9 Dvouvýběrové parametrické testy

Dataset: 01-one-sample-mean-skull-mf.txt
Z archivních materiálů (Schmidt, 1888; soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt) máme k dispozici původní kraniometrické údaje o délce a šířce mozkovny a ze starověké egyptské populace.

Popis proměnných v datasetu:

- pop – populace (egant – egyptská starověká);
- sex – pohlaví (m – muž, f – žena);
- skull.L – největší délka mozkovny (mm), t.j. přímá vzdálenost kraniometrických bodů *glabella* a *opisthocranion*;
- skull.B – největší šířka mozkovny (mm), t.j. vzdálenost obou kraniometrických bodů *euryon*.

Příklad 9.1. Klasický test o rozdílu středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ (σ_1^2 a σ_2^2 jsou neznámé, ale shodné)
Mějme datový soubor 01-one-sample-mean-skull-mf.txt a proměnnou skull.B popisující největší šířku mozkovny. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte hypotézu o shodě střední hodnoty největší šířky mozkovny mužů a žen starověké egyptské populace.

Řešení příkladu 9.1

```
data <- read.delim(...) # nacteni datoveho souboru
skull.BM <- data[... , ...] # vyber nejvetsi sirky mozkovny muzu (prvni vyber)
skull.BF <- data[... , ...] # vyber nejvetsi sirky mozkovny zen (druhy vyber)
skull.BM <- ... # odstraneni NA hodnot ze skull.BM
skull.BF <- ... # odstraneni NA hodnot ze skull.BF
n1 <- ... # rozsah prvniho nahodneho vyberu
n2 <- ... # rozsah druheho nahodneho vyberu
tab <- data.frame(...) # rozsah, min a max prvniho, resp. druheho nah. vyberu
```

```
   n1  n2 min1 max1 min2 max2
1 216 109  124  149  118  146
```

V tomto příkladu pracujeme se .... náhodnými výběry. První náhodný výběr obsahuje údaje o největší šířce mozkovny .... mužů, druhý náhodný výběr obsahuje údaje o největší šířce mozkovny .... žen starověké egyptské populace. Naměřené hodnoty u mužů se pohybují v rozmezí ....-................ mm, naměřené hodnoty u žen se pohybují v rozmezí ....-................ mm.

Ze zadání máme za úkol porovnat střední hodnoty dvou populací (muži a ženy), použijeme tedy test o střední hodnotě / test o rozdílu středních hodnot / test o rozdílu korelačních koeficientů. Primárně bychom chtěli použít **parametrický** test. Nutným předpokladem parametrického testu je **normalita naměřených hodnot** (zvlášť v každém výběru).

Test normality naměřených hodnot pro muže

- H_0 : Data .... z normálního rozdělení.
- H_1 : Data .... z normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$............... . $n =$............... je menší / větší než 50 a menší / větší než 100 → Shapirův-Wilkův / Lillieforsův test.

```
[1] 0.07662229
```

Náhodný výběr největších šířek mozkovny mužů starověké egyptské populace .... z normálního rozdělení (p-hodnota = ... je menší / větší než $\alpha = 0.05$).

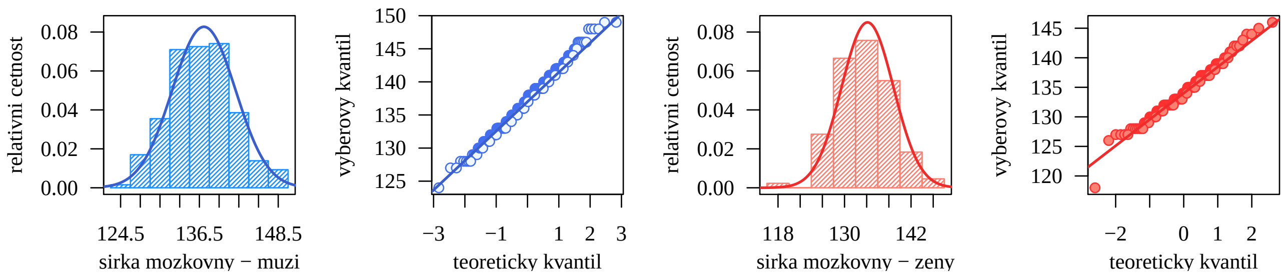
Test normality naměřených hodnot pro ženy

- H_0 : Data .... z normálního rozdělení.
- H_1 : Data .... z normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$............... $n =$.............. je menší / větší než 50 a menší / větší než 100 $\rightarrow$ Shapirův-Wilkův / Lillieforsův test.

```
[1] 0.06380994
```

Náhodný výběr největších šířek mozkovny žen starověké egyptské populace .... z normálního rozdělení (p-hodnota = ... je menší / větší než $\alpha = 0.05$).



