

# Oceňování finančních derivátů

Doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D.

Mgr. Lenka Křivánková

Tento učební text vznikl za přispění Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost v rámci projektu Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě (CZ.1.07/2.2.00/15.0203).

# Contents

<b>1</b>	<b>Základní vlastnosti opcí</b>	<b>7</b>
1.1	Dělení opcí . . . . .	7
1.2	Základní typy použití opcí . . . . .	9
1.2.1	Jištění . . . . .	11
1.2.2	Pákový efekt . . . . .	11
1.3	Put-Call parita . . . . .	12
1.4	Příklady . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Opční strategie</b>	<b>14</b>
2.1	Strategie s jednou opcí a jednou akcií . . . . .	14
2.1.1	Upsání kryté call opce . . . . .	14
2.1.2	Pojistný put . . . . .	15
2.2	Strategie s více opcemi stejného typu . . . . .	15
2.2.1	Bull spread . . . . .	15
2.2.2	Bear spread . . . . .	16
2.2.3	Butterfly spread . . . . .	17
2.3	Kombinace put a call opcí . . . . .	17
2.3.1	Bottom straddle . . . . .	17
2.3.2	Top straddle . . . . .	18
2.3.3	Strip . . . . .	19
2.3.4	Strap . . . . .	19
2.4	Calendar a diagonal spread . . . . .	19
2.5	Pojištěná investice do rizikového aktiva . . . . .	20
2.6	Příklady . . . . .	22

<b>3</b>	<b>Horní a dolní odhad cen opcí</b>	<b>23</b>
3.1	Horní odhady . . . . .	23
3.2	Dolní odhady . . . . .	24
3.3	Uplatnění americké call opce . . . . .	26
3.4	Příklady . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Analýza citlivosti Black-Scholesova vzorce</b>	<b>29</b>
4.1	Proměnné ovlivňující hodnotu opce . . . . .	29
4.2	Black-Scholesův vzorec . . . . .	30
4.3	Greeks . . . . .	31
4.3.1	Jištění opční pozice . . . . .	31
4.3.2	Delta a $\Delta$ -hedging . . . . .	32
4.3.3	Theta . . . . .	34
4.3.4	Gamma . . . . .	34
4.3.5	Taylorův rozvoj hodnoty portfolia v parametrech . . . . .	36
4.3.6	Vega . . . . .	37
4.3.7	Rho . . . . .	38
4.3.8	Vztah mezi $\Delta$ , $\Theta$ a $\Gamma$ . . . . .	38
4.4	Příklady . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Implikovaná volatilita</b>	<b>41</b>
5.1	Měření volatility . . . . .	42
5.2	Odhad volatility z historických dat . . . . .	43
5.3	Implikovaná volatilita a volatility smile . . . . .	44
5.3.1	Opce na směnné kurzy . . . . .	45
5.3.2	Opce na akcie . . . . .	45
5.4	Plocha implikované volatility . . . . .	46
5.5	Příklady . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Exotické opce</b>	<b>48</b>
6.1	Packages . . . . .	48
6.2	Nestandardní americké opce . . . . .	49
6.3	Složené opce . . . . .	49
6.4	Chooser options . . . . .	50

6.5	Bariérové opce . . . . .	51
6.6	Binární opce . . . . .	51
6.7	Look back opce . . . . .	52
6.8	Shout options . . . . .	53
6.9	Asijské opce . . . . .	53
6.10	Příklady . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Deriváty úrokových měř</b>	<b>55</b>
7.1	Tržní cena rizika . . . . .	55
7.2	Numeraire . . . . .	59
7.3	Rozšíření Black-Scholesova modelu pro stochastickou úrokovou míru . . . . .	62
7.4	Oceňování derivátů úrokových měř . . . . .	63
7.4.1	Blackův model . . . . .	63
7.4.2	Opce na dluhopisy . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Numerické metody oceňování evropských opcí</b>	<b>66</b>
8.1	Explicitní metoda . . . . .	66
8.2	Metoda binomického stromu . . . . .	69
8.3	Implicitní metoda . . . . .	69
8.4	Příklady . . . . .	71
<b>9</b>	<b>Stochastické modely pro vývoj úrokových měř</b>	<b>72</b>
9.1	Vašíčkův model . . . . .	72
9.2	Model CIR . . . . .	73
9.3	Model Hulla a Whitea . . . . .	73
<b>10</b>	<b>Americké opce</b>	<b>75</b>
10.1	Ocenění amerických opcí . . . . .	76
10.2	Iterační metoda řešení soustav lineárních rovnic . . . . .	77
10.3	Lineární komplementarita pro americké opce . . . . .	79
10.4	Řešení úlohy o lineární komplementaritě . . . . .	79
10.4.1	Projektovaná SOR metoda . . . . .	80
10.5	Numerické metody pro americké opce . . . . .	81

10.6 Příklady . . . . .	83
<b>11 Pravděpodobnostní rozdělení se silnými chvosty</b>	<b>84</b>
11.1 Charakterizace chvostů distribucí . . . . .	84
11.2 Charakterizace pomocí funkce přežití . . . . .	85
11.3 Charakterizace pomocí funkce rizika . . . . .	86
11.4 Stabilní distribuce . . . . .	87
11.5 Limitní rozdělení . . . . .	88
11.6 Lévyho procesy . . . . .	89
<b>12 Měření rizika</b>	<b>91</b>
12.1 Vlastnosti míry rizika . . . . .	91
12.2 Value-at-Risk . . . . .	92
12.3 Tail-Value-at-Risk . . . . .	92
12.4 Příklady nekoherence . . . . .	93
<b>13 Rozdělení extrémních hodnot</b>	<b>95</b>
13.1 Maxima náhodných veličin . . . . .	95
13.2 Gumbelovo rozdělení . . . . .	97
13.3 Fréchetovo rozdělení . . . . .	97
13.4 Weibullovo rozdělení . . . . .	98
13.5 Zobecněné rozdělení extrémních hodnot . . . . .	98
13.6 Stabilita . . . . .	98
<b>14 Konvergence rozdělení maximálních hodnot</b>	<b>101</b>
14.1 Oblasti přitažlivosti . . . . .	102
14.1.1 Oblasti přitažlivosti pro Fréchetovo rozdělení . . . . .	102
14.1.2 Oblasti přitažlivosti pro Gumbelovo rozdělení . . . . .	104
<b>15 Optimální jištění opční pozice</b>	<b>106</b>
15.1 Statické jištění . . . . .	106
15.2 Dynamické jištění opční pozice . . . . .	107

# Chapter 1

## Základní vlastnosti opcí

Myšlenka opčního kontraktu jako pojistky proti nepříznivému vývoji je velice přirozená. Opce se v různých podobách vyskytovaly ve starověku i ve středověku. Obchodování ve velkých objemech a standardizované obchody na burze nicméně začínají až s nástupem počítačů. S call opcemi se na burze poprvé obchodovalo v Chicagu v dubnu roku 1973. Put opce byly na burzu uvedeny až o čtyři roky později, v roce 1977.

