Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

Aplikovaná statistika I

Téma 2: Bodové a intervalové rozložení četností

Veronika Bendová

bendova.veroonika@gmail.com

Úvod a motivace

- = pilotní analýza
- motivace: seznámení s daty, prvotní náhled na data, grafické znázornění
- různé typy dat $\rightarrow$ různé způsoby jejich reprezentace a vizualizace
  - kategoriální data
    - pohlaví, vzdělání, počet sourozenců, ...
  - spojitá data
    - výška (v cm), porodní hmotnost (v g), největší šířka/délka mozkovny (v mm), poměr obvodu pasu a boků (bez jednotky) ...
    - můžeme je kategorizovat
- jedna vlastnost / více vlastností najednou
- $\rightarrow$ jednorozměrné/vícerozměrné bodové/intervalové rozložení četností

Jednorozměrné bodové rozložení četností

Dataset: 17-anova-newborns-2.txt
Máme k dispozici údaje o porodní hmotnosti novorozenců z okresní nemocnice získané v období jednoho roku a současně máme k dispozici údaje o počtu starších biologických sourozenců novorozence, pohlaví novorozence a vzdělání matky (Alánová, 2008; soubor 17-anova-newborns-2.txt).

Popis proměnných v datasetu:

- edu.M – vzdělání matky (1 – základní, 2 – střední bez maturity, 3 – střední s maturitou, 4 – vysokoškolské);
- prch.N – počet biologických starších sourozenců (0–9);
- sex.C – pohlaví dítěte (m – muž, f – žena);
- weight.C – porodní hmotnost dítěte (g);
- weight.K – porodní hmotnost dítěte (1 = nízká (nižší než 2 500 g), 2 = norma (2 500 – 4 200 g), 3 = vysoká (větší než 4 200 g))

Příklad 2.1. Načtení datového souboru

Načtěte dataset 17-anova-newborns-2.txt do proměnné data a vypište prvních 5 řádků z načteného souboru. Zjistěte, zda soubor obsahuje neznámé (NA) hodnoty a pokud ano, tak je odstraňte. Potom zjistěte dimenzi datové tabulky.

Řešení příkladu 2.1

```
1 data <- read.delim('17-anova-newborns-2.txt', sep = '\t', dec = '.')
2 head(data, n = 5)
```

```
  edu.M prch.N sex.C weight.C weight.K
1     2      0     m     3470        2
2     2      0     m     3240        2
3     2      0     f     2980        2
4     1      0     m     3280        2
5     3      0     m     3030        2
```

Rozbor příkladu

- jedna porodnice, novorozenci; údaje o vzdělání matky, počtu starších sourozenců, pohlaví a porodní hmotnosti novorozence
- řádek . . . údaje o jednom novorozenci (**objekt**)
- sloupec . . . porodní hmotnost, vzdělání, pohlaví, počet st. sourozenců (**znaky**)
- **znak**
  - **konkrétní číslo**, které má samo o sobě výpovědní hodnotu (porodní hmotnost (v g))
  - **kódování** (0–žena, 1–muž); (1–ZŠ, 2–SŠ, 3–SŠm, 4–VŠ)

Ošetření NA hodnot a dimenze datové tabulky

```
sum(is.na(data)) # 30
data <- na.omit(data)
dim(data) # 1381 x 5
```

Načtená datová tabulka obsahuje údaje o znacích: vzdělání matky (edu.M), počet starších sourozenců novorozence (prch.N), pohlaví novorozence (sex.C), porodní hmotnost novorozence (weight.C) a kategoriální porodní hmotnost novorozence (weight.K). Datový soubor obsahuje celkem ..... NA hodnot. Tabulka data má po odstranění NA hodnot celkem ..... řádků a ..... sloupců. V tabulce jsou tedy po odstranění NA hodnot uloženy údaje o ..... **objektech**, přičemž u každého objektu máme záznamy o ..... **znacích**.

Příklad 2.2. Úprava datového souboru

Upravte označení jednotlivých variant kategorického znaku *porodní hmotnost* tak, aby bylo na první pohled zřejmé, jakou hmotnost novorozenec má (1 = nizka, 2 = norma, 3 = vysoka). Analogicky upravte označení jednotlivých variant znaku *vzdělání matky* (1 – ZS, 2 – SS, 3 – SSm, 4 – VS).

