

Aplikovaná statistika I

Téma 9: Dvouvýběrové parametrické testy

Veronika Bendová

bendova.veroonika@gmail.com

Dvouvýběrové parametrické testy

- porovnání dvou skupin (dvou náhodných výběrů)
 - muži vs. ženy
 - mladší vs. starší
 - česká vs. slovenská populace
- porovnání různých parametrů
 - rozptylů σ_1^2 a $\sigma_2^2 \rightarrow$ test o podílu rozptylů
 - středních hodnot μ_1 a $\mu_2 \rightarrow$ test o rozdílu středních hodnot
 - korelačních koeficientů ρ_1 a $\rho_2 \rightarrow$ test o rozdílu korel. koeficientů
 - pravděpodobností p_1 a $p_2 \rightarrow$ test o rozdílu pravděpodobností $p_1 - p_2$
- nutná podmínka k použití parametrického testu: **normalita** obou náhodných výběrů

Testování H_0 (tři různé způsoby):

- kritickým oborem
 - hodnota testovací statistiky t_0 + kritický obor W
 - pokud $t_0 \in W$, H_0 **zamítáme** na hladině významnosti α
- intervalem spolehlivosti
 - $100(1 - \alpha)\%$ IS + konstanta c z H_0
 - pokud $c \in IS$, H_0 **nezamítáme** na hladině významnosti α
- p -hodnotou
 - p -hodnota p + hladina významnosti α
 - pokud $p \leq \alpha$, H_0 **zamítáme** na hladině významnosti α

Test o podílu rozptylů (F-test)

- $X_{11} \dots X_{1n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_{21} \dots X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

- **Hypotézy:**

- $H_{01}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 = \sigma_0^2$ oproti $H_{11}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq \sigma_0^2$
- $H_{02}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leq \sigma_0^2$ oproti $H_{12}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 > \sigma_0^2$
- $H_{03}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 \geq \sigma_0^2$ oproti $H_{13}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 < \sigma_0^2$

- **Test kritickým oborem**

- testovací statistika: $F_W = S_1^2/S_2^2 \sim F_{n_1-1, n_2-1}$
- kritický obor:
 - $H_{11}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq \sigma_0^2$ $W = (0; F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)) \cup \langle F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1), \infty)$
 - $H_{12}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 > \sigma_0^2$ $W = \langle F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1); \infty)$
 - $H_{13}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 < \sigma_0^2$ $W = (0; F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1))$

$F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ je α -kvantil Fisherova-Snedecorova r. o $n_1 - 1$ a $n_2 - 1$ st. volnosti ... $qf(\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1)$

- **Test intervalem spolehlivosti**

- konstanta σ_0^2 + interval spolehlivosti:
 - $H_{11}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq \sigma_0^2$ $(d; h) = \left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} ; \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} \right)$
 - $H_{12}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 > \sigma_0^2$ $(d; \infty) = \left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)} ; \infty \right)$
 - $H_{13}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 < \sigma_0^2$ $(-\infty; h) = \left(-\infty ; \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)} \right)$

- **Test p -hodnotou**

- hladina významnosti α + p -hodnota:
 - $H_{11}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq \sigma_0^2$ p -hodnota = $2 \min(\Pr(F_W \leq f_W), \Pr(F_W > f_W)) = 2 \min(\text{pf}(f_W, n_1 - 1, n_2 - 1), 1 - \text{pf}(f_W, n_1 - 1, n_2 - 1))$
 - $H_{12}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 > \sigma_0^2$ p -hodnota = $\Pr(F_W > f_W) = 1 - \Pr(F_W \leq f_W) = 1 - \text{pf}(f_W, n_1 - 1, n_2 - 1)$
 - $H_{13}: \sigma_1^2/\sigma_2^2 < \sigma_0^2$ p -hodnota = $\Pr(F_W \leq f_W) = \text{pf}(f_W, n_1 - 1, n_2 - 1)$

Klasický dvouvýběrový t -test

- X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z $N(\mu_1, \sigma_1^2)$; X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr z $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, σ_1^2 a σ_2^2 neznáme, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ a σ_0^2 je konstanta.

- vážený průměr výběrových rozptylů: $S_*^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

- **Hypotézy:**

- $H_{01}: \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ oproti $H_{11}: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ (oboustranná alt.)
- $H_{02}: \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ oproti $H_{12}: \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ (pravostranná alt.)
- $H_{03}: \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ oproti $H_{13}: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ (levostranná alt.)

- **Test kritickým oborem**

- testovací statistika: $T_W = \frac{(M_1 - M_2) - \mu_0}{S_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$
- kritický obor:

- $H_{11}: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ $W = (-\infty; t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)) \cup (t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2), \infty)$
- $H_{12}: \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ $W = (t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2); \infty)$
- $H_{13}: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ $W = (-\infty; t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2))$

$t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$ je α kvantil Studentova rozdělení o $n_1 + n_2 - 2$ stupních volnosti ... qt(alpha, n1+n2-2).