Ve stejné době kdy vznikla první opční burza v Chicagu, se také objevily články Blacka, Scholese a Mertona, které odvodily vzorec pro hodnotu evropské call a put opce. Historie teoretického zkoumání oceňování opcí je ale mnohem starší. První pionýrskou prací byla dizertace kterou vypracoval v roce 1900 Louis Bachelier, pod vedením Henriho Poincaré.

**Definice 1.1.** *Opce* je právo koupit (v případě *call opce*) nebo prodat (*put opce*) podkladové aktivum za pevně stanovenou cenu, která se nazývá *realizační cena* (strike price, exercise price) v pevně stanovené době (*expirační doba*).

Jako podkladové aktivum pro opce mohou sloužit akcie, komodity, cizí měny, akciové indexy, futures, swapy . . . . Podkladovým aktivem může být i opce, pak jde o složenou opci (viz. kapitola o exotických derivátech).

### 1.1 Dělení opcí

Podle *typu* použití opce rozlišujeme

- call opce - nákupní opce . . . . . právo nakoupit
- put opce - prodejní opce . . . . . právo prodat

Podle *doby* ve které mohou být uplatněny rozlišujeme

- Evropské opce - mohou být uplatněny jen v době expirace
- Americké opce - mohou být uplatněny kdykoli po dobu životnosti opce, nejpozději v čase expirace

Existují i opce které nemají stanovenou expirační dobu, mohou být uplatněny kdykoliv. Takové opce se nazývají *perpetuální* (některé firmy je využívají jako bonus pro své zaměstnance).

Speciálním typem opcí z hlediska doby uplatnění jsou *bermudské* opce, které je možné uplatnit pouze v určité předem stanovené dny.

Podle *typu obchodování* rozlišujeme dva typy opcí:

- standardní opce - obchodované na burze
- opce "na míru" - opce obchodované přes přepážku (over-the-counter, OTC)

Ten, kdo právo (t.j. opci) kupuje, musí prodávajícímu zaplatit cenu za toto právo, která se nazývá *prémie*.

Prémie má 2 složky:

- vnitřní hodnotu
- časovou hodnotu



Pro call opci je vnitřní hodnota v čase  $t$  rovna

$$\text{Vnitřní hodnota} := \max(S_t - K, 0),$$

kde  $S_t$  je okamžitá cena akcie v čase  $t$ ,  $K$  je realizační cena opce.

Pro put opci je vnitřní hodnota

$$\text{Vnitřní hodnota} := \max(K - S_t, 0).$$

*Časová hodnota* je definována jako zbývající hodnota do opční prémie (okamžité ceny opce v čase  $t$ ), tedy

$$\text{Časová hodnota} = \text{prémie} - \text{vnitřní hodnota}$$

Podle vztahu *současné a realizační ceny rozlišujeme*:

- opce mimo peníze (out of the money):  
 $S_t < K$  pro call opci,  $S_t > K$  pro put opci
- opce na penězích (at the money):  
 $S_t = K$  pro put i call opci
- opce v penězích (in the money):  
 $S_t > K$  pro call opci,  $S_t < K$  pro put opci

**Příklad 1.** Jako příklad uveďme skutečné hodnoty amerických opcí na akcie Intelu, dne 29.5.2003. Cena akcie tento den byla  $S_0 = 20,83$ .

call	June	July	October	put	June	July	October
20	1,25	1,60	2,40	20	0,45	0,85	1,50
22,5	0,20	0,45	1,15	22,5	1,85	2,20	2,85

## 1.2 Základní typy použití opcí

V dalším textu budeme používat následující označení:

$S_0$	...	cena akcie v současnosti
$S_t$	...	cena akcie v čase $t$
$S_T$	...	cena akcie v čase expirace
$T$	...	čas expirace
$r$	...	úroková míra
$K$	...	realizační cena opce
$C$	...	cena evropské call opce
$P$	...	cena evropské put opce
$c$	...	cena americké call opce
$p$	...	cena americké put opce

Výplatní funkce evropské call opce je rovna  $\max(S_T - K, 0)$ . Její graf je znázorněn na následujícím obrázku.

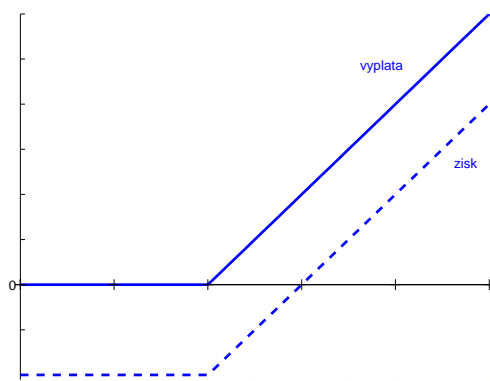


Figure 1.1: Call opce

### 1.2.1 Jištění

Hlavním smyslem použití opcí a dalších derivátů je změnit rizikový profil. Podle povahy účastníka trhu je možné riziko jak zmenšit, tak zvětšit.

**Příklad 2.** V září 2009 máme 10 akcií KB. Současná cena je  $S_0 = 280$  Kč za akcii. Chceme se pojistit proti poklesu ceny na příští 2 měsíce. Koupíme 10 listopadových put opcí s realizační cenou 275 Kč. Nechť  $P = 10$  Kč. Zaplatíme  $10 \cdot 10 = 100$  Kč (cena jistící strategie).

- Pokud cena klesne pod 275 Kč, uplatníme opci, dostaneme  $275 \cdot 10 = 2750$ , celkem máme zisk  $2750 - 100 = 2650$ .
- Pokud cena bude větší než 275 Kč, prodáme akcii na trhu, opět máme víc než  $2750 - 100 = 2650$ .

### 1.2.2 Pákový efekt

Vedle jištění, tedy snížení rizika, je možné použít opci k přesně opačnému účelu, k násobení potenciálního zisku (a samozřejmě také ztráty).

**Příklad 3.** Investor si myslí, že akcie Citibank v příštích 2 měsících porostou a má 2000\$ na investici. Nechť  $S_0 = 20$ \$ a nechť 2-měsíční call opce s realizační cenou 22,5\$ stojí 5\$. Porovnejte 2 strategie:

1. koupit 100 akcií
2. koupit 400 call opcí

Uvažujme dva možné scénáře. V prvním cena akcie v době expirace vzroste na 35\$. Ve druhém klesne na 15\$. Výplaty obou strategií jsou zapsány v tabulce:

	15\$	35\$
Akcie	-500\$	1500\$
Opce	-2000\$	3000\$

S rostoucí cenou nad realizační cenu opce roste zisk z akcie i opce úplně stejně. Rozdíl je v tom že opce je daleko levnější. Naopak, pokud cena akcie

klesne pod realizační cenu, ztrácí investor v opčním portfoliu ihned celou investici.