Řešení příkladu 2.2

```
data$weight.K <- factor(data$weight.K, labels = c('nizka', 'norma', 'vysoka'))
data$edu.M <- factor(data$edu.M, labels = c('ZS', 'SS', 'SSm', 'VS'))
head(data, n = 5)
```

```
  edu.M prch.N sex.C weight.C weight.K
1    SS      0     m     3470    norma
2    SS      0     m     3240    norma
3    SS      0     f     2980    norma
4    ZS      0     m     3280    norma
5   SSm      0     m     3030    norma
```

Příklad 2.3. Variační řada
Vytvořte variační řadu znaku X = *vzdělání matky* a variační řadu kategorického znaku Y = *porodní hmotnost novorozence*.

Řešení příkladu 2.3

Znaky *vzdělání* a *kateg. porodní hmotnost* . . . kategoriální proměnné $\rightarrow$ bodové rozložení četností

Variační řada . . . tabulka obsahující pro každou (j-tou) variantu znaku X:

- absolutní četnost n_j
  - kolik matek má ZŠ vzdělání
- relativní četnost p_j
  - poměr matek se ZŠ vzděláním ku celkovému počtu matek
  - $p_j * 100$ - kolik % matek má ZŠ vzdělání?
- absolutní kumulativní četnost N_j
  - kolik matek má SŠm vzdělání nebo nižší
- relativní kumulativní četnost F_j
  - poměr matek se SŠm vzděláním nebo nižším ku celkovému počtu matek
  - $F_j * 100$ - kolik % matek má SŠm vzdělání nebo nižší?

Zaměřme se nejprve na znak X = *vzdělání matky*. Znak má celkem čtyři varianty: ....., ..., ... a ..... . Variační řada je tabulka obsahující pro každou (j-tou) variantu znaku X (a) absolutní četnost ..... ; (b) relativní četnost .....; (c) absolutní kumulativní četnost .....; (d) relativní kumulatiní četnost ..... .

```r
edu <- data$edu.M
n1 <- sum(edu == 'ZS')  # 417
n2 <- sum(edu == 'SS')  # 448
n3 <- sum(edu == 'SSm') # 435
n4 <- sum(edu == 'VS')  # 81
nj <- c(n1, n2, n3, n4)

nj <- as.numeric(table(edu))
n <- sum(nj)
pj <- nj / n
Nj <- cumsum(nj)
Fj <- cumsum(pj)
```

```r
edu.name <- c('ZS', 'SS', 'SSm', 'VS')
edu.rada <- data.frame(nj, pj, Nj, Fj, row.names = edu.name)
round(edu.rada, digits = 4)
```

```
     nj     pj   Nj     Fj
ZS  417 0.3020  417 0.3020
SS  448 0.3244  865 0.6264
SSm 435 0.3150 1300 0.9413
VS   81 0.0587 1381 1.0000
```

Interpretace výsledků: Datový soubor obsahuje údaje o celkovém počtu ..... novorozenců, přičemž v 417 případech (30.20 %) bylo nejvyšší dosažené vzdělání matky ....., v ..... případech (..... %) bylo nejvyšší dosažené vzdělání matky středoškolské bez maturity, apod. Celkem ..... (..... %) matek novorozenců v datovém souboru získalo středoškolské vzdělání bez maturity nebo nižší, celkem 1300 (94.13 %) matek novorozenců získalo ..... nebo ..... vzdělání.

Zaměřme se nyní na znak Y = *porodní hmotnost novorozence*. Protože variační řadu má smysl sestrojovat pouze pro kategoriální / spojitý znak, použijeme k vytvoření variační řady proměnnou weight.C / weight.K. Znak Y má ..... varianty: nízká porodní hmotnost, norma a vysoká porodní hmotnost.

```
source('Sbirka-AS-I-2018-funkce.R')
wei <- data$weight.K
wei.name <- c('nizka', 'norma', 'vysoka')
wei.rada <- variacni.rada(wei, row.names = wei.name)
round(wei.rada, digits = 4)
```

```
         nj     pj   Nj     Fj
nizka   266 0.1926  266 0.1926
norma  1071 0.7755 1337 0.9681
vysoka   44 0.0319 1381 1.0000
```

Interpretace výsledků: Porodní hmotnost novorozenců v datovém souboru se v ..... případech (.....%) pohybovala v normě. Celkem ..... novorozenců (.....%) mělo porodní hmotnost nižší nebo rovnu normě a ..... novorozenců (.....%) mělo porodní hmotnost vysokou, v normě, nebo nižší.