- **Test intervalem spolehlivosti**

- konstanta μ_0 + interval spolehlivosti:

- $H_{11}: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ $(d; h) = (m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2); m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2))$
- $H_{12}: \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ $(d; \infty) = (m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2); \infty)$
- $H_{13}: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ $(-\infty; h) = (-\infty; m_1 - m_2 - s_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2))$

- **Test p -hodnotou**

- hladina významnosti α + p -hodnota:

- $H_{11}: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ p -hodnota = $2 \min(\Pr(T_W \leq t_W), \Pr(T_W > t_W)) = 2 \min(\text{pt}(t_W, n_1 + n_2 - 2), 1 - \text{pt}(t_W, n_1 + n_2 - 2))$
- $H_{12}: \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ p -hodnota = $\Pr(T_W > t_W) = 1 - \Pr(T_W \leq t_W) = 1 - \text{pt}(t_W, n_1 + n_2 - 2)$
- $H_{13}: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ p -hodnota = $\Pr(T_W \leq t_W) = \text{pt}(t_W, n_1 + n_2 - 2)$

Dataset: 01-one-sample-mean-skull-mf.txt

Z archivních materiálů (Schmidt, 1888; soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt) máme k dispozici původní kranio-metrické údaje o délce a šířce mozkovny a ze starověké egyptské populace.

Popis proměnných v datasetu:

- pop – populace (egant – egyptská starověká);
- sex – pohlaví (m – muž, f – žena);
- skull.L – největší délka mozkovny (mm), t.j. přímá vzdálenost kranio-metrických bodů *glabella* a *opisthocranion*;
- skull.B – největší šířka mozkovny (mm), t.j. vzdálenost obou kranio-metrických bodů *euryon*.

Příklad 9.1. Klasický test o rozdílu středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$

Mějme datový soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt a proměnnou skull.B popisující největší šířku mozkovny. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte hypotézu o shodě střední hodnoty největší šířky mozkovny mužů a žen starověké egyptské populace.

Řešení příkladu 9.1

```
1 data <- read.delim(...) # nacteni datoveho souboru
2 data <- na.omit(...) # odstraneni NA hodnot
3 skull.BM <- data[... , ...] # vyber promenne skull.B pro muze
4 skull.BF <- data[... , ...] # vyber promenne skull.B pro zeny
5 n1 <- length(...) # pocet pozorovani pro muze
6 n2 <- length(...) # pocet pozorovani pro zeny
7 (tab <- data.frame(n1, n2, min1 = min(...), max1 = max(...), min2 = min(...),
8                   max2 = max(...))) # souhrnna tabulka zakladnich udaju
```

	n1	n2	min1	max1	min2	max2
1	216	109	124	149	118	146

V tomto příkladu pracujeme se náhodnými výběry. První náhodný výběr obsahuje údaje o největší šířce mozkovny mužů, druhý náhodný výběr obsahuje údaje o největší šířce mozkovny žen starověké egyptské populace. Naměřené hodnoty u mužů se pohybují v rozmezí-..... mm, naměřené hodnoty u žen se pohybují v rozmezí-..... mm.

Ze zadání máme za úkol porovnat střední hodnoty dvou populací (muži a ženy), použijeme tedy test o střední hodnotě / test o rozdílu středních hodnot / test o rozdílu korelačních koeficientů. Primárně bychom chtěli použít **parametrický** test. Nutným předpokladem parametrického testu je **normalita naměřených hodnot** (zvláště v každém výběru).

Test normality naměřených hodnot pro muže

- H_0 : Data z normálního rozdělení.
- H_1 : Data z normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$. $n = \dots\dots\dots$ je menší / větší než 30 a menší / větší než 100
→ Shapirův-Wilkův / Lillieforsův test.

[1]	0.07662229
-----	------------

11

Náhodný výběr největších šířek mozkovny mužů starověké egyptské populace z normálního rozdělení (p -hodnota = je menší / větší než $\alpha = 0.05$).

Test normality naměřených hodnot pro ženy

- H_0 : Data z normálního rozdělení.
- H_1 : Data z normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$. $n = \dots\dots\dots$ je menší / větší než 30 a menší / větší než 100
→ Shapirův-Wilkův / Lillieforsův test.

```
[1] 0.06380994
```

12

Náhodný výběr největších šířek mozkovny žen starověké egyptské populace z normálního rozdělení (p -hodnota = je menší / větší než $\alpha = 0.05$).

