Maxima

Jakou největší hodnotu nabývá náhodná procházka do času n?

Rozdělení maximálních hodnot je důležité např. pro oceňování zpětných (lookback) opcí.

Připomeňme si důsledek Věty o volbách.

Věta 5.1. *Nechť $S_0 = 0$. Pro $n \geq 1$ platí*

$$\mathrm{P}(S_n = b \;\&\; S_1 \cdot S_2 \cdots S_n \neq 0) = \frac{|b|}{n} \cdot \mathrm{P}(S_n = b)$$

a tedy

$$\mathrm{P}(S_1 \cdot S_2 \cdots S_n \neq 0) = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{E}(|S_n|).$$

Důkaz: Nechť $S_n = b > 0$. Podle věty o volbách je počet cest z bodu $(0,0)$ do bodu (n, b), které nenavštíví počátek celkem

$$\frac{b}{n} \cdot N_n(0, b).$$

Tedy

$$\mathrm{P}(S_n = b \,\&\, S_1 \cdot S_2 \cdots S_n \neq 0) = \frac{b}{n} \cdot N_n(0, b) \cdot p^{\frac{n+b}{2}} \cdot q^{\frac{n-b}{2}} = \frac{b}{n} \cdot \mathrm{P}(S_n = b).$$

Podobně pro $b < 0$.

Jakou maximální hodnotu nabývá N. P. do času n?

Označme

$$M_n = \max\{S_i; 0 \leq i \leq n\}$$

a opět $S_0 = 0$, tedy $M_n \geq 0$.

Věta 5.2. *Nechť $S_0 = 0$. Pak pro $n \geq 1$ platí*

$$\mathrm{P}(M_n \geq r \,\&\, S_n = b) = \begin{cases} \mathrm{P}(S_n = b) & \textit{pro } b \geq r \\ (\frac{q}{p})^{r-b} \cdot \mathrm{P}(S_n = 2r - b) & \textit{pro } b < r \end{cases}$$

Důkaz: Zřejmě $M_n \geq S_n$, tedy 1. část je jasná.

Dále máme pro $b < r$:

Nechť $N_n^r(0, b)$ je počet cest z $(0, 0)$ do (n, b), které obsahují nějaký bod s hodnotou r, t.j. (i, r) pro $0 < i < n$.

Nechť pro takovou cestu c je (i_c, r) první takový bod.

Uvažujme reflexi takové cesty pro $i_c \leq k \leq n$ okolo přímky $y = r$.

Tak dostaneme cestu c' z $(0,0)$ do $(n, 2r-b)$.

Každá taková cesta c' vznikne z jednoznačně určené cesty c.

Tedy

$$N_n^r(0,b) = N_n(0, 2r-b)$$

.

Tedy

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(M_n \geq r \;\&\; S_n = b) &= N_n^r(0,b) \cdot p^{\frac{n+b}{2}} \cdot q^{\frac{n-b}{2}} = \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b} \cdot N_n(0, 2r-b) \cdot p^{\frac{n+2r-b}{2}} \cdot q^{\frac{n-2r+b}{2}} = \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b} \cdot \mathrm{P}(S_n = 2r-b)
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnost $P(M_n \geq r)$ dostaneme sečtením přes všechny hodnoty b. Speciálně, pro $p = q = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$
P(M_n \geq r) = P(S_n = r) + 2P(S_n > r). \tag{1}
$$

Pravděpodobnosti hodnot S_n umíme explicitně vypočítat.

Pro pst. funkci maxima platí

$$P(M_n = r) = P(S_n = r) + P(S_n = r + 1). \tag{2}$$

Jaká je pravděpodobnost, že N.P. dosáhne nového maxima v daném čase?

Věta 5.3. *Pravděpodobnost $f_b(n)$, že N.P. se poprvé dostane do bodu b v čase n je*

$$f_b(n) = \frac{|b|}{n} \cdot \mathrm{P}(S_n = b).$$

Důkaz: Plyne z předminulé věty a principu reverze (obrácení).

Nechť pro původní trajektorii náhodné procházky je

$$(0, S_1, \dots, S_n) = (0, X_1, X_1 + X_2, \dots, \sum_{i=1}^{n} X_i).$$

Uvažujme obrácenou trajektorii

$$(0, T_1, \dots, T_n),$$

kde

$$(0, T_1, \dots, T_n) = (0, X_n, X_n + X_{n-1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} X_i).$$

X_i jsou IID, tedy obě mají stejné rozložení (pro libovolné p).

Původní náhodná procházka splňuje

$$S_n = b > 0 \ \& \ S_1, \dots, S_n \neq 0$$

(podmínky předminulé věty 5.1) $\iff$ obrácenná náhodná procházka (která je ve tvrzení věty označená jako S_n) splňuje $T_n = b$ a

$$T_n - T_{n-i} = (X_n + \cdots + X_1) - (X_n + \cdots + X_{i+1}) = X_1 + \cdots + X_i > 0 \text{ pro } \forall i,$$

tedy b se nabývá poprvé v čase n, jako nové maximum ("rekord"). Tedy

$$f_b(n) = \mathrm{P}(S_n = b \,\&\, S_1 \neq b, S_2 \neq b \cdots S_{n-1} \neq b) = \frac{b}{n} \cdot \mathrm{P}(S_n = b).$$

Analogicky pro $b < 0$.