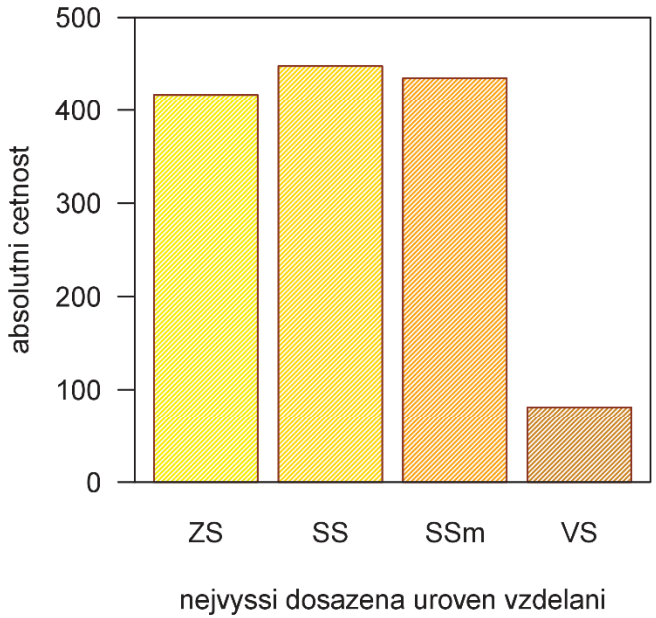
Příklad 2.4. Sloupcový diagram absolutních a relativních četností

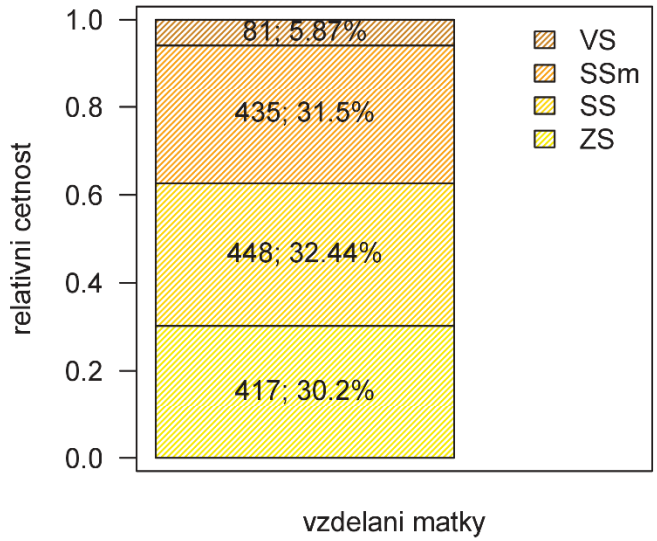
Nakreslete sloupcový diagram absolutních četností a sloupcový diagram relativních četností pro znak $X =$ *vzdělání matky*.

Řešení příkladu 2.4

```
barvy <- c('yellow', 'gold', 'orange', 'orange3')
par(mar = c(4, 4, 2, 2))
barplot(edu.rada$nj, ylim = c(0, 500), density = 50, col = barvy,
        border = 'tomato4', xlab = 'nejvyssi dosazena uroven vzdelani',
        ylab = 'absolutni cetnost', names = edu.name, las = 1)
box(bty = 'o')
```

```
rel.barplot(edu.rada$nj, xlim = c(0.2, 1.8), density = 40, col = barvy,
             xlab = 'vzdelani matky', names = edu.name, axes = T)
box(bty = 'o')
```





Dvourozměrné bodové rozložení četností

Příklad 2.5. Kontingenční tabulka absolutních a relativních simultánních četností
Zaměřme se nyní na oba znaky X = *vzdělání matky* a Y = *kategorizovaná porodní hmotnost novorozence* najednou. Z předchozího textu víme, že znak X má čtyři varianty, znak Y má tři varianty. Celkem tedy můžeme získat $4 * 3 = 12$ různých kombinací variant znaků X a Y. Sestrojte kontingenční tabulku simultánních absolutních četností a kontingenční tabulku simultánních relativních četností znaků X a Y.