Protože oba výběry pochází z normálního rozdělení, použijeme na otestování hypotézy ze zadání **parametrický test**. Vhodný parametrický test vybereme v závislosti na výsledku testu o podílu rozptylů.

Test o podílu rozptylů

- H_0 : \rightarrow
- H_1 : \rightarrow (..... alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha =$

```
13 var.test(skull.BM, skull.BF, alternative = 'two.sided', conf.level = 0.95)
```

```
      F test to compare two variances
data:  skull.BM and skull.BF
F = 1.0555, num df = 215, denom df = 108, p-value = 0.761
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.7532968 1.4525763
sample estimates:
ratio of variances
      1.055543
```

14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24

```
25 alpha <- 0.05 # hladna vyznamnosti alpha
26 qf(alpha / 2, n1 - 1, n2 - 1) # horni hranice kritickeho oboru; 0.7266694
27 qf(1 - alpha / 2, n1 - 1, n2 - 1) # dolni hranice kritickeho oboru; 1.401231
```

a) **Test kritickým oborem**

Hodnota testovací statistiky $f_w = \dots\dots\dots$, kritický obor W má tvar $\dots\dots\dots$
Protože $\dots\dots\dots$, $H_0 \dots\dots\dots$ na hladině významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$

b) **Test intervalem spolehlivosti**

Interval spolehlivosti má tvar $\dots\dots\dots$. Protože $\dots\dots\dots$, H_0
 $\dots\dots\dots$ na hladině významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$

c) **Test p -hodnotou**

P -hodnota vyšla $\dots\dots\dots$. Protože $\dots\dots\dots$, $H_0 \dots\dots\dots$ na hladině
významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$

Mezi rozptylem největší šířky mozkovny u mužů a žen starověké egyptské populace existuje /
neexistuje statisticky významný rozdíl. Protože rozptyly obou výběrů jsou shodné, použijeme na
otestování hypotézy ze zadání **klasický test o rozdílu středních hodnot** (rozptyly σ_1^2 a σ_2^2 jsou
neznámé, ale shodné).

Klasický test o rozdílu středních hodnot

- $H_0 : \dots\dots\dots \rightarrow \dots\dots\dots$
- $H_1 : \dots\dots\dots \rightarrow \dots\dots\dots$ ($\dots\dots\dots$ alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$

a) **Test kritickým oborem**


```

28 m1 <- mean(...) # vyberovy prumer sirky lebky muzu
29 m2 <- mean(...) # vyberovy prumer sirky lebky zen
30 s1 <- sd(...) # vyberova sm. odchylka sirky lebky muzu
31 s2 <- sd(...) # vyberova sm. odchylka sirky lebky zen
32 s_h2 <- ... # vazeny prumer vyberovych rozptylu Sh_*^2
33 s_h <- sqrt(s_h2) # odmocnina z Sh_*^2
34 mu0 <- ... # hodnota mu0 z H0
35
36 tw <- ... # testovaci statika Tw
37 q1 <- qt(...) # horni hranice kritickeho oboru
38 q2 <- qt(...) # dolni hranice kritickeho oboru

```

	tw	q1	q2
1	5.407945	-1.967336	1.967336

39
40

Hodnota testovací statistiky $t_w = \dots$, kritický obor W má tvar \dots
 Protože \dots , H_0 \dots na hladině významnosti $\alpha = \dots$

b) Test intervalem spolehlivosti

```

41 dh <- ... # dolni hranice 95% IS
42 hh <- ... # horni hranice 95% IS

```

	dh	hh
1	1.93307	4.143723

43
44

Interval spolehlivosti má tvar \dots . Protože \dots , H_0 \dots
 na hladině významnosti $\alpha = \dots$

c) Test p -hodnotou

```
45 p.hodnota <- 2 * min(pt(...), 1 - pt(...)) # p-hodnota
```