Pólyova věta v $\mathbb{R}^n$

Definice 5.4. Mějme posloupnost náhodných vektorů

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, kde

$$X_i = \left(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, \ldots, X_i^{(m)}\right)$$

je m-rozměrný vektor. Nechť platí

$$P\left(X_i^{(j)} = 1\right) = \frac{1}{2}$$

a

$$P\left(X_i^{(j)} = -1\right) = \frac{1}{2}$$

pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, a všechna $X_i^{(j)}$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny.

m-rozměrná náhodná procházka je definována vztahem

$$S_n^{(j)} = S_0^{(j)} + \sum_{k=1}^{n} X_k^{(j)},$$

tedy vektorově

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Pro $m = 2$ uvažujme množinu mřížových bodů

$$\mathbb{Z}^2 = \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Nechť $S_0 = (0,\, 0)$, pak

$$P\left[S_1 = [1,1]\right] = P\left[S_1 = [-1,-1]\right] =$$

$$= P\left[S_1 = [-1,1]\right] = P\left[S_1 = [1,-1]\right] = \frac{1}{4}$$

Stirlingova formule

Chceme porovnat hodnotu $n!$ (která se v různých formách vyskytuje v kombinačních číslech pro počty trajektorií) s mocninnými funkcemi.

Víme, že $n^n \gg n\,(n-1)\ldots 21 \gg 2^n$, tedy $n^n \gg n! \gg 2^n$.

Jak rychle jde ale posloupnost $a_n = \frac{n!}{n^n}$ k nule?

Lze ji srovnat s geometrickou posloupností?

Pro $n \to \infty$ dostaneme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\frac{n!}{(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Tedy (zatím jen hodně přibližně) můžeme psát

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{1}{e^n},$$

neboli $n! \sim \frac{n^n}{e^n}$.

Stirlingova formule dává přesnější odhad.

Platí

$$n! \approx \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$$

v tom smyslu, že

$$lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Ze Stirlingovy formule dostaneme odhad na hodnotu

$u_{2k} = P\left(S_{2k} = 0\right).$

Lemma 5.5. *Platí* $u_{2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ *pro* $k \to \infty$, *tedy*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{u_{2k}}{\frac{1}{\sqrt{\pi k}}} = 1.$$

Důkaz: Máme

$$u_{2k} = P\left(S_{2k} = 0\right) = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$= \frac{(2k)!}{k!\,(2k-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \approx$$

$$\frac{\frac{(2k)^{2k}}{e^{2k}}\sqrt{2\pi 2k}}{\left(\frac{k^k}{e^k}\sqrt{2\pi k}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{2^{2k}k^{2k}\sqrt{2\pi 2k}}{\left(k^k\sqrt{2\pi k}\right)^2}\left(\frac{1}{2^{2k}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$

Tím je lemma dokázáno.

Věta 5.6. (***Pólyova věta***): *Pravděpodobnost, že se náhodná procházka vrátí nekonečněkrát zpět do počátku je rovna 1 pro* $m = 1$ *a* $m = 2$ *a je rovna 0 pro* $m > 2$.

Poznamenejme, že pro $m = 3$ je pravděpodobnost alespoň jednoho návratu do počátku $\doteq 0,35$.

Důkaz: Jako u jednorozměrné procházky označme

$$p_0(n) = P(S_n = 0)$$

pravděpodobnost návratu v čase n, a

$$f_0(n) = P(S_n = 0 \wedge S_1 \neq 0, \ldots, S_{n-1} \neq 0)$$

pravděpodobnost prvního návratu v čase n. Nechť P_0 a F_0 jsou generující funkce těchto posloupností. Víme, že platí

$$F_0 = 1 - \frac{1}{P_0}.$$

Máme

$$P\left(\text{částice se } \text{někdy vrátí do 0}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_0\left(n\right) = F_0\left(1\right) = 1 - \frac{1}{P_0\left(1\right)},$$

kde ale

$$P_0\left(1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_0\left(n\right).$$

Odtud dostáváme, že

$$P\left(\text{částice se vrátí do počátku}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \sum_{n=1}^{\infty} p_0\left(n\right) \text{ diverguje} \\ < 1 & \text{pokud } \sum_{n=1}^{\infty} p_0\left(n\right) \text{ konverguje} \end{cases}$$

Podle Stirlingovy formule víme, že $u_{2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$. Pro $m = 1$ je

$$p_0(n) = P(S_n = 0) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Víme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverguje, protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konverguje pro $s > 1$ (z integrálního kriteria).

Pro $m > 1$ je z *nezávislosti komponent*

$$P(S_n = 0) = P\left(S_n^{(1)} = S_n^{(2)} = \dots = S_n^{(m)} = 0\right) = \left(P\left(S_n^{(1)} = 0\right)\right)^m,$$

tedy

$$p_0(n) = P(S_n = 0) \approx \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Dále

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_0(n) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{m}{2}}}$$

konverguje pro $\frac{m}{2} > 1$, tj. $m > 2$.

Tedy pro $m > 2$ je hledaná pravděpodobnost alespoň jednoho návratu do počátku menší než 1.

Pro $m = 1$ a $m = 2$ je tato pravděpodobnost 1.

Pravděpodobnost nekonečně monoha návratů je tedy rovna 0 pro $m > 2$ a rovna 1 pro $m \leq 2$.