Řešení příkladu 2.5

- dva znaky X (r variant $x_{[1]}, \ldots, x_{[r]}$) a Y (s variant $y_{[1]}, \ldots, y_{[s]}$)
  - $\rightarrow$ $r \times s$ kombinací variant znaků X a Y
- kontingenční tabulka absolutních četností

	$y_{[1]}$	$\ldots$	$y_{[s]}$	suma
$x_{[1]}$	n_{11}	$\ldots$	n_{1s}	$n_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{[r]}$	n_{41}	$\ldots$	n_{rs}	$n_{4.}$
suma	$n_{.1}$	$\ldots$	$n_{.3}$	n

  - n_{jk} ... **simultánní absolutní četnost** dvojice znaků $x_{[j]}$ a $y_{[k]}$
  - $n_{j.}$ ... **marginální absolutní četnost varianty** $x_{[j]}$
  - $n_{.k}$ ... **marginální absolutní četnost varianty** $y_{[k]}$

KT relativních četností ... KT absolutních četností dělená celkovým počtem objektů n

V tomto příkladě 2.5 bude kontingenční tabulka absolutních četností velikosti $(4+1) \times (3+1) = 5 \times 4$, a to konkrétně ve tvaru

	nizka	norma	vysoka	suma
ZS	n_{11}	n_{12}	n_{13}	$n_{1.}$
SS	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$n_{2.}$
SSm	n_{31}	n_{32}	n_{33}	$n_{3.}$
VS	n_{41}	n_{42}	n_{43}	$n_{4.}$
suma	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$	n

- n_{jk} je simultánní absolutní četnost j-té varianty znaku X a k-té varianty znaku Y
  - n_{11} ... počet novorozenců s nízkou porodní hmotností a matkou se ZŠ vzděláním
- $n_{j.}$ je marginální absolutní četnost j-té varianty znaku X
  - $n_{1.}$ ... počet novorozenců, jejichž matka má ZŠ vzdělání bez ohledu na jejich porodní hmotnost
- $n_{.k}$ je marginální absolutní četnost k-té varianty znaku Y
  - $n_{.1}$ ... počet novorozenců s nízkou porodní hmotností bez ohledu na vzdělání matky
- n je celkový počet objektů v datovém souboru

Kontingenční tabulka absolutních četností

```
59  n11 <- sum(edu == 'ZS' & wei == 'nizka')  # 97
60  # (...)
61  n41 <- sum(edu == 'VS' & wei == 'vysoka') # 13
62
63  KT.abs <- table(edu, wei)
64  nj. <- apply(KT.abs, MARGIN = 1, FUN = sum)
65  KT.abs <- cbind(KT.abs, suma = nj.)
66  n.k <- apply(KT.abs, MARGIN = 2, FUN = sum)
67  KT.abs <- rbind(KT.abs, suma = n.k)
```

```
68 KT.abs
```

```
      nizka norma vysoka suma
ZS       97   312      8  417
SS       82   346     20  448
SSm      74   349     12  435
VS       13    64      4   81
suma    266  1071     44 1381
```

Interpretace výsledků: V datovém souboru se vyskytuje celkem 97 novorozenců, kteří mají ..... porodní hmotnost a jejichž matka má ..... vzdělání, a ..... novorozenců, jejichž porodní hmotnost je v normě a jejichž matka má středoškolské vzdělání s maturitou. Celkem 81 novorozenců se narodilo matkám s ..... vzděláním.

Kontingenční tabulka relativních četností

```
75 KT.rel <- KT.abs / n
76 round(KT.rel, digits = 4)
```

```
       nizka  norma vysoka   suma
ZS    0.0702 0.2259 0.0058 0.3020
SS    0.0594 0.2505 0.0145 0.3244
SSm   0.0536 0.2527 0.0087 0.3150
VS    0.0094 0.0463 0.0029 0.0587
suma  0.1926 0.7755 0.0319 1.0000
```

Interpretace výsledků: V datovém souboru se vyskytuje celkem 7.02 % novorozenců, kteří mají ..... porodní hmotnost a jejichž matka má ..... vzdělání. V datovém souboru se vyskytuje celkem .....% novorozenců, jejichž porodní hmotnost je v normě a jejichž matka má středoškolské vzdělání s maturitou. Celkem 3.19 % novorozenců v datovém souboru má ..... porodní hmotnost.

