10 Asymptotické neparametrické testy - vzorce, aneb co se do cvičení nevešlo (ani v předchozích letech)

10.1 Wilcoxonův jednovýběrový asymptotický test

Pro náhodné výběry o rozsazích $n \geq 30$ máme možnost použít k otestování nulové hypotézy asymptotickou variantu testu. Tuto variantu nazýváme Wilcoxonův jednovýběrový asymptotický test o mediánu $\tilde{x}$. Testovací statistika asymptotického testu má tvar

$$S_A = \frac{S_E - \frac{m(m+1)}{4}}{\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{24}}} \tag{10.1}$$

kde S_E je statistika Wilcoxonova jednovýběrového exaktního testu a m je počet nenulových rozdílů $X_i - \tilde{x}_0$. Za platnosti nulové hypotézy pochází statistika S_A ze standardizovaného normálního rozdělení, tj.

$$S_A = \frac{S_E - \frac{m(m+1)}{4}}{\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{24}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1).$$

Kritický obor podle zvolené alternativní hypotézy má tvar

$$\begin{array}{ll} H_{11}: \tilde{x} \neq \tilde{x}_0 & W = \left(-\infty\,;\, u_{\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}\,;\, \infty\right) \\ H_{12}: \tilde{x} > \tilde{x}_0 & W = \langle u_{1-\alpha}\,;\, \infty) \\ H_{13}: \tilde{x} < \tilde{x}_0 & W = (-\infty\,;\, u_{\alpha}\rangle \end{array}$$

kde $u_{\alpha/2}$, $u_{1-\alpha/2}$, u_α, $u_{1-\alpha}$ jsou kvantily standardizovaného normálního rozdělení, jejichž hodnoty získáme pomocí a implementované funkce `qnorm()`.

Interval spolehlivosti má podle zvolené alternativní hypotézy jeden z následujících tvarů

$$\begin{array}{ll} H_{11}: \tilde{x} \neq \tilde{x}_0 & (d,h) = \left(V^{(C_{1-\alpha/2})}\,;\, V^{(C_{\alpha/2})}\right) \\ H_{12}: \tilde{x} > \tilde{x}_0 & (d,\infty) = \left(V^{(C_{1-\alpha})}\,;\, \infty\right) \\ H_{13}: \tilde{x} < \tilde{x}_0 & (-\infty,h) = \left(-\infty\,;\, V^{(C_{\alpha})}\right) \end{array}$$

kde $C_{1-\alpha/2} = \frac{m(m+1)}{4} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{24}}$, $C_{\alpha/2} = \frac{m(m+1)}{4} - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{24}}$, $C_{1-\alpha} = \frac{m(m+1)}{4} - u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{24}}$, $C_\alpha = \frac{m(m+1)}{4} - u_\alpha\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{24}}$, $V^{(1)} \leq \cdots \leq V^{(\frac{m(m+1)}{2})}$ značí posloupnost vzestupně seřazených $\frac{m(m+1)}{2}$ Walshových průměrů $\frac{(X_i+X_j)}{2}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,m$, $j \leq i$ a $V^{(k)}$, značí k-tý seřazený Walshův průměr. Posloupnost Walshových průměrů získáme příkazem `owa` z knihovny `NSM3`.

p-hodnota má v závislosti na zvolené alternativní hypotéze jeden z následujících tvarů

$$\begin{array}{ll} H_{11}: \tilde{x} \neq \tilde{x}_0 & p\text{-hodnota} = 2\min\{\Pr(S_A \leq s_A)\,,\, \Pr(S_A \geq s_A)\} = \texttt{2min(pnorm(sA), 1 - pnorm(sA))} \\ H_{12}: \tilde{x} > \tilde{x}_0 & p\text{-hodnota} = \Pr(S_A \geq s_A) = \texttt{1 - pnorm(sA)} \\ H_{13}: \tilde{x} < \tilde{x}_0 & p\text{-hodnota} = \Pr(S_A \leq s_A) = \texttt{pnorm(sA)} \end{array}$$

kde S_A je náhodná veličina, s_A je realizace testovací statistiky S_A (viz vzorec 10.1), tedy konkrétní číslo, a $\Pr(S_A \leq s_A)$ je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení, jejíž hodnotu získáme pomocí a implementované funkce `pnorm()`.