### 1.3 Put-Call parita

Put-Call parita je základní vztah mezi hodnotami call a put opce, který platí vždy, bez ohledu na předpoklady našeho modelu. V opačném případě existuje snadno realizovatelná arbitráž.

Pro odvození put-call parity uvažujme portfolio obsahující jednu call opci nadlouho a jednu put opci se stejnými parametry nakrátko. Pro hodnotu takového portfolio máme

$$C - P = \max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) = S_T - K,$$

neboli

$$C + K = S_T + P.$$

Odtud vidíme, že  $C - P - S_T$  je bezrizikové portfolio, pro něž platí

$$C - P - S_T = K.$$

Z neexistence arbitráže plyne, že jeho hodnota v čase 0 musí být  $K \cdot e^{-rT}$ .

Celkem tedy dostaneme

$$\boxed{C + K \cdot e^{-rT} = P + S_0}$$

Tento vztah platí nezávisle na předpokladech Black-Scholesova modelu.

Put-call paritu můžeme ověřit také porovnáním hodnot dvou portfolií odpovídajících levé a pravé straně předchozí rovnice:

	$C + K \cdot e^{-rT}$	$P + S_0$
$S_T < K$	$0 + K = K$	$K - S_T + S_T = K$
$S_T \geq K$	$S_T - K + K = S_T$	$0 + S_T = S_T$

Tedy

$$V_T(C + K \cdot e^{-rT}) = V_T(P + S_0) = \max(K, S_T),$$

kde  $V_T$  je hodnota portfolio v čase  $T$ . Z neexistence arbitráže plyne, že hodnota těchto dvou portfolií musí být stejná i v čase  $t = 0$ , odkud plyne put-call parita.

## 1.4 Příklady

**Příklad 4.** Koupili jsme evropskou call opci na akcii za 50 Kč. Současná cena akcie je 900 Kč a realizační cena je 870 Kč.

- Za jakých okolností bude opce uplatněna?
- Za jakých podmínek budeme mít zisk?
- Znázorněte graficky závislost našeho zisku na ceně akcie v době expirace.

**Příklad 5.** Upsali jsme evropskou put opci na akcii za 30 Kč. Současná cena akcie je 480 Kč a realizační cena je 500 Kč.

- Za jakých okolností bude opce uplatněna?
- Za jakých podmínek budeme mít zisk?
- Znázorněte graficky závislost našeho zisku na ceně akcie v době expirace.

**Příklad 6.** Zakoupili jsme evropskou put opci na akcii s realizační cenou 35 Kč za 2 Kč a call opci na stejné aktivum s realizační cenou 40 Kč za 3 Kč. Znázorněte graficky závislost našeho zisku z této pozice na ceně akcie v době expirace.

**Příklad 7.** Vysvětlete, proč je hodnota americké opce vždy nejméně rovna hodnotě příslušné evropské opce se stejnými parametry.

**Příklad 8.** Cena call opce s realizační cenou 15 Kč na akcii jejíž současná cena je 14 Kč stojí 2 Kč, čas expirace  $T = 6$  měsíců. Úroková míra je 5% ročně. Najděte cenu evropské put opce se stejnými parametry.

**Příklad 9.** Vysvětlete, proč je hodnota americké call opce na akcii která nevyplácí dividendu vždy rovna alespoň její vnitřní hodnotě. Platí totéž i pro evropskou call opci?

**Příklad 10.** Uvedte příklad situace, kdy hodnota americké call opce na akcii která vyplácí dividendu je menší než její vnitřní hodnota.

**Příklad 11.** Vysvětlete, proč není nikdy optimální uplatnit předčasně americkou call opci na akcii která nevyplácí dividendy.

# Chapter 2

## Opční strategie

### 2.1 Strategie s jednou opcí a jednou akcií

Nejdříve budeme uvažovat dvě nejjednodušší strategie, které lze vytvořit s pomocí opce a akcie.

#### 2.1.1 Upsání kryté call opce

Upsání kryté call opce znamená že upíšeme call opci na akcii kterou vlastníme. Jde tedy o dlouhou pozici v akcii + krátkou pozici v call opci.

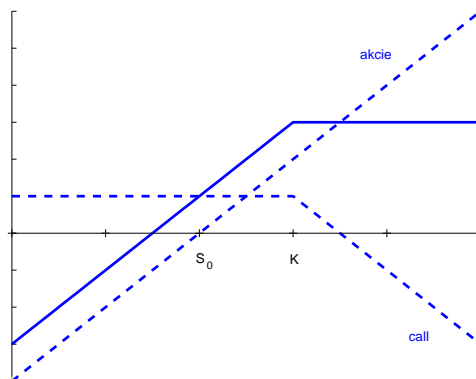


Figure 2.1: Krytá call opce

## 2.1.2 Pojistný put

V této strategii vlastníme akcii a chceme si její hodnotu pojistit zakoupením put opce. Jde tedy o dlouhou pozici v akci + dlouhou pozici v put opci.

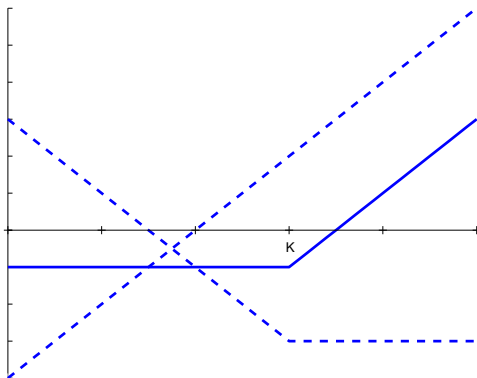


Figure 2.2: Pojištěná put opce

Z put-call parity plyne, že pojistný put má stejný profil jako call opce jen posunutý o konstantu, protože platí

$$S_T + P = C + K.$$

## 2.2 Strategie s více opcemi stejného typu

Strategie tohoto typu se obvykle označují výrazem *spread*. Podle typu investora rozlišujeme dva základní druhy těchto strategií.

### 2.2.1 Bull spread

V této strategii koupíme call opci s realizační cenou  $K_1$  a upíšeme call opci s realizační cenou  $K_2 > K_1$ . Takovou strategii použije investor který věří v růst ceny akcie, odtud název bull spread. Výplatní profil je znázorněn na obrázku.

Alternativně, bull spread můžeme také vytvořit s použitím put opcí.