Příklad 2.6. Kontingenční tabulka řádkově a sloupcově podmíněných relativních četností
Zaměřte se nyní opět na oba znaky $X =$ *vzdělání matky* a $Y =$ *kategorizovaná porodní hmotnost novorozence* najednou. Vytvořte kontingenční tabulku řádkově podmíněných relativních četností a kontingenční tabulku sloupcově podmíněných relativních četností.

Řešení příkladu 2.6

- $p_{k(j)}$ ... **řádkově podmíněná relativní četnost** varianty $y_{[k]}$ za předpokladu varianty $x_{[j]}$
  - $p_{k(j)} = \frac{n_{jk}}{n_{j.}}$
  - poměr novorozenců s nízkou porodní hmotností vzhledem k počtu novorozenců se ZŠ vzděláním matky
- $p_{j(k)}$ ... **sloupcově podmíněná relativní četnost** varianty $x_{[j]}$ za předpokladu varianty $y_{[k]}$
  - $p_{j(k)} = \frac{n_{jk}}{n_{.k}}$
  - poměr novorozenců se SS vzděláním matky vzhledem k počtu novorozenců s porodní hmotností v normě.

Kontingenční tabulka řádkově podmíněných relativních četností

```
83  KT.abs <- table(edu, wei)
84  RP.abs <- prop.table(KT.abs, margin = 1)
```

```r
round(RP.abs, digits = 4)
```

```
     wei
edu     nizka  norma vysoka
  ZS   0.2326 0.7482 0.0192
  SS   0.1830 0.7723 0.0446
  SSm  0.1701 0.8023 0.0276
  VS   0.1605 0.7901 0.0494
```

Interpretace výsledků: Ze všech novorozenců v datovém souboru, jejichž matka má dokončené středoškolské vzdělání zakončené maturitou, má 17.01 % ..... porodní hmotnost a 2.76 % ..... porodní hmotnost. Ze všech novorozenců v datovém souboru, jejichž matka má dokončené vysokoškolské vzdělání, má ..... % **nízkou** porodní hmotnost a ..... % **vysokou** porodní hmotnost.

Kontingenční tabulka sloupcově podmíněných relativních četností

```r
SP.abs <- prop.table(KT.abs, margin = 2)
round(SP.abs, digits = 4)
```

```
     wei
edu     nizka  norma vysoka
  ZS   0.3647 0.2913 0.1818
  SS   0.3083 0.3231 0.4545
  SSm  0.2782 0.3259 0.2727
  VS   0.0489 0.0598 0.0909
```

Interpretace výsledků: Ze všech novorozenců v datovém souboru, jejichž porodní hmotnost byla nízká, se 36.47 % narodilo matkám s ukončeným ..... vzděláním. Ze všech novorozenců v datovém souboru, jejichž porodní hmotnost byla v normě, se ..... % se narodilo matkám s dokončeným středoškolským vzděláním bez maturity.

Jednorozměrné intervalové rozložení četností

Dataset: 01-one-sample-mean-skull-mf.txt
Z archivních materiálů (Schmidt, 1888; soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt) máme k dispozici původní kraniometrické údaje o délce a šířce mozkovny a ze starověké egyptské populace.

Popis proměnných v datasetu:

- id – pořadové číslo;
- pop – populace (egant – egyptská starověká);
- sex – pohlaví (m – muž, f – žena);
- skull.L – největší délka mozkovny (mm), t.j. přímá vzdálenost kraniometrických bodů *glabella* a *opisthocranion*;
- skull.B – největší šířka mozkovny (mm), t.j. vzdálenost obou kraniometrických bodů *euryon*.

Příklad 2.7. Načtení datového souboru

Načtěte dataset 01-one-sample-mean-skull-mf.txt a vypište první čtyři řádky z načteného souboru. Prozkoumejte, zda soubor obsahuje neznámé hodnoty a případně je ze souboru odstraňte. Potom zjistěte dimenzi datové tabulky.