10.2 Znaménkový jednovýběrový asymptotický test

Pro náhodný výběr o rozsahu $n > 30$ máme možnost použít k otestování nulové hypotézy asymptotickou variantu testu. Tuto variantu nazýváme znaménkovým jednovýběrovým asymptotickým testem. Testovací statistika asymptotického variantu testu má tvar

$$S_A = \frac{S_E - \frac{m}{2}}{\sqrt{\frac{m}{4}}} \tag{10.2}$$

kde S_E je testovací statistika znaménkového jednovýběrového exaktního testu a m je počet nenulových rozdílů $X_i - \tilde{x}_0$. Za platnosti nulové hypotézy pochází statistika S_A ze standardizovaného normálního rozdělení, tj.

$$S_A = \frac{S_E - \frac{m}{2}}{\sqrt{\frac{m}{4}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1). \tag{10.3}$$

Kritický obor podle zvolené alternativní hypotézy má tvar

$$\begin{array}{ll} H_{11} : \tilde{x} \neq \tilde{x}_0 & W = \big(-\infty\,;\, u_{\alpha/2}\big\rangle \cup \big\langle u_{1-\alpha/2}\,;\, \infty\big) \\ H_{12} : \tilde{x} > \tilde{x}_0 & W = \langle u_{1-\alpha}\,;\, \infty) \\ H_{13} : \tilde{x} < \tilde{x}_0 & W = (-\infty\,;\, u_{\alpha}\rangle \end{array}$$

kde $u_{\alpha/2}$, $u_{1-\alpha/2}$, u_{α}, $u_{1-\alpha}$ jsou kvantily standardizovaného normálního rozdělení, jejichž hodnoty získáme pomocí R a implementované funkce `qnorm()`.

Interval spolehlivosti má podle zvolené alternativní hypotézy jeden z následujících tvarů

$$\begin{array}{ll} H_{11} : \tilde{x} \neq \tilde{x}_0 & (d, h) = \big(X^{(C_{1-\alpha/2})}\,;\, X^{(n+1-C_{1-\alpha/2})}\big) \\ H_{12} : \tilde{x} > \tilde{x}_0 & (d, \infty) = \big(X^{(C_{1-\alpha})}\,;\, \infty\big) \\ H_{13} : \tilde{x} < \tilde{x}_0 & (-\infty, h) = \big(-\infty\,;\, X^{(n+1-C_{1-\alpha})}\big) \end{array}$$

kde n je rozsah náhodného výběru, $C_{1-\alpha/2} = \frac{n}{2} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{n}{4}}$, $C_{1-\alpha} = \frac{n}{2} - u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{n}{4}}$, $X^{(1)} \leq \cdots \leq X^{(n)}$ značí vzestupně seřazené hodnoty X_i, $i = 1, \ldots, n$, a $X^{(k)}$ značí k-tou hodnotu v seřazené posloupnosti $X^{(1)} \leq \cdots \leq X^{(n)}$.

p-hodnota má v závislosti na zvolené alternativní hypotéze jeden z následujících tvarů

$$\begin{array}{ll} H_{11} : \tilde{x} \neq \tilde{x}_0 & p\text{-hodnota} = 2\min\{\Pr(S_A \leq s_A)\,,\, \Pr(S_A \geq s_A)\} = \texttt{2min(pnorm(sA), 1 - pnorm(sA))} \\ H_{12} : \tilde{x} > \tilde{x}_0 & p\text{-hodnota} = \Pr(S_A \geq s_A) = \texttt{1 - pnorm(sA)} \\ H_{13} : \tilde{x} < \tilde{x}_0 & p\text{-hodnota} = \Pr(S_A \leq s_A) = \texttt{pnorm(sA)} \end{array}$$

kde S_A je náhodná veličina, s_A je realizace testovací statistiky S_A (viz vzorec 10.2), tedy konkrétní číslo, $\Pr(S_A \geq s_A) = 1 - \Pr(S_A < s_A) = 1 - \Pr(S_A \leq s_A)$, což vyplývá z faktu, že náhodná veličina S_A pochází z normálního (spojitého) rozdělení (viz kapitola **??**), a $\Pr(S_A \leq s_A)$ je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení, jejíž hodnotu získáme pomocí R a implementované funkce `pnorm()`.

Poznámka: Všimněme si, že ve vzorcích intervalu spolehlivosti figuruje rozsah náhodného výběru n, zatímco ve vzorcích testovací statistiky a hranic kritického oboru pracujeme s počtem nenulových rozdílů m.

10.3 Znaménkový párový test

Nechť $(X_1, Y_1)^T \dots (X_n, Y_n)^T$ je náhodný výběr z libovolného (ne nutně normálního) dvourozměrného rozdělení Nechť dále $Z_1, \dots, Z_n$, $n \geq 2$ je náhodný výběr rozdílů $X - Y$, tj. $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$, kde $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \dots, n$, a nechť tento náhodný výběr pochází z libovolného spojitého rozdělení. Konečně, nechť $\tilde{z}_0$ je konstanta. Na hladině významnosti α testujeme jednu z následujících tří hypotéz oproti příslušné alternativní hypotéze.