Protože oba výběry pochází z normálního rozdělení, použijeme na otestování hypotézy ze zadání **parametrický test**. Vhodný parametrický test vybereme v závislosti na výsledku testu o podílu rozptylů.

Test o podílu rozptylů

- H_0 : .... $\rightarrow$ ....
- H_1 : .... $\rightarrow$ .... (.. alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha =$ ....

```
alpha <- ... # hladina vyznamnosti
var.test(skull.BM, skull.BF, alternative = ..., conf.level = ...) # test o podilu rozptylu
qf(...) # horni hranice kritickeho oboru
qf(...) # dolni hranice kritickeho oboru
```

```

	F test to compare two variances

data:  skull.BM and skull.BF
F = 1.0555, num df = 215, denom df = 108, p-value = 0.761
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.7532968 1.4525763
sample estimates:
ratio of variances
          1.055543
```

```
         q1       q2
1 0.7266694 1.401231
```

a) Test kritickým oborem

Hodnota testovací statistiky $f_w =$ ...., kritický obor W má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

b) Test intervalem spolehlivosti

Interval spolehlivosti má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

c) **Test p-hodnotou**

P-hodnota = ... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

Mezi rozptylem největší šířky mozkovny u mužů a žen starověké egyptské populace existuje / neexistuje statisticky významný rozdíl. Protože rozptyly obou výběrů jsou shodné, použijeme na otestování hypotézy ze zadání **klasický test o rozdílu středních hodnot** (rozptyly σ_1^2 a σ_2^2 jsou neznámé, ale shodné).

Klasický test o rozdílu středních hodnot

- H_0 : .... $\to$ ....
- H_1 : .... $\to$ .... (.. alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha =$ ....

```
t.test(skull.BM, skull.BF, alternative = ..., conf.level = ...,
       var.equal = T) # klasicky test o rozdilu strednich hodnot
qt(...) # horni hranice kritickeho oboru
qt(...) # dolni hranice kritickeho oboru
```

```

	Two Sample t-test

data:  skull.BM and skull.BF
t = 5.4079, df = 323, p-value = 1.243e-07
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 1.933070 4.143723
sample estimates:
mean of x mean of y
 137.1852  134.1468
```

```
         q1       q2
1 -1.967336 1.967336
```

a) **Test kritickým oborem**

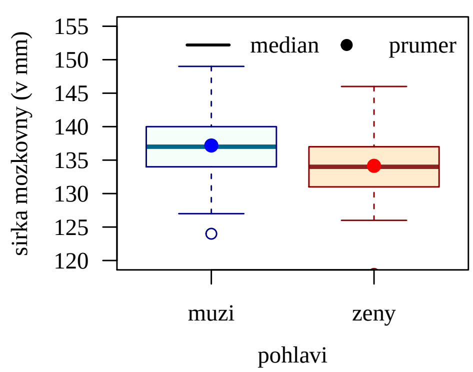
Hodnota testovací statistiky $t_w =$ ...., kritický obor W má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

b) **Test intervalem spolehlivosti** Interval spolehlivosti má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

c) **Test p-hodnotou**
P-hodnota = ... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

Interpretace výsledků: Mezi největší šířkou mozkovny u mužů a žen starověké egyptské populace existuje / neexistuje statisticky významný rozdíl.

```
par(mar = ...) # nastaveni okraju grafu 4, 4, 1, 1
boxplot(skull.BM, skull.BF, las = 1, ylim = c(120, 155), col = c(..., ...), medcol = c(..., ...),
        border = c(..., ...), xlab = '', ylab = ..., names = c(..., ...)) # krabicovy diagram
mtext('pohlavi', line = ..., side = ...) # popisek osy x
points(c(mean(skull.BM), mean(skull.BF)), pch = ..., col = c(..., ...)) # aritmeticke prumery
legend('topright', horiz = T, pch = c(NA, ...), lty = c(..., NA),
       lwd = c(..., NA), legend = c(..., ...), bty = ...) # legenda
```