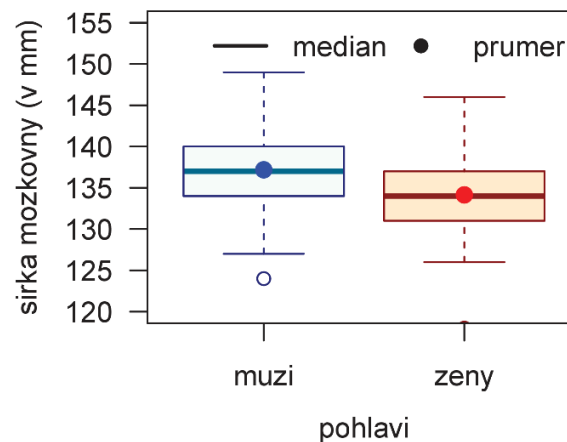
```
p.hodnota  
1 1.242523e-07
```

46
47

P -hodnota vyšla Protože, H_0 na hladině významnosti $\alpha =$

Interpretace výsledků: Mezi největší šířkou mozkovny u mužů a žen starověké egyptské populace existuje / neexistuje statisticky významný rozdíl.

```
48 par(mar = c(...)) # okraje grafu 4, 4, 1, 1  
49 boxplot(skull.BM, skull.BF, ylim = c(120, 155), ...) # krabicovy diagram  
50 mtext(...) # popisok osy x  
51 points(c(m1, m2), pch = 19, col = c('blue', 'red')) # body vyberovych prumeru  
52 legend(..., horiz = T, bty = 'n') # legenda
```



```
53 t.test(skull.BM, skull.BF, alternative = 'two.sided', conf.level = 0.95,  
54       var.equal = T)
```

Two Sample t-test

```
data: skull.BM and skull.BF  
t = 5.4079, df = 323, p-value = 1.243e-07  
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0  
95 percent confidence interval:  
 1.933070 4.143723  
sample estimates:  
mean of x mean of y  
137.1852 134.1468
```

55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65

Dvouvýběrový t -test s Welchovou aproximací

- X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr z $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ neznáme, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ a μ_0 je konstanta.

- **Hypotézy:**

- $H_{01}: \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ oproti $H_{11}: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ (oboustranná alt.)
- $H_{02}: \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ oproti $H_{12}: \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ (pravostranná alt.)
- $H_{03}: \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ oproti $H_{13}: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ (levostranná alt.)

- stupně volnosti: $df = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$

- **Test kritickým oborem**

- testovací statistika: $T_W = \frac{(M_1 - M_2) - \mu_0}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \sim t_{df}$
- kritický obor:
 - $H_{11}: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ $W = (-\infty; t_{\alpha/2}(df)) \cup (t_{1-\alpha/2}(df), \infty)$
 - $H_{12}: \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ $W = (t_{1-\alpha}(df); \infty)$
 - $H_{13}: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ $W = (-\infty; t_{\alpha}(df))$

$t_{\alpha}(df)$ je α kvantil Studentova rozdělení o df stupních volnosti ... qt(alpha, df).

- **Test intervalem spolehlivosti**

- konstanta μ_0 + interval spolehlivosti

- $H_{11}: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ $(d; h) = \left(m_1 - m_2 - \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2} t_{1-\alpha/2}(df); m_1 - m_2 - \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2} t_{\alpha/2}(df) \right)$
- $H_{12}: \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ $(d; \infty) = \left(m_1 - m_2 - \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2} t_{1-\alpha}(df); \infty \right)$
- $H_{13}: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ $(-\infty; h) = \left(-\infty; m_1 - m_2 - \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2} t_{\alpha}(df) \right)$

- **Test p -hodnotou**

- hladina významnosti α + p -hodnota:

- $H_{11}: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ p -hodnota = $2 \min(\Pr(T_W \leq t_W), \Pr(T_W > t_W)) = 2 \min(\text{pt}(t_W, df), 1 - \text{pt}(t_W, df))$
- $H_{12}: \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ p -hodnota = $\Pr(T_W > t_W) = 1 - \Pr(T_W \leq t_W) = 1 - \text{pt}(t_W, df)$
- $H_{13}: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ p -hodnota = $\Pr(T_W \leq t_W) = \text{pt}(t_W, df)$

Dataset: 19-more-samples-correlations-skull.txt

Datový soubor 19-more-samples-correlations-skull.txt obsahuje údaje o šířce nosu a o interorbitální šířce mužů z německé, malajské, čínské, peruánské a bantuské populace. Data pochází z archivních materiálů (Schmitd, 1888).

Popis proměnných v datasetu:

- pop ... populace (nem - německá, mal - malajská, cin - čínská, per - peruánská, ban - bantuská);
- sex ... pohlaví jedince (m - muž);
- nose.B ... šířka nosu (v mm);
- intorb.B ... interorbitální šířka (v mm).

Příklad 9.2. Dvouvýběrový *t*-test s Welchovou aproximací

Mějme datový soubor 19-more-samples-correlations-skull.txt a proměnnou nose.B popisující šířku nosu. Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ zjistěte, zda je šířka nosu mužů čínské populace menší než šířka nosu mužů bantuské populace.