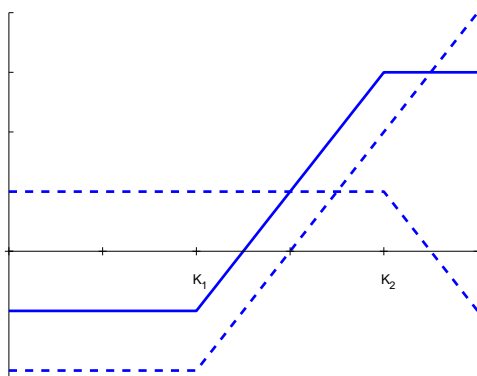


Figure 2.3: Bull spread

### 2.2.2 Bear spread

Tuto strategii vytvoříme přesně naopak. Koupíme call s realizační cenou  $K_2$  a prodáme call opci s realizační cenou  $K_1 < K_2$ . Výplatní profil je znázorněn na obrázku.

Strategii použije naopak investor, který věří v pokles ceny akcie. Stejně jako bull spread, můžeme bear spread vytvořit s použitím put opcí namísto call.

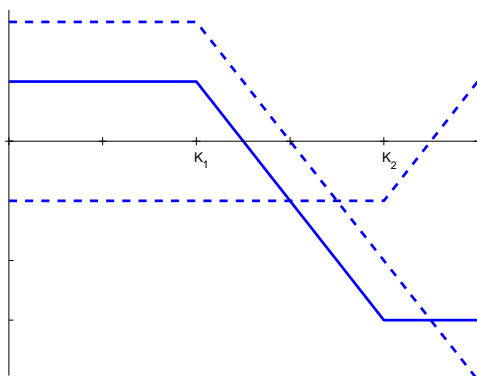


Figure 2.4: Bear spread



### 2.2.3 Butterfly spread

Pro sestavení této strategie uvažujme tři opce s různými realizačními cenami: Koupíme 1 call opci s real. cenou  $K_3$  (vysokou) a 1 call opci s real. cenou  $K_1$  (nízkou) a upíšeme 2 call opce s real. cenou  $K_2$ , mezi  $K_1$  a  $K_3$  a blízko  $S_0$ . Tato strategie obvykle představuje malou investici. Investor očekává jen minimální pohyb v ceně akcie.

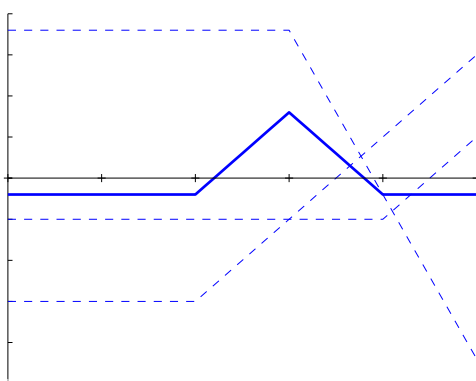


Figure 2.5: Butterfly spread

## 2.3 Kombinace put a call opcí

### 2.3.1 Bottom straddle

V této strategii koupíme call a put se stejnou realizační cenou  $K$ . Výplata je znázorněna na následujícím obrázku.

Při použití této strategie investor předpokládá velký pohyb ceny akcie, ale neví jakým směrem. Taková situace může nastat například očekává-li se výsledek soudního sporu firmy která vydala akcie.

Pokud takový názor sdílí většina účastníků trhu, bude cena takové strategie na trhu vysoká. Obecně platí, že investor může využít svůj odhad vývoje trhu jen za předpokladu že se realizuje a navíc je odlišný od názoru většiny ostatních investorů.

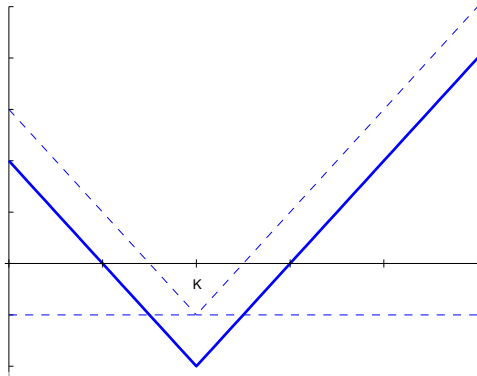


Figure 2.6: Bottom straddle

### 2.3.2 Top straddle

Ve strategii top straddle naopak prodáme call a put se stejnou realizační cenou  $K$ .

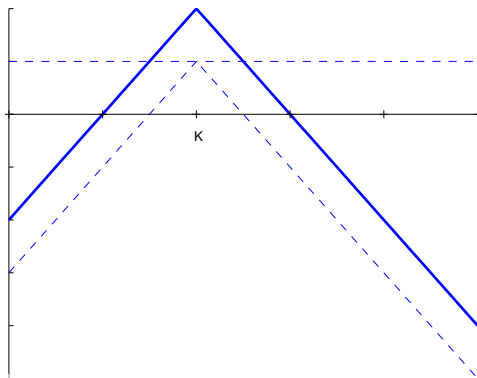


Figure 2.7: Top straddle

V této strategii naopak investor neočekává velký pohyb ceny akcie. Ve srovnání s motýlkem je tato strategie daleko rizikovější, případná ztráta v případě růstu ceny není vůbec omezená zdola.

### 2.3.3 Strip

V této strategii koupíme 1 call a 2 put opce. Výplatní funkce bude následující.

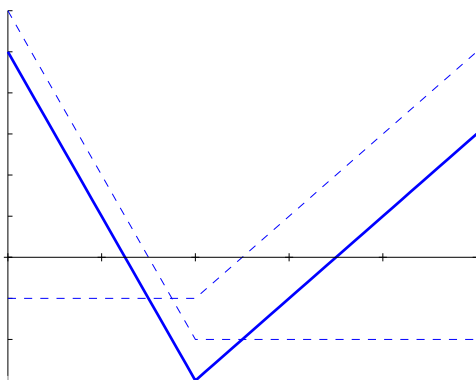


Figure 2.8: Strip

Použití této strategie je podobné jako u bottom straddle, investor předpokládá velký pohyb ceny akcie. V tomto případě si ale myslí že pohyb dolů je pravděpodobnější než pohyb nahoru. Podobně jako u bottom straddle, zisk ze strategie není omezen zhora.

### 2.3.4 Strap

V této strategii koupíme 2 call a 1 put na akcii, se stejnými parametry. Dostaneme tak výplatu znázorněnou na obrázku.

Analogicky, tato strategie je opět podobná bottom straddle. Investor předpokládá velký pohyb ceny akcie, ale myslí že pohyb nahoru je pravděpodobnější než pohyb dolů.