★

Dataset: 19-more-samples-correlations-skull.txt

Datový soubor 19-more-samples-correlations-skull.txt obsahuje údaje o šířce nosu a o interorbitální šířce mužů z německé, malajské, čínské, peruánské a bantuské populace. Data pochází z archivních materiálů (Schmitd, 1888).

Popis proměnných v datasetu:

- pop . . . populace (nem - německá, mal - malajská, cin - čínská, per - peruánská, ban - bantuská);
- sex . . . pohlaví jedince (m - muž);
- nose.B . . . šířka nosu (v mm);
- intorb.B . . . interorbitální šířka (v mm).

Příklad 9.2. Welchův test o rozdílu středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ (σ_1^2 a σ_2^2 jsou neznámé a různé)

Mějme datový soubor 19-more-samples-correlations-skull.txt a proměnnou nose.B popisující šířku nosu. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ zjistěte, zda je šířka nosu mužů čínské populace menší než šířka nosu mužů bantuské populace.

Řešení příkladu 9.2

```
data <- read.delim(...) # nacteni datoveho souboru
nose.BC <- data[... , ...] # vyber sirky nosu muzu cinske populace (prvni vyber)
nose.BB <- data[... , ...] # vyber sirky nosu muzu bantuske populace (druhy vyber)
nose.BC <- ... # odstraneni NA hodnot z nose.BC
nose.BB <- ... # odstraneni NA hodnot z nose.BB
n1 <- ... # rozsah prvniho nahodneho vyberu
n2 <- ... # rozsah druheho nahodneho vyberu
tab <- data.frame(...) # rozsah, min a max prvniho, resp. druheho nah. vyberu
```

```
  n1 n2 min1 max1 min2 max2
1 19 14   23   28   22   31
```

V tomto příkladu pracujeme se .... náhodnými výběry. První výběr obsahuje údaje o šířce nosu .... mužů .... populace, druhý výběr obsahuje údaje o šířce nosu .... mužů .... populace. Hodnoty u mužů čínské populace se pohybují v rozmezí ....-................ mm, hodnoty u mužů bantuské populace se pohybují v rozmezí ....-................ mm.

Ze zadání máme za úkol porovnat střední hodnoty dvou populací (čínské a bantuské), použijeme tedy párový test / test o rozdílu středních hodnot / test o rozdílu korelačních koeficientů. Primárně bychom chtěli použít **parametrický** test. Nutným předpokladem parametrického testu je **normalita naměřených hodnot** (zvlášť v každém výběru).

Test normality naměřených hodnot u mužů čínské populace

- H_0 : Data .... z normálního rozdělení.
- H_1 : Data .... z normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$............... . $n =$............... je menší / větší než 50 a menší / větší než 100 → Shapirův-Wilkův Lillieforsův test.

```
[1] 0.1173442
```

Náhodný výběr šířek nosu mužů čínské populace .... z normálního rozdělení (p-hodnota = ... je menší / větší než $\alpha = 0.05$).

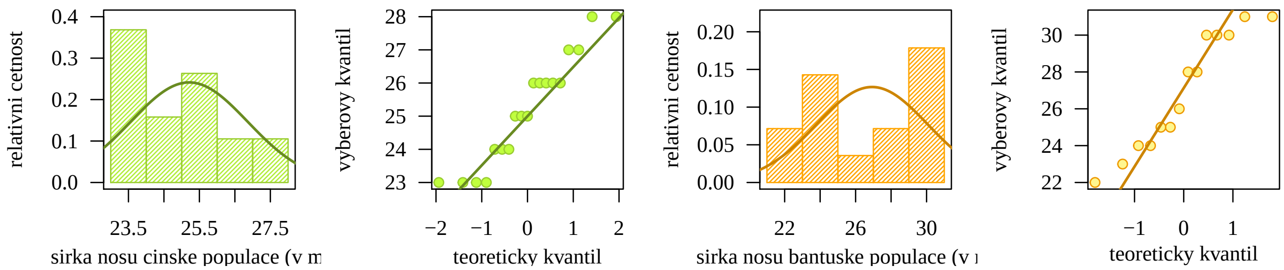
Test normality naměřených hodnot u mužů bantuské populace