Řešení příkladu 9.2

```
66 data <- read.delim(...) # nacteni datoveho souboru
67 data <- na.omit(...) # odstraneni NA hodnot
68 nose.BC <- data[... , ...] # vyber promenne nose.B pro muze cinske pop.
69 nose.BB <- data[... , ...] # vyber promenne nose.B pro muze bantuske pop.
70 n1 <- length(...) # pocet sirek nosu muzu cinske pop.
71 n2 <- length(...) # pocet sirek nosu muzu bantuske pop.
72 (tab <- data.frame(n1, n2, min1 = min(...), max1 = max(...), min2 = min(...),
73                   max2 = max(...))) # souhrnna tabulka vysledku
```

	n1	n2	min1	max1	min2	max2
1	19	14	23	28	22	31

V tomto příkladu pracujeme se náhodnými výběry. První výběr obsahuje údaje o šířce nosu mužů populace, druhý výběr obsahuje údaje o šířce nosu mužů populace. Hodnoty u mužů čínské populace se pohybují v rozmezí- mm, hodnoty u mužů bantuské populace se pohybují v rozmezí- mm.

Ze zadání máme za úkol porovnat střední hodnoty dvou populací (čínské a bantuské), použijeme tedy párový test / test o rozdílu středních hodnot / test o rozdílu korelačních koeficientů. Primárně bychom chtěli použít **parametrický** test. Nutným předpokladem parametrického testu je **normalita naměřených hodnot** (zvláště v každém výběru).

Test normality naměřených hodnot u mužů čínské populace

- H_0 : Data z normálního rozdělení.
- H_1 : Data z normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$. $n = \dots\dots\dots$ je menší / větší než 30 a menší / větší než 100
→ Shapirův-Wilkův / Lillieforsův test.

[1]	0.1173442
-----	-----------

Náhodný výběr šířek nosu mužů čínské populace z normálního rozdělení (p -hodnota = je menší / větší než $\alpha = 0.05$).

Test normality naměřených hodnot u mužů bantuské populace

- H_0 : Data z normálního rozdělení.
- H_1 : Data z normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$. $n = \dots\dots\dots$ je menší / větší než 30 a menší / větší než 100
→ Shapirův-Wilkův / Lillieforsův test.

```
[1] 0.1511379
```

77

Náhodný výběr šířek nosu mužů bantuské populace z normálního rozdělení (p -hodnota = je menší / větší než $\alpha = 0.05$).

Protože oba výběry pochází z normálního rozdělení, použijeme na otestování hypotézy ze zadání **parametrický test**. Vhodný parametrický test vybereme v závislosti na výsledku testu o podílu rozptylů.

Test o podílu rozptylů

- H_0 : \rightarrow
- H_1 : \rightarrow (..... alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha =$

```
78 var.test(nose.BC, nose.BB, alternative = 'two.sided', conf.level = 0.95)
```

```
      F test to compare two variances
data:  nose.BC and nose.BB
F = 0.27537, num df = 18, denom df = 13, p-value = 0.01258
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.09230537 0.75180759
sample estimates:
ratio of variances
      0.2753689
```

79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89

```
90 alpha <- ... # hladina vyznamnosti alpha
91 qf(...) # horni hranice kritickeho oboru # 0.3662758
92 qf(...) # dolni hranice kritickeho oboru # 2.983239
```

a) **Test kritickým oborem**

Hodnota testovací statistiky $f_w = \dots\dots\dots$, kritický obor W má tvar $\dots\dots\dots$
Protože $\dots\dots\dots$, H_0 $\dots\dots\dots$ na hladině významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$

b) **Test intervalem spolehlivosti**

Interval spolehlivosti má tvar $\dots\dots\dots$. Protože $\dots\dots\dots$, H_0
 $\dots\dots\dots$ na hladině významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$

c) **Test p -hodnotou**

P -hodnota vyšla $\dots\dots\dots$. Protože $\dots\dots\dots$, H_0 $\dots\dots\dots$ na hladině
významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$

Mezi rozptylem šířky nosu mužů čínské a bantuské populace existuje / neexistuje statisticky významný rozdíl. Protože rozptyly obou výběrů nejsou shodné, použijeme na otestování hypotézy ze zadání **Welchův test o rozdílu středních hodnot** (rozptyly σ_1^2 a σ_2^2 jsou neznámé a různé).

Welchův test o rozdílu středních hodnot

- $H_0 : \dots\dots\dots \rightarrow \dots\dots\dots$
- $H_1 : \dots\dots\dots \rightarrow \dots\dots\dots$ ($\dots\dots\dots$ alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$

a) **Test kritickým oborem**


```

93 m1 <- mean(...) # vyberovy prumer sirky nosu muzu cinske pop.
94 m2 <- mean(...) # vyberovy prumer sirky nosu muzu bantuske pop.
95 s1 <- sd(...) # vyberova sm. odchylka sirky nosu muzu cinske pop.
96 s2 <- sd(...) # vyberova sm. odchylka sirky nosu muzu bantuske pop.
97 mu0 <- ... # konstanta mu0 z H0
98 alpha <- ... # hladina vyznamnosti pro Welchuv test
99
100 tw <- ... # hodnota testovaci statistiky Tw
101 df <- ... # pocet stupnu volnosti df
102 q <- qt(..., df) # horni hranice krit. oboru