## 2.4 Calendar a diagonal spread

Tato strategie používá namísto opcí s různou realizační cenou opce s různým časem expirace. Koupíme opci s realizační dobou  $T_1$  a upíšeme opci s realizační dobou  $T_2 > T_1$ . V čase  $T_1$  pak pozici uzavřeme, tedy opci s real-

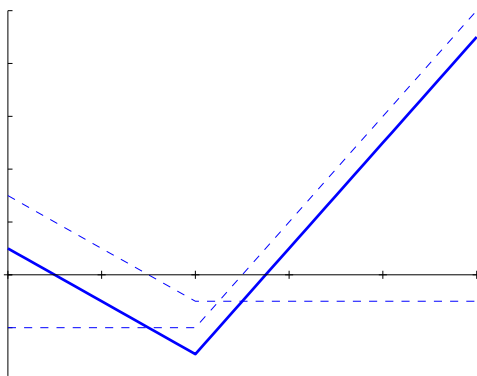


Figure 2.9: Strap

izační dobou  $T_2$  prodáme. Výplatní funkce této strategie je podobná strategii motýlek, je ale nelineární.

Další strategií s nelineární výplatou je diagonal spread. V této strategii zakoupíme dvě call opce s různou dobou realizace, i s různou dobou splatnosti.

Obecně můžeme vytvořit v principu libovolný po částech lineární profil výplaty, pokud existují opce s libovolnou realizační cenou.

## 2.5 Pojištěná investice do rizikového aktiva

S využitím call opcí můžeme za určité situace vytvořit portfolio, které bude profitovat z růstu akcie, stejně jako kdybychom koupili samotnou akcii, přitom ale jeho hodnota v čase expirace bude vždy nejméně rovna vkladu který jsme do investice vložili.

Uvažujme akcii se současnou cenou  $S_0 = 100$  Kč, do které chceme investovat na dobu  $T = 1$  rok. Předpokládejme pro jednoduchost že bezriziková úroková míra  $r$  kterou vyplácí např. dluhopisy je taková, že platí

$$S_0 e^{-rT} = 90.$$

Klíčovým předpokladem, který umožňuje strategii vytvořit je, že akcie vyplácí kladný dividendový výnos  $D$ . Portfolio sestavíme tak, že za 90 Kč koupíme

dluhopisy. Dále zakoupíme call opci na penězích, tedy s  $K = 100$ .

Cena takové call opce bude záviset na volatilitě akcie. Pro dostatečně malou volatilitu bude cena opce menší než 10 Kč, celková investice se tedy vejde do 100 Kč.

Pokud opce vyprší v penězích, bude zisk z ní stejný, jako kdybychom investovali do akcie. Rozdíl je samozřejmě v tom, že na rozdíl od majitele akcie nebudeme v průběhu investice dostávat dividendy.

Pokud opce vyprší mimo peníze, budeme mít díky dluhopisům přesně naši počáteční investici, tedy 100 Kč.

Jak je vidět, taková strategie bude možná jen v případě zavedené, málo volatilní akcie, která navíc vyplácí dividendy.

Pokud akcie nevyplácí dividendy, pak víme ze základního dolního odhadu pro cenu opce že

$$C \geq S_0 - Ke^{-rT},$$

tedy takovou strategii není možné sestavit.

## 2.6 Příklady

**Příklad 12.** Na trhu jsou dostupné evropské call opce na akcii s realizačními cenami 15 Kč, 17 Kč a 19 Kč se stejnou expirační dobou za 3 měsíce. Jejich ceny jsou 3 Kč, 2 Kč a 1,5 Kč. Popište jak lze opce použít k vytvoření butterfly spread. Znázorněte graficky závislost našeho zisku na ceně akcie v čase expirace.

**Příklad 13.** Put opce na akcii s realizační cenou 20 Kč a 23 Kč stojí 3 Kč, resp. 5 Kč. Ukažte jak s pomocí těchto opcí sestavit bull spread a bear spread. Nakreslete závislost zisku a výplaty pro obě opční strategie.

**Příklad 14.** Na trhu se prodávají evropská call opce na akcii s realizační cenou 30 Kč za 2 Kč a evropská put opce na stejnou akcii s realizační cenou 27 Kč za 3 Kč. Popište jak lze opce použít k vytvoření strangle. Znázorněte graficky závislost našeho zisku na ceně akcie v čase expirace.

**Příklad 15.** Najděte opční strategii jejíž výplatní funkce je dána lineární lomenou funkcí spojující body  $(0, 0)$ ,  $(5, 0)$ ,  $(7, 2)$ ,  $(8, 2)$  a  $(9, 0)$ .

**Příklad 16.** Popište výplatní funkci strategie diagonal spread, která se skládá z dvou call opcí s různou realizační cenou i různým časem expirace.

**Příklad 17.** Najděte opční strategii jejíž výplatní funkce je dána lineární lomenou funkcí spojující body  $(0, 10)$ ,  $(15, 10)$ ,  $(20, 5)$ ,  $(25, 5)$ ,  $(30, 15)$  a  $(45, 0)$ .

**Příklad 18.** Znázorněte graficky výplatu ze strategie calendar spread s použitím dvou call opcí. První má čas expirace  $T_1 = 3$  měsíce, druhá  $T_2 = 6$  měsíců. Obě opce jsou na penězích. Výplatu znázorněte v čase expirace první opce.

**Příklad 19.** Platí put call parita i pro americké opce?

**Příklad 20.** Dokažte put-call nerovnosti pro americké opce (Hull ...)

# Chapter 3

## Horní a dolní odhad cen opcí

V této kapitole odvodíme základní horní a dolní odhad pro ceny opcí, které stejně jako v minulé kapitole nezávisí na předpokladech modelu. Jsou odvozeny jenom z následujících předpokladů:

1. na trhu neexistuje arbitráž
2. neexistují transakční náklady
3. všechny zisky jsou zdaněny stejnou sazbou
4. existuje stejná bezriziková úroková míra pro vklady i půjčky

### 3.1 Horní odhady

#### Pro call opci

Call opce znamená právo koupit akcii za určitou cenu, nemůže tedy mít hodnotu větší než akcie. Máme tedy

$$C \leq S_0.$$

Podobně pro americkou opci platí

$$c \leq S_0.$$

V opačném případě existuje arbitráž: koupíme akcii a upíšeme opci.

Horní odhad který jsme právě uvedli je optimální, v tom smyslu že pro hodnoty  $K$  blížící se 0 se bude cena opce  $C$  skutečně blížit k  $S_0$ .

### Pro put opci

Put opce znamená právo prodat akcii za cenu  $K$ . Opce tedy nemůže mít vyšší cenu než  $K$  (i kdyby cena akcie klesla téměř na nulu). Pro evropskou put opci tedy platí v čase realizace

$$P \leq K.$$

Odtud plyne, že v čase  $t = 0$  musí platit

$$P \leq K \cdot e^{-rT}.$$

V opačném případě existuje arbitráž: upíšeme put opci, a uložíme zisk na bezrizikový vklad. V čase  $T$  máme  $P \cdot e^{rT} > K$ , existuje tedy arbitráž.