- H_0 : Data .... z normálního rozdělení.
- H_1 : Data .... z normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$............... . $n =$............... je menší / větší než 50 a menší / větší než 100 → Shapirův-Wilkův Lillieforsův test.

```
[1] 0.1511379
```

Náhodný výběr šířek nosu mužů bantuské populace .... z normálního rozdělení (p-hodnota = ... je menší / větší než $\alpha = 0.05$).



Protože oba výběry pochází z normálního rozdělení, použijeme na otestování hypotézy ze zadání **parametrický test**. Vhodný parametrický test vybereme v závislosti na výsledku testu o podílu rozptylů.

Test o podílu rozptylů

- H_0 : .... $\to$ ....
- H_1 : .... $\to$ .... (.. alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha =$ ....

```
alpha <- ... # hladina vyznamnosti
var.test(..., ..., alternative = ..., conf.level = ...) # test o podilu rozptylu
qf(...) # horni hranice kritickeho oboru
qf(...) # dolni hranice kritickeho oboru
```

```

        F test to compare two variances

data:  nose.BC and nose.BB
F = 0.27537, num df = 18, denom df = 13, p-value = 0.01258
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.09230537 0.75180759
sample estimates:
ratio of variances
         0.2753689
```

```
         q1        q2
1 0.3662758 2.983239
```

a) Test kritickým oborem Hodnota testovací statistiky $f_w =$ ...., kritický obor W má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

   Interval spolehlivosti má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

b) **Test p-hodnotou**
   P-hodnota = ... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

Mezi rozptylem šířky nosu mužů čínské a bantuské populace existuje / neexistuje statisticky významný rozdíl. Protože rozptyly obou výběrů nejsou shodné, použijeme na otestování hypotézy ze zadání **Welchův test o rozdílu středních hodnot** (rozptyly σ_1^2 a σ_2^2 jsou neznámé a různé).

Welchův test o rozdílu středních hodnot

- H_0 : .... $\rightarrow$ ....
- H_1 : .... $\rightarrow$ .... (.. alternativa).
- Hladina významnosti $\alpha =$ ....

```
t.test(..., ..., alternative = ..., conf.level = ...,
       var.equal = F) # Welchuv test o rozdilu strednich hodnot
df <- t.test(..., ..., alternative = ..., conf.level = ..., var.equal = F)$parameter # pocet
  # stupnu volnosti; argumenty funkce jsou stejne jako vyse; pocet stupnu volnosti je ulozen
  # ve vystupu s nazvem 'parameter'
qt(...) # horni hranice kritickeho oboru
```

```

        Welch Two Sample t-test

data:  nose.BC and nose.BB
t = -1.8611, df = 18.268, p-value = 0.03945
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
95 percent confidence interval:
       -Inf -0.1185797
sample estimates:
mean of x mean of y
 25.21053  26.92857
```

```
          q
1 -1.732689
```

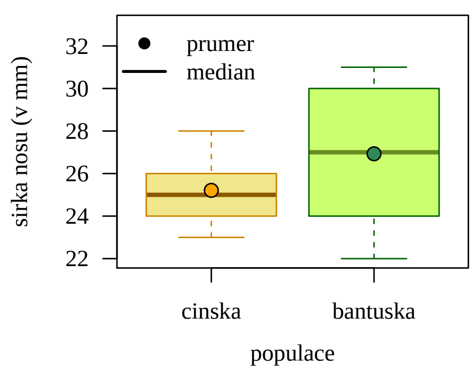
a) **Test kritickým oborem** Hodnota testovací statistiky $t_w =$ ...., kritický obor W má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

b) **Test intervalem spolehlivosti** Interval spolehlivosti má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

c) **Test p-hodnotou**
P-hodnota $=$ .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti $\alpha =$ ....