```

	tw	df	q
1	-1.861145	18.26753	-2.548779

103
104

Hodnota testovací statistiky $t_w = \dots$, kritický obor W má tvar \dots
 Protože \dots , H_0 \dots na hladině významnosti $\alpha = \dots$

b) Test intervalem spolehlivosti

```

105 hh <- ... # horni hranice 99% IS

```

	hh
1	0.6347628

106
107

Interval spolehlivosti má tvar \dots . Protože \dots , H_0
 \dots na hladině významnosti $\alpha = \dots$

c) Test p -hodnotou

```
108 p.hodnota <- pt(..., df) # p-hodnota
```

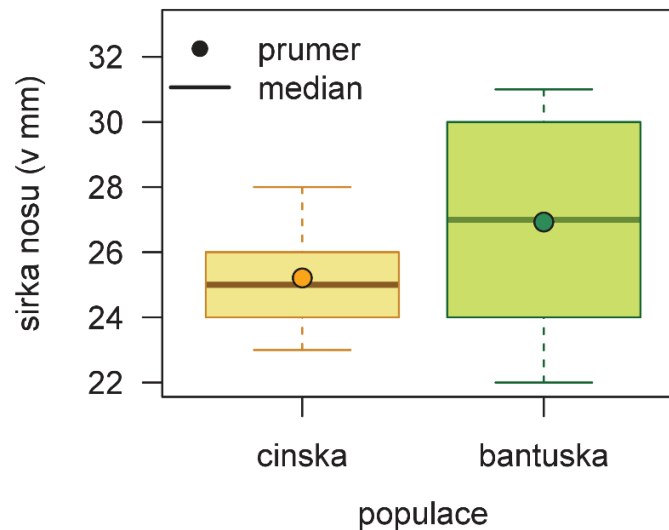
```
p.hodnota  
1 0.03944804
```

109
110

P -hodnota vyšla Protože, H_0 na hladině významnosti $\alpha =$

Interpretace výsledků: Šířka nosu mužů čínské populace je / není statisticky významně menší než šířka nosu mužů bantuské populace.

```
111 par(...) # okraje grafu 4, 4, 1, 1  
112 boxplot(nose.BC, nose.BB, ylim = c(22, 33), ...) # krabicovy diagram  
113 mtext(...) # popis ek osy x  
114 points(c(m1, m2)), ...) # body vyberovych prumeru  
115 legend(...) # legenda
```



```
116 t.test(nose.BC, nose.BB, alternative = 'less', conf.level = 0.99, var.equal = F)
```

```
Welch Two Sample t-test
data: nose.BC and nose.BB
t = -1.8611, df = 18.268, p-value = 0.03945
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
99 percent confidence interval:
  -Inf 0.6347628
sample estimates:
mean of x mean of y
 25.21053  26.92857
```

117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127

Test o rozdílu korelačních koeficientů $\rho_1 - \rho_2$

- $(X_{11}, Y_{11})^T, \dots, (X_{1n_1}, Y_{1n_1})^T$ je náhodný výběr z $N_2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ a $(X_{21}, Y_{21})^T, \dots, (X_{2n_2}, Y_{2n_2})^T$ je na něm nezávislý náhodný výběr z $N_2(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$, ρ_0 je konstanta.
- **Hypotézy:**
 - $H_{01}: \rho_1 - \rho_2 = \rho_0$ oproti $H_{11}: \rho_1 - \rho_2 \neq \rho_0$ (oboustranná alt.)
 - $H_{02}: \rho_1 - \rho_2 \leq \rho_0$ oproti $H_{12}: \rho_1 - \rho_2 > \rho_0$ (pravostranná alt.)
 - $H_{03}: \rho_1 - \rho_2 \geq \rho_0$ oproti $H_{13}: \rho_1 - \rho_2 < \rho_0$ (levostranná alt.)
- Fisherova Z-transformace výběrového korel. koef. $R_1: Z_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R_1}{1-R_1}$, resp. $R_2: Z_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R_2}{1-R_2}$, resp. konstanty $\rho_0: \xi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$

• Test kritickým oborem

- testovací statistika: $Z_W = \frac{Z_1 - Z_2 - \xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}} \sim N(0, 1)$
- kritický obor:
 - $H_{11}: \rho_1 - \rho_2 \neq \rho_0$ $W = (-\infty; u_{\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; \infty)$
 - $H_{12}: \rho_1 - \rho_2 > \rho_0$ $W = (u_{1-\alpha}; \infty)$
 - $H_{13}: \rho_1 - \rho_2 < \rho_0$ $W = (-\infty; u_{\alpha})$

u_{α} je α -kvantil standardizovaného normálního rozdělení ... qnorm(alpha).