Stejně jako pro call opci je tento odhad optimální. Pro  $S_0 \rightarrow 0$  se bude cena opce  $P$  blížit ke  $K$ .

## 3.2 Dolní odhady

Pro call opci má základní dolní odhad tvar

$$C \geq S_0 - K \cdot e^{-rT}.$$

Před tím než jej dokážeme, ilustrujme si jej nejdříve na příkladu.

**Příklad 21.** Nechť  $S_0 = 20\$$ ,  $K = 18\$$ ,  $r = 10\%$  ročně,  $T = 1$  rok. Máme tedy

$$S_0 - K \cdot e^{-rT} = 20 - 18 \cdot e^{-0,1} = 3,71\$$$

Nechť  $C = 3\$$ . Tvrdíme, že existuje arbitráž: koupíme call opci a prodáme akcii nakrátko. Máme ihned  $20 - 3 = 17\$$ . Tuto hotovost uložíme, v čase  $T = 1$  pak máme  $17 \cdot e^{0,1} = 18,79$ .

Snadno ověříme že za všech scénářů budeme v zisku, neboť

– Je-li  $S_T > 18$ , uplatníme opci, uzavíráme krátkou pozici a máme zisk



$18,79 - 18 = 0,79$ .

– Je-li  $S_T < 18$ , koupíme akcii na trhu, uzavřeme krátkou pozici, máme zisk  $> 0,79$ .

Obecně uvažujme 2 portfolia:

A: 1 call + hotovost  $K \cdot e^{-rT}$

B: 1 akcie

V čase  $T$  je hodnota A rovna:

– Je-li  $S_T < K \dots K + 0 = K$ .

– Je-li  $S_T > K \dots K + (S_T - K) = S_T$ .

Tedy

$$V_T(A) = \max(K, S_T).$$

Pro portfolio B je

$$V_T(B) = S_T.$$

Platí tedy  $V_T(A) \geq V_T(B)$  za všech scénářů. Stejný vztah musí platit i v čase 0 (jinak by existovala arbitráž). Tedy

$$C + K \cdot e^{-rT} \geq S_0$$

a odtud

$$\boxed{C \geq S_0 - K \cdot e^{-rT}}$$

**Důsledek 3.1.** *Pro vnitřní hodnotu opce platí*

$$C \geq S_0 - K \cdot e^{-rT} > S_0 - K$$

Cena evropské call opce je tedy vždy větší než její vnitřní hodnota.

Totéž platí pro americkou call opci:

$$c \geq C > S_0 - K.$$

**Pro put opci** je základní dolní odhad tvaru

$$P \geq K \cdot e^{-rT} - S_0.$$

K důkazu tohoto vztahu uvažujme opět 2 portfolia:

C: 1 put + 1 akcii

D: hotovost  $K \cdot e^{-rT}$

Výplaty obou portfolií v závislosti na scénáři zapíšeme do tabulky:

	C	D
$S_T < K$	$(K - S_T) + S_T = K$	$K$
$S_T > K$	$S_T$	$K$

Platí tedy

$$V_T(C) = \max(S_T, K) \geq V_T(D) = K.$$

Odtud plyne

$$V_0(C) \geq V_0(D)$$

a nakonec

$$P + S_0 \geq K \cdot e^{-rT}.$$

Celkem tedy

$$\boxed{P \geq K \cdot e^{-rT} - S_0}$$

### 3.3 Uplatnění americké call opce

**Příklad 22.** Uvažujeme americkou call opci s  $S_0 = 50$  Kč,  $K = 40$  Kč,  $T = 1$  měsíc. Opce je hluboko v penězích. Zdálo by se vhodné opci hned uplatnit, ale není tomu tak.

- Pokud chceme akcii koupenou za opci držet víc než 1 měsíc, pak je lepší měsíc počkat a uložit 40 Kč do banky, kde přináší úrok. (Navíc pokud cena klesne pod 40 Kč, budeme rádi, že jsme opci neuplatnili.)
- Pokud akcii chceme hned prodat (např. myslíme, že je nadhodnocená), pak je lepší opci prodat než uplatnit. Opce si koupí někdo kdo akcii chce držet (takový investor existuje, jinak by cena nebyla 50 Kč). Cena opce bude větší než její vnitřní hodnota, t.j.  $50 - 40 = 10$  Kč.

Odtud plyne, že **americká call opce má stejnou hodnotu jako evropská call opce.**

Důvody pro neuplatňování americké call opce před časem expirace:

- Call opce je pojištění, pokud ji prodáme, přijdeme o něj.
- Časová hodnota peněz.

U americké put opce jsou tyto 2 důvody proti sobě.

**Příklad 23.** Uvažujme put opci s  $K = 10\$$  a nechť  $S_0$  je velmi blízko 0. Čím dříve opci uplatníme, tím lépe (peníze za prodej uložíme do banky).

Platí tedy:

- Americká put opce má větší hodnotu než evropská put opce, tedy  $p > P$ .
- Existují situace kdy hodnota evropské put opce je menší než její vnitřní hodnota (tedy časová hodnota je záporná).

## 3.4 Příklady

**Příklad 24.** Uvažujme call opci na akcii bez dividendy . Současná cena akcie je 35 Kč, realizační cena je 32 Kč, úroková míra je 10% ročně. Najděte dolní odhad ceny takové opce.

**Příklad 25.** Uvažujme put opci na akcii bez dividendy . Současná cena akcie je 100 Kč, realizační cena je 105 Kč, úroková míra je 5% ročně. Najděte dolní odhad ceny takové opce.

**Příklad 26.** Popište dva důvody proč není optimální uplatnit americkou call opce před dobou její expirace.

**Příklad 27.** Může mít evropská call opce na akcii s dividendou cenu nižší než

$$S_0 - Ke^{-rT}?$$

Pokud ano, uveďte příklad takové situace.

**Příklad 28.** Může mít evropská put opce na akcii s dividendou cenu nižší než

$$S_0Ke^{-rT} - S_0?$$

Pokud ano, uveďte příklad takové situace.

**Příklad 29.** Označme  $D$  současnou hodnotu všech dividend, které bude vyplácet podkladová akcie během životnosti opce. Dokažte, že pro cenu call opce platí odhad

$$C \geq S_0 - D - Ke^{-rT}$$

**Příklad 30.** Dokažte, že pro cenu put opce na akcii která vyplácí dividendu platí odhad (se stejným označením jako v předchozím příkladu)

$$P \geq D - S_0 + Ke^{-rT}$$

# Chapter 4

## Analýza citlivosti Black-Scholesova vzorce

V této kapitole budeme analyzovat podrobně Black-Scholesův vzorec. Pro praktické použití je důležité umět odhadnout rychlost změny cen opcí při změně hodnot jednotlivých parametrů modelu.