Interpretace výsledků: Šířka nosu mužů čínské populace je / není statisticky významně menší než šířka nosu mužů bantuské populace.

```
par(mar = ...) # nastaveni okraju grafu 4, 4, 1, 1
boxplot(nose.BC, nose.BB, las = 1, ylim = c(22, 33), col = c(..., ...), medcol = c(..., ...),
        border = c(..., ...), xlab = '', ylab = ..., names = c(..., ...)) # krabicovy diagram
mtext('pohlavi', line = ..., side = ...) # popisek osy x
points(c(mean(nose.BC), mean(nose.BB)), pch = ..., col = c(..., ...)) # aritmeticke prumery
legend('topright', pch = c(NA, ...), lty = c(..., NA),
       lwd = c(..., NA), legend = c(..., ...), bty = ...) # legenda
```



★

Dataset: 13-two-samples-correlations-trunk.txt
Datový soubor 13-two-samples-correlations-trunk.txt obsahuje údaje o délce trupu a délce dolní končetiny mladých dospělých jedinců, převážně studentů vysokých škol z Brna a Ostravy (Králík, nepublikovaná data).

Popis proměnných v datasetu:

- sex - pohlaví (m - muž, f - žena);
- lowex.L - délka dolní končetiny (v mm);
- tru.L - délka trupu (v mm).

Příklad 9.3. Test o rozdílu korelačních koeficientů $\rho_1 - \rho_2$
Mějme datový soubor 13-two-samples-correlations-trunk.txt, proměnnou lowex.L popisující délku dolní končetiny a proměnnou tru.L popisující délku trupu. Na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ zjistěte, zda je korelační koeficient délky dolní končetiny a délky trupu u mužů menší než u žen.

Řešení příkladu 9.3

```
data <- read.delim(...) # nacteni datoveho souboru
data.M <- na.omit(data[... , ...]) # vyber delky d. koncetiny a delky trupu muzu (prvni vyber)
data.F <- na.omit(data[... , ...]) # vyber delky d. koncetiny a delky trupu zen (druhy vyber)
lowex.LM <- # hodnoty delky dolni koncetiny muzu
tru.LM <- # hodnoty delky trupu muzu
lowex.LF <- # hodnoty delky dolni koncetiny zen
tru.LF <- # hodnoty delky trupu zen
n1 <- ... # rozsah prvniho nahodneho vyberu
n2 <- ... # rozsah druheho nahodneho vyberu
tab <- data.frame(...) # rozsah a koeficient korelace prvniho, resp. druheho nah. vyberu
```

```
  n1       rho1  n2     rho2
1 75 0.05975781 100 0.285256
```

V tomto příkladu pracujeme se .... náhodnými výběry. První výběr obsahuje údaje o délce dolní končetiny a délce trupu u .... mužů, druhý výběr obsahuje údaje o délce dolní končetiny a délce trupu u .... žen. Hodnota výběrového korelačního koeficientu pro muže $R_1 =$ .... a pro ženy $R_2 =$...................... .
Nyní ověříme **dvourozměrnou normalitu** naměřených hodnot (zvlášť v každém výběru).

Test dvourozměrné normality naměřených hodnot pro muže

- H_0: Data .... z dvourozměrného normálního rozdělení.
- H_1: Data .... z dvourozměrného normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$............... . Mardiův test.

```
             Test          Statistic           p value Result
1 Mardia Skewness   2.98735817484524 0.559943203738428    YES
2 Mardia Kurtosis -0.789574288194589 0.429776429043593    YES
3             MVN               <NA>              <NA>    YES
```

Náhodný výběr délek dolní končetiny a délek trupu u mužů .... z dvourozměrného normálního rozdělení. (Data vykazují / nevykazují výrazné zešikmení (p-hodnota = ... je menší / větší než $\alpha = 0.05$). Data vykazují / nevykazují výrazné zešpičatění či zploštění (p-hodnota = ... je menší / větší než $\alpha = 0.05$).)