• Test intervalem spolehlivosti

- konstanta ρ_0 + interval spolehlivosti
 - $H_{11}: \rho_1 - \rho_2 \neq \rho_0$ $(d, h) = (\tanh(z_1 - z_2 - s_g u_{1-\alpha/2}); \tanh(z_1 - z_2 - s_g u_{\alpha/2}))$
 - $H_{12}: \rho_1 - \rho_2 > \rho_0$ $(d, 2) = (\tanh(z_1 - z_2 - s_g u_{1-\alpha}); 2)$
 - $H_{13}: \rho_1 - \rho_2 < \rho_0$ $(-2, h) = (-2; \tanh(z_1 - z_2 - s_g u_{\alpha}))$

kde $s_g = \sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}$ a tanh je hyperbolický tangens ... tanh().

• Test p-hodnotou

- hladina významnosti α + p-hodnota:
 - $H_{11}: \rho_1 - \rho_2 \neq \rho_0$ p-hodnota = $2 \min(\Pr(Z_W \leq z_W), \Pr(Z_W > z_W)) = 2 \min(\text{pnorm}(z_W), 1 - \text{pnorm}(z_W))$
 - $H_{12}: \rho_1 - \rho_2 > \rho_0$ p-hodnota = $\Pr(Z_W > z_W) = 1 - \Pr(Z_W \leq z_W) = 1 - \text{pnorm}(z_W)$
 - $H_{13}: \rho_1 - \rho_2 < \rho_0$ p-hodnota = $\Pr(Z_W \leq z_W) = \text{pnorm}(z_W)$

Dataset: 13-two-samples-correlations-trunk.txt

Datový soubor 13-two-samples-correlations-trunk.txt obsahuje údaje o délce trupu (rozdíl akromiální a spinální výšky těla) a délce dolní končetiny (spinální výška těla) mladých dospělých jedinců, převážně studentů vysokých škol z Brna a Ostravy (Králík, nepublikovaná data).

Popis proměnných v datasetu:

- sex - pohlaví (m - muž, f - žena);
- lowex.L - délka dolní končetiny (v mm);
- tru.L - délka trupu (v mm).

Příklad 9.3. Test o rozdílu korelačních koeficientů $\rho_1 - \rho_2$

Mějme datový soubor 13-two-samples-correlations-trunk.txt, proměnnou lowex.L popisující délku dolní končetiny a proměnnou tru.L popisující délku trupu. Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ zjistěte, zda je korelační koeficient délky dolní končetiny a délky trupu u mužů menší než u žen.

Řešení příkladu 9.3

```
128 data <- read.delim(...) # nacteni datove tabulky
129 data.M <- na.omit(data[... , ]) # vyber hodnot pro muze + odstraneni NA hodnot
130 data.F <- na.omit(data[... , ]) # vyber hodnot pro zeny + odstraneni NA hodnot
131 lowex.LM <- data.M$... # vyber promenne lowex.L pro muze
132 tru.LM <- data.M$... # vyber promenne tru.L pro muze
133 lowex.LF <- data.F$... # vyber promenne lowex.L pro zeny
134 tru.LF <- data.F$... # vyber promenne tru.L pro zeny
135 n1 <- length(...) # rozsah nahodneho vyberu pro muze
136 n2 <- length(...) # rozsah nahodneho vyberu pro zeny
137 tab <- data.frame(n1, rho1 = cor(lowex.LM, tru.LM),
138                   n2, rho2 = cor(...)) # souhrnna tabulka vysledku
```

	n1	rho1	n2	rho2
1	75	0.05975781	100	0.285256

139
140

V tomto příkladu pracujeme se náhodnými výběry. První výběr obsahuje údaje o délce dolní končetiny a délce trupu u mužů, druhý výběr obsahuje údaje o délce dolní končetiny a délce trupu u žen. Hodnota výběrového korelačního koeficientu pro muže $R_1 =$ a pro ženy $R_2 =$

Ze zadání máme za úkol porovnat korelační koeficienty dvou populací (muži a ženy), použijeme tedy test o střední hodnotě / test o korelačním koeficientu / test o rozdílu středních hodnot / test o rozdílu korelačních koeficientů. Primárně bychom chtěli použít **parametrický** test. Nutným předpokladem parametrického testu je **dvourozměrná normalita naměřených hodnot** (zvláště v každém výběru).

Test dvourozměrné normality naměřených hodnot pro muže

- H_0 : Data z dvourozměrného normálního rozdělení.
- H_1 : Data z dvourozměrného normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$ Mardiaův test.