### 4.1 Proměnné ovlivňující hodnotu opce

Podle **Black-Scholesova modelu** závisí hodnota opce na celkem pěti proměnných:

$K$	...	realizační cena
$S_0$	...	současná cena
$\sigma$	...	volatilita
$T$	...	čas
$r$	...	bezriziková úroková míra

Uvažujme nejdříve směr závislosti na jednotlivých proměnných. + bude označovat “přímou úměrnost” (rostoucí závislost), – “nepřímou úměrnost” (klesající závislost). Výsledky jsou obsaženy v následující tabulce:

	Call	Put
$S_0$	+	–
$K$	–	+
$T$	+	+
$r$	+	–
$\sigma$	+	+

- + ... rostoucí závislost
- ... klesající závislost

Některé směry závislosti jsou zřejmé, některé si zaslouží podrobnější komentář:

$r$ : Put opce je potenciaální příjem v budoucnosti. Pokud tedy roste  $r$ , jeho současná hodnota klesá a tím i hodnota opce.

Call opce je potenciaální výdej v budoucnosti, závislost je tedy opačná, ze stejného důvodu.

$\sigma$ : S rostoucí volatilitou šance velkého růstu i velkého poklesu rostou. Pro majitele akcie se tyto vlivy kompenzují, ale majitel call (resp. put) opce profituje z růstu (resp. poklesu), zatímco při poklesu (resp. růstu) je jeho ztráta omezena opční prémie.

Odtud plyne, že pokud  $\sigma$  - roste, pak  $C$  také roste (a stejně tak i  $P$  roste).

$T$ : Delší čas znamená větší nejistotu (podobně jako u volatility), tedy stejný argument jako pro  $\sigma$  ukazuje, že  $C$  a  $P$  rostou s rostoucím časem do expirace  $T$ .

V souvislosti s předchozími argumenty připomeňme, že v Black-Scholesově vzorci vystupuje jen součin  $\sigma\sqrt{T}$ , tedy vliv  $\sigma$  a  $\sqrt{T}$  je stejný.

## 4.2 Black-Scholesův vzorec

Připomeňme, že Black-Scholesův vzorec pro evropskou call má tvar

$$C = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T}),$$

kde  $\Phi$  je distribuční funkce  $N(0, 1)$  a

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Pro put opci máme

$$P = K e^{-rT} \Phi(-d_1 + \sigma\sqrt{T}) - S_0 \Phi(-d_1).$$

## 4.3 Greeks

Závislost rychlosti změny ceny opce na změně jednotlivých parametrů popisují parciální derivace Black-Scholesova vzorce podle jednotlivých proměnných. Používá se pro ně standardní označení pomocí řeckých písmen (greeks).

### 4.3.1 Jištění opční pozice

Jako motivaci uveďme příklad na jištění opční pozice.

**Příklad 31.** Banka prodala call opce na 100 000 akcií za 300 000 Kč. Přitom  $S_0 = 49$ ,  $K = 50$ ,  $r = 0,05$ ,  $\sigma = 0,2$ ,  $T = 20$  týdnů (0,38 roku). Cena opcí je 240 000. Banka tedy prodala o 60 000 dráž než je teoretická hodnota. Jak se může pojistit proti rizikům a zaručit si zisk?

*Řešení.* Uvažujme dvě strategie:

1. strategie: nedělat nic (nekrytá pozice, naked position)

$S_T < 50 \Rightarrow$  neplatí nic, má zisk 300 000

$S_T > 50 \Rightarrow$  musí zaplatit  $10^5 \cdot (S_T - 50)$

2. strategie: krytá pozice. Banka v čase  $t = 0$  koupí 100 000 akcií.

Je-li  $S_T > 50$ , např.  $S_T = 51$ , pak prodá za 50, ale koupila za 49. Má tedy další zisk.

Je-li  $S_T < 50$ , např.  $S_T = 40$ , na portfoliu ztratí 900 000 (z opcí má zisk jen 300 000)

Podle Black-Scholesova vzorce by cena jištění v průměru měla být 240 000, ale strategie 1 a 2 mají velké výkyvy. Pokud se chceme držet blízko 240 000, musíme použít dynamické jištění. První dynamická strategie se může na první pohled zdát ideální.

3. strategie: dynamická stop-loss strategie:

- koupíme akcii pokud cena vzroste nad  $K$
- jakmile klesne cena pod  $K$ , opět prodáme

Pro  $S_t < K$  tedy máme nekrytou pozici, pro  $S_t > K$  máme krytou pozici.

Tato strategie zdánlivě produkuje stejnou výplatu jako opce. Cena strategie je pro  $S_0 > K$  rovna  $S_0$ , jinak je-li

$$S_0 < K,$$

pak je cena 0. Celkem tedy za strategii zaplatíme

$$\max(S_0 - K, 0).$$

Praktická realizace takové strategie ale naráží na zásadní problém: Je-li  $S_t = K$ , nevíme zda cena poroste nebo bude klesat (hypotéza efektivního trhu). Prakticky tedy musíme kupovat pro  $K + \epsilon$  a prodávat pro  $K - \epsilon$ . Pro  $\epsilon \rightarrow 0$  očekávaný počet obchodů půjde do  $\infty$ . Přitom každá dvojice obchodů znamená pro nás ztrátu  $2\epsilon$ . Připomeňme ještě teoretickou vlastnost Brownova pohybu, totiž že jeho trajektorie protne osu  $x$  nekonečně mnohokrát v libovolně malém okolí 0.

**Lemma 4.1.** *Je-li  $W_{t_0} = K$ , kde  $W_t$  je Brownův pohyb, pak s pravděpodobností 1 trajektorie  $W_t$  nabývá v intervalu  $(t_0, t_0 + \delta)$  hodnoty  $K$  nekonečně mnohokrát pro libovolně malé  $\delta$ .*

### 4.3.2 Delta a $\Delta$ -hedging

$\Delta$  měří rychlost změny opční ceny vzhledem ke změně ceny akcie, tedy

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S},$$

kde  $C$  je cena call opce a  $S$  je cena akcie.

**Příklad 32.** Nechť  $\Delta = 0,6$  pro  $S_0 = 100$  a  $C = 10$ . Upsání 20 call opcí můžeme tedy jistit koupením  $0,6 \cdot 20 = 12$  akcií. Zisk (ztráta) za opce je jistěna ztrátou (ziskem) z pozice akcií.