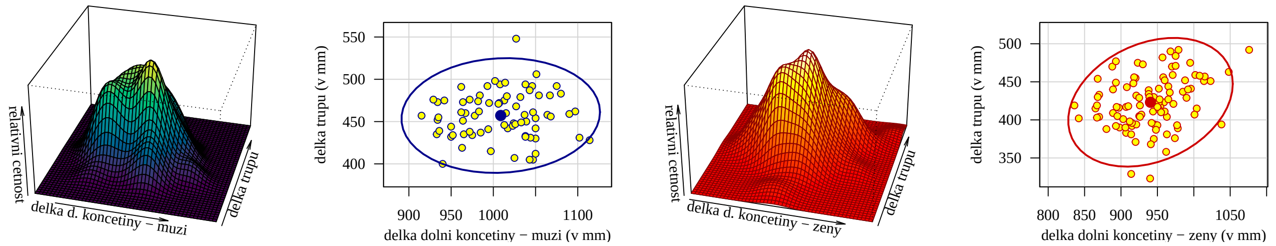
Test dvourozměrné normality naměřených hodnot pro ženy

- H_0 : Data .... z dvourozměrného normálního rozdělení.
- H_1 : Data .... z dvourozměrného normálního rozdělení.

Hladina významnosti $\alpha =$............... . Mardiův test.

```
             Test          Statistic           p value Result
1 Mardia Skewness   6.31326657225727 0.176942962210473    YES
2 Mardia Kurtosis -0.207066071208097 0.835958259081491    YES
3             MVN               <NA>              <NA>    YES
```

Náhodný výběr délek dolní končetiny a délek trupu u žen .... z dvourozměrného normálního rozdělení. (Data vykazují / nevykazují výrazné zešikmení (p-hodnota = ... je menší / větší než $\alpha = 0.05$). Data vykazují / nevykazují výrazné zešpičatění či zploštění (p-hodnota = ... je menší / větší než $\alpha = 0.05$).)



Protože oba náhodné výběry pochází z dvourozměrných normálních rozdělení, použijeme **parametrický test**.

Test o rozdílu korelačních koeficientů $\rho_1 - \rho_2$

- H_0 : .... $\rightarrow$ ....
- H_1 : .... $\rightarrow$ .... (.. alternativa).
- Hladina významnosti α = ...

```
alpha <- ... # hladina vyznamnosti
source('Sbirka-AS-I-2018-funkce-II.txt') # nacteni souboru 'Sbirka-AS-I-2018-funkce-II.txt'
corZ.two.test(data.M, data.F, alternative = ..., conf.level = ...)
qnorm(...) # horni hranice kritickeho oboru
```

```
          R1       R2        u0 dh        hh      p.val
1 0.05975781 0.285256 -1.501471 -2 0.1276162 0.06661688
```

```
          q
1 -2.326348
```

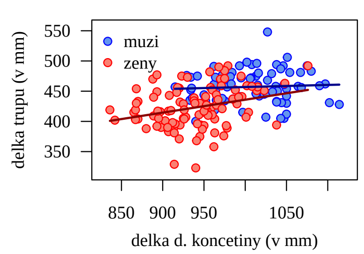
a) **Test kritickým oborem**
Hodnota testovací statistiky z_w = ..., kritický obor W má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti α = ...

b) **Test intervalem spolehlivosti**
Interval spolehlivosti má tvar .... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti α = ...

c) **Test p-hodnotou**
P-hodnota = ... Protože ...., H_0 .... na hladině významnosti α = ...

Interpretace výsledků: Korelační koeficient délky dolní končetiny a délky trupu u mužů je / není statisticky významně menší než u žen. Mezi délkou dolní končetiny a délkou trupu mužů existuje .... stupeň .... závislosti ($R_1 = 0.0598$). Mezi délkou dolní končetiny a délkou trupu žen existuje .... stupeň .... závislosti ($R_2 = 0.2853$).

```
par(mar = ...) # nastaveni okraju 4, 4, 1, 1
source('Sbirka-AS-I-2018-funkce-II.R')
cor.plot(data.M, data.F, col = c('blue', 'red'), bg = c('cornflowerblue', 'salmon'), xlab = '',
         line.col = c('darkblue', 'darkred'), lwd = c(2, 2))
mtext(..., side = 1, line = 2.3)
legend(..., pch = ..., pt.bg = c(..., ...), col = c(..., ...), legend = c(..., ...), bty = 'n')
```



★