	Test	Statistic	p value	Result
1	Mardia Skewness	2.98735817484524	0.559943203738428	YES
2	Mardia Kurtosis	-0.789574288194589	0.429776429043593	YES
3	MVN	<NA>	<NA>	YES

141
142
143
144

Náhodný výběr délek dolní končetiny a délek trupu u mužů z dvourozměrného normálního rozdělení. (Data vykazují / nevykazují výrazné zešikmení (p -hodnota = je menší / větší než $\alpha = 0.05$). Data vykazují / nevykazují výrazné zešpicatění či zploštění (p -hodnota = je menší / větší než $\alpha = 0.05$).)

Test dvourozměrné normality naměřených hodnot pro ženy

- H_0 : Data z dvourozměrného normálního rozdělení.
- H_1 : Data z dvourozměrného normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$. Mardiův test.

	Test	Statistic	p value	Result	
1	Mardia Skewness	6.31326657225727	0.176942962210473	YES	145
2	Mardia Kurtosis	-0.207066071208097	0.835958259081491	YES	146
3	MVN	<NA>	<NA>	YES	147
					148

Náhodný výběr délek dolní končetiny a délek trupu u žen z dvourozměrného normálního rozdělení. (Data vykazují / nevykazují výrazné zešikmení (p -hodnota = je menší / větší než $\alpha = 0.05$). Data vykazují / nevykazují výrazné zešpicatění či zploštění (p -hodnota = je menší / větší než $\alpha = 0.05$).)

Protože oba náhodné výběry pochází z dvourozměrných normálních rozdělení, použijeme na ověření otázky ze zadání **parametrický test**.

Test o rozdílu korelačních koeficientů $\rho_1 - \rho_2$

- H_0 : \rightarrow
- H_1 : \rightarrow (..... alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$.

a) Test kritickým oborem

```

149 alpha <- ... # hladina vyznamnosti alpha
150 rho0 <- ... # konstanta rho0 z H0
151 r1 <- cor(lowex.LM, tru.LM) # vyberovy korelacni koeficient pro muze
152 r2 <- cor(...) # vyberovy korelacni koeficient pro zeny
153 zR1 <- 1 / 2 * log((1 + r1) / (1 - r1)) # Fisherova Z-transformace koef. r1
154 zR2 <- ...# Fisherova Z-transformace koef. r2
155 ksi0 <- ... # Fisherova Z-transformace konstanty rho0
156 zw <- ... # testovaci statistika Zw
157 q <- ... # horni hranice kritickeho oboru

```

	zR1	zR2	zw	q
1	0.0598291	0.2933943	-1.501471	-2.326348

158
159

Hodnota testovací statistiky $z_w = \dots\dots\dots$, kritický obor W má tvar $\dots\dots\dots$
 Protože $\dots\dots\dots$, H_0 $\dots\dots\dots$ na hladině významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$

b) Test intervalem spolehlivosti

```

160 sg <- sqrt(...) # hodnota sm. odchylky sg
161 hh <- tanh(...) # horni hranice 99% IS

```

	hh
1	0.1276162

162
163

Interval spolehlivosti má tvar $\dots\dots\dots$. Protože $\dots\dots\dots$, H_0
 $\dots\dots\dots$ na hladině významnosti $\alpha = \dots\dots\dots$

c) Test p -hodnotou


```
164 p.hodnota <- pnorm(...) # p-hodnota
```

```
p.hodnota  
1 0.06661688
```

165
166

P-hodnota vyšla Protože, H_0 na hl. význ. $\alpha =$

Interpretace výsledků: Korelační koeficient délky dolní končetiny a délky trupu u mužů je / není statisticky významně menší než u žen. Mezi délkou dolní končetiny a délkou trupu mužů existuje stupeň závislosti ($R_1 = 0.0598$). Mezi délkou dolní končetiny a délkou trupu žen existuje stupeň závislosti ($R_2 = 0.2853$).

```
167 plot(lowex.LM, tru.LM, ...) # teckovy diagram - muzi  
168 mtext(...) # popis ek osy x  
169 k <- lm(tru.LM ~ lowex.LM)$coef # vypocet koeficientu primky lin. trendu - muzi  
170 x <- seq(min(lowex.LM), max(lowex.LM), length = 1000) # posl. 1000 bodu x - muzi  
171 y <- k[1] + x * k[2] # vypocet hodnot y linearni primky - muzi  
172 lines(x, y, col = 'darkblue', lwd = 2) # vykresleni primky lin. trendu - muzi  
173 points(lowex.LF, tru.LF, ...) # doplneni bodu pro zeny do grafu  
174 # definice promennych k, x, y + vykresleni primky lin. trendu (lines()) pro zeny  
175 legend(...) # legenda
```

