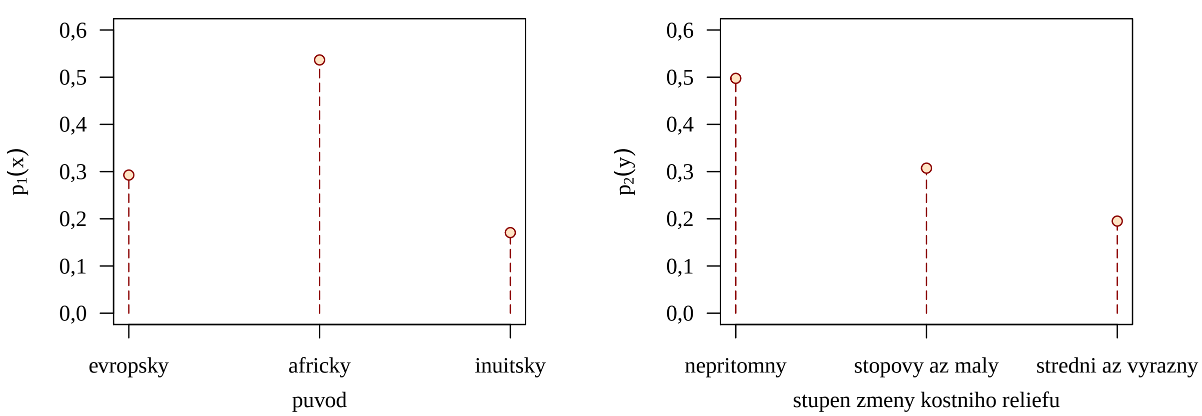
Tabulka 8: Kontingenční tabulka součinů marginálních relativních četností

	nepřítomný	stopový až malý st.	střední až výrazný st.
evropský původ	0,15	0,09	0,06
africký původ	0,27	0,16	0,10
inuitský původ	0,08	0,05	0,03

★



Obrázek 7: (e) Graf simultánní četnostní funkce $p(x, y)$ pro znaky X a Y



Obrázek 8: (f) Graf marginální četnostní funkce znaku X, tj. $p_1(x)$ (vlevo), resp. znaku Y, tj. $p_2(y)$ (vpravo)