Řešení příkladu 2.7

```
rm(list = ls())
data <- read.delim('01-one-sample-mean-skull-mf.txt')
head(data, n = 4)
```

```
   id   pop sex skull.L skull.B
1 416 egant   m      188      145
2 417 egant   m      172      139
3 420 egant   m      176      138
4 421 egant   m      184      128
```

Rozbor příkladu

- skelety ze starověké egyptské populace; údaje o id, populaci (starověká egyptská), pohlaví, největší délce mozkovny (v mm), největší šířce mozkovny (v mm)

Ošetření NA hodnot a dimenze datové tabulky

```
sum(is.na(data)) # 5
data <- na.omit(data)
dim(data) # 325 x 5
```

V datovém souboru se vyskytuje celkem ..... neznámých (NA) hodnot. Po odstranění NA pozorování nám zůstala datová tabulka o velikosti ..... řádků a ..... sloupců. Celkem tedy máme údaje o 325 ..... přičemž pro každý objekt máme ..... identifikační proměnnou id a údaje o ..... znacích: populaci (pop), pohlaví skeletu (sex), největší délce mozkovny (skull.L) a největší šířce mozkovny (skull.B).

Příklad 2.8. Histogram a krabicový diagram
V následující analýze se zaměříme primárně na znak $X =$ *největší šířka mozkovny* u skeletů mužského pohlaví. Proveďte prvotní náhled na znak $X =$ *největší šířka mozkovky* u mužů pomocí (a) histogramu; (b) krabicového diagramu.

Řešení příkladu 2.8

```
111  skull.BM  <- data[data$sex == 'm', 'skull.B']
112  n.M       <- length(skull.BM) # 216
113  range(skull.BM) # 124-149
```

Celkem máme údaje o největší šířce mozkovny u ..... mužských skeletů. Hodnoty největší šířky mozkovny v datovém souboru se pohybují v rozmezí .....–..... mm.

Rozbor příkladu

- *největší šířka mozkovny u mužů* . . . spojitá proměnná $\rightarrow$ intervalové rozložení četností
- spojitá data $\rightarrow$ třídíme je do stejně dlouhých *třídicích intervalů* $(\infty; u_1\rangle$, $(u_1; u_2\rangle$, . . . , $(u_r; u_{r+1}\rangle$, $(u_{r+1}; \infty\rangle$
- $(u_j; u_{j+1}\rangle$ . . . j-tý třídicí interval
- optimální počet intervalů . . . Sturgesovo pravidlo $r \approx 1 + 3.3 \log_{10}(n) \rightarrow$ optimální šířka jednoho intervalu $\rightarrow$ hranice třídicích intervalů

Sturgessovo pravidlo

```
114  r <- round(1 + 3.3 * log10(n.M)) # 9
```

Podle Sturgersova pravidla je optimální počet třídicích intervalů pro znak X = největší šířka mozkovny roven ..... . Minimální naměřená hodnota znaku X je ..... mm, maximální hodnota je ..... mm. Rozsah hodnot mezi minimální a maximální hodnotou je ..... mm.

Optimální šířka třídicího intervalu pro znak X je ..... mm. Vynásobíme-li počet třídicích intervalů optimálním rozsahem jednoho intervalu, zjistíme, že rozsah třídicích intervalů je $9 \times 3 = 27$. Rozsah hodnot 124–149 je však pouze 25. Proto dolní hranici prvního třídicího intervalu u_1 stanovíme jako 123, $u_2 = 126, \ldots, u_9 = 150$.

Histogram a krabicový diagram

```
115  b      <- seq(123, 150, by = 3)
116  centr <- seq(124.5, 148.5, by = 3)
117
118  par(mar = c(4, 4, 1, 2))
119  hist(skull.BM, breaks = b, ylim = c(0, 52),
120       col = 'dodgerblue', border = 'slateblue4',
121       density = 40, xlab = 'nejvetsi sirka mozkovny (mm) - muzi',
122       ylab = 'absolutni cetnosti', main = '', axes = F)
123  box(bty = 'o')
124  axis(side = 1, centr)
125  axis(side = 2, las = 1)
```

```
126  boxplot(skull.BM, type = 2, horizontal = T,
127          col = 'aliceblue', border = 'slateblue4', medcol = 'deepskyblue4',
128          xlab = 'nejvetsi sirka mozkovny (mm) - muzi')
```