$H_{01} : \tilde{z} = \tilde{z}_0$	oproti	$H_{11} : \tilde{z} \neq \tilde{z}_0$	(oboustranná alt.)
$H_{02} : \tilde{z} \leq \tilde{z}_0$	oproti	$H_{12} : \tilde{z} > \tilde{z}_0$	(pravostranná alt.)
$H_{03} : \tilde{z} \geq \tilde{z}_0$	oproti	$H_{13} : \tilde{z} < \tilde{z}_0$	(levostranná alt.)

kde $\tilde{z}$ je medián rozdílů $Z_1, \dots, Z_n$ a $\tilde{z}_0$ je konstanta, jejíž hodnotu nejčastěji volíme jako $\tilde{z}_0 = 0$. Tato volba odpovídá hypotéze, že rozdíl mezi mediány náhodných veličin X a Y neexistuje (resp. hypotéze, že medián náhodné veličiny X je menší, resp. větší, než medián náhodné veličiny Y). Vzhledem k tomu, že jde finálně o situaci, kdy medián $\tilde{z}$ porovnáváme s konstantou $\tilde{z}_0$, testujeme hypotézy o rozdílu mediánů $X - Y$ pomocí exaktní nebo asymptotické varianty znaménkového jednovýběrového testu, analogicky jako je uvedeno v sekcích **??** a 10.2.

Výše popsaný test, v rámci kterého převádíme problém porovnávání mediánů dvou náhodných veličin X a Y na problém srovnávání mediánu jejich rozdílů Z s konstantou $\tilde{z}_0 = 0$ a následně jej řešíme pomocí exaktní resp. asymptotické varianty znaménkového jednovýběrového testu, nazýváme znaménkový párový test.

10.4 Wilcoxonův dvouvýběrový test (Mannův-Whitneyův U test) – asymptotická varianta

Pro náhodné výběry o rozsazích $n_1 > 30$ a $n_2 > 30$ máme možnost použít k otestování nulové hypotézy asymptotickou variantu Wilcoxonova dvouvýběrového testu (resp. Mannova-Whitneyova U testu). Testovací statistika

$$S_A = \frac{S_E - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}} \tag{10.4}$$

kde S_E je testovací statistika definovaná vztahem **??**, n_1 je rozsah prvního náhodného výběru, n_2 je rozsah druhého náhodného výběru. Za platnosti nulové hypotézy pochází statistika U_A ze standardizovaného normálního rozdělení, tj.

$$S_A = \frac{S_E - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1).$$

Kritický obor podle zvolené alternativní hypotézy má tvar

$$\begin{array}{ll} H_{11}: \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \neq \tilde{x}_0 & W = \left(-\infty\,;\, u_{\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}\,;\, \infty\right) \\ H_{12}: \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 > \tilde{x}_0 & W = \langle u_{1-\alpha}\,;\, \infty) \\ H_{13}: \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 < \tilde{x}_0 & W = (-\infty\,;\, u_{\alpha}\rangle \end{array}$$

kde $u_{\alpha/2}$, $u_{1-\alpha/2}$, u_{α}, $u_{1-\alpha}$ jsou kvantily standardizovaného normálního rozdělení, jejichž hodnoty získáme pomocí R a implementované funkce qnorm().

Interval spolehlivosti má podle zvolené alternativní hypotézy jeden z následujících tvarů

$$\begin{array}{ll} H_{11}: \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \neq \tilde{x}_0 & (d,h) = \left(U^{(C_{1-\alpha/2})}\,;\, U^{(n_1 n_2 + 1 - C_{1-\alpha/2})}\right) \\ H_{12}: \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 > \tilde{x}_0 & (d,\infty) = \left(U^{(C_{1-\alpha})}\,;\, \infty\right) \\ H_{13}: \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 < \tilde{x}_0 & (-\infty,h) = \left(-\infty\,;\, U^{(n_1 n_2 + 1 - C_{1-\alpha})}\right) \end{array}$$

kde $C_{1-\alpha/2} = \frac{n_1 n_2}{2} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}$, $C_{1-\alpha} = \frac{n_1 n_2}{2} - u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}$ a $U^{(1)} \leq \cdots \leq U^{(n_1 n_2)}$ značí vzestupně seřazené rozdíly $X_{2j} - X_{1i}$, $i = 1, \ldots, n_1$, $j = 1, \ldots, n_2$, a $U^{(x)}$ značí x-tý seřazený rozdíl. Není-li $C_{1-\alpha/2}$, resp. $C_{1-\alpha}$ celé číslo, zaokrouhujeme jej vždy dolů na nejbližší nižší celé číslo.

p-hodnota má v závislosti na zvolené alternativní hypotéze jeden z následujících tvarů

$$\begin{array}{ll} H_{11}: \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \neq \tilde{x}_0 & p\text{-hodnota} = 2\min\{\Pr(S_A \leq s_A)\,,\, \Pr(S_A > s_A)\} = \texttt{2min(pnorm(sA), 1 - pnorm(sA))} \\ H_{12}: \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 > \tilde{x}_0 & p\text{-hodnota} = \Pr(S_A > s_A) = 1 - \Pr(S_A \leq s_A) = \texttt{1 - pnorm(sA)} \\ H_{13}: \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 < \tilde{x}_0 & p\text{-hodnota} = \Pr(S_A \leq s_A) = \texttt{pnorm(sA)} \end{array}$$

kde S_A je náhodná veličina, s_A je realizace testovací statistiky S_A (viz vzorec 10.4), tedy konkrétní číslo, a $\Pr(S_A \leq s_A)$ je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení, jejíž hodnotu získáme pomocí R a implementované funkce pnorm().