Například pokud akcie vzroste o 1 Kč, pak máme zisk 12 Kč na akciích a ztrátu  $-20 \cdot 0,6 = -12$  Kč na opcích (každá opce jde dolů o 0,6 Kč).



$\Delta$  opční pozice je  $0,6 \cdot (-20) = -12$ .

$\Delta$  pozice v akciích je  $12 \cdot 1 = 12$ .

Celková  $\Delta$  portfolia je  $-12 + 12 = 0$ .

$\Delta = 0 \dots$   **$\Delta$ -neutrální portfolio**

Hodnota takového portfolia se nemění při malém pohybu ceny akcie.

$\Delta$  se ale s časem mění, závisí na  $S$ . Musíme tedy provádět dynamický hedging.

Platí

$$\Delta(\text{call}) = \Phi(d_1),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Z put-call parity máme

$$P + S = C + K \cdot e^{-rT}$$

Derivováním podle  $S$  dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial S} : \quad \frac{\partial P}{\partial S} + 1 = \frac{\partial C}{\partial S} + 0,$$

tedy

$$\Delta(\text{put}) = \Delta(\text{call}) - 1 = \Phi(d_1) - 1$$

Analogicky definujeme **Delta portfolia**. Nechť  $\pi$  je hodnota portfolia  $A$ .

Pak

$$\Delta(A) = \frac{\partial \pi}{\partial S}.$$

Nechť portfolio obsahuje  $w_i$   $i$ -té opce, pak

$$\Delta(A) = \sum_i w_i \cdot \Delta_i,$$

kde  $\Delta_i$  je  $\Delta$   $i$ -té opce (z linearity derivace).

**Příklad 33.** Česká banka má 3 pozice v opcích na euro:

1. dlouhou pozici na  $10^5$  call opcí s  $K = 27$  Kč a  $T = 3$  měsíce.  $\Delta = 0,533$ ,
2. krátkou pozici na  $2 \cdot 10^5$  call opcí s  $K = 28$  Kč a  $T = 5$  měsíců.  $\Delta = 0,468$ ,
3. krátkou pozici na  $5 \cdot 10^4$  put opcí s  $K = 28$  Kč a  $T = 2$  měsíce.  $\Delta = -0,508$ .

Celkové delta portfolia tedy bude  $\Delta(1+2+3) = 10^5 \cdot (0,533) - 2 \cdot 10^5(0,468) - 5 \cdot 10^4(-0,508) = -14\,900$  Banka může tedy udělat portfolio  $\Delta$ -neutrální nakoupením 14 900 Euro.

$\Delta$  závisí na  $S$ , musíme tedy portfolio dynamicky "rebalancovat," aby bylo  $\Delta$ -neutrální (prodej akcií + nákup opcí, nebo naopak).

**Transakční náklady:** pro 1 opci je  $\Delta$ -hedging neúnosně drahý kvůli transakčním nákladům. Pro velké portfolio je ale schůdný, je třeba jen jedna transakce pro celé portfolio (v daném čase).

### 4.3.3 Theta

$\Theta$  měří citlivost portfolia (hodnoty opce) na změnu času, tedy

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial T}.$$

$$\Theta(\text{call}) = -\frac{S_0 \cdot \Phi'(d_1) \cdot \sigma}{2\sqrt{T}} - rK e^{-rT} \Phi(d_2),$$

kde  $\Phi'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$ .

$\Theta$  je jiný typ parametru než  $\Delta$ , protože čas je deterministická proměnná, proti plynutí času se nemá smysl jistit.  $\Theta$  se v praxi používá jako náhražka za  $\Gamma$ .

### 4.3.4 Gamma

$\Gamma$  měří rychlost změny  $\Delta$  vzhledem ke změně ceny  $S$ , tedy

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}.$$

Malé  $\Gamma$  znamená, že  $\Delta$  se mění pomalu, není třeba tak často rebalancovat pro udržení  $\Delta$ -neutrálního portfolia.

Velké  $\Gamma$  naopak říká, že  $\Delta$  je citlivé na změny  $S$ . Je tedy nutné častější rebalancování.

$\Gamma$  měří křivost grafu závislosti ceny opce na ceně podkladového aktiva. Pro  $\Delta$ -neutrální portfolio platí přibližně:

$$\Delta\pi = \Theta \cdot \Delta t + \underbrace{\Delta \cdot \Delta S}_{=0} + \frac{1}{2}\Gamma \cdot (\Delta S)^2 + o(\Delta t).$$

### $\Gamma$ -neutrální portfolio:

Pozice v akci má  $\Gamma = 0$ . Je třeba nástroj (např. opce), který má  $\Gamma \neq 0$ , tedy který závisí nelineárně na ceně akcie.

Je-li  $\Gamma_A$  gamma portfolia  $A$  a gamma opce je  $\Gamma_O$ , pak přidáním  $w_T$  počtu opcí do portfolia máme  $\Gamma = \Gamma_A + w_T\Gamma_O$ . Pro

$$w_T = \frac{-\Gamma_A}{\Gamma_O}$$

dostaneme  $\Gamma = 0$ , tedy  $\Gamma$  neutrální portfolio.

Přidáním opce se změní  $\Delta$  portfolia, nebude tedy  $\Delta$ -neutrální. Proto musíme ještě změnit pozici v akciích. Tím se nezmění  $\Gamma$ -neutralita, protože  $\Gamma(\text{akcie})=0$ .

Portfolio s  $\Delta = 0$  a  $\Gamma = 0$  je imunní i proti větším výkyvům ceny podkladové akcie.

**Příklad 34.** Uvažujeme  $\Delta$ -neutrální portfolio s  $\Gamma = -3000$ .  $\Delta$  a  $\Gamma$  opce jsou 0,62 a 1,5. Pak portfolio bude  $\Gamma$ -neutrální, jestliže přidáme dlouhou pozici v  $\frac{3000}{1,5} = 2000$  call opcích. Tím se změní  $\Delta$  portfolia z 0 na  $2000 \cdot 0,62 = 1240$ . Musíme ještě prodat 1240 akcií, abychom dostali portfolio, které je  $\Delta$ -neutrální (a současně  $\Gamma$ -neutrální).

Přímým výpočtem dostaneme hodnotu  $\Gamma$ ,

$$\Gamma(\text{call}) = \frac{\partial\Phi(d_1)}{\partial S_0} = \frac{\Phi'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}.$$

Pro dlouhou pozici je  $\Gamma > 0$ .

### 4.3.5 Taylorův rozvoj hodnoty portfolia v parametrech

Připomeňme, že Taylorův polynom 2. stupně pro funkci 2 proměnných má tvar

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y - y_0)^2$$

Označme

$$\begin{aligned} \partial f &= f(x, y) - f(x_0, y_0) & \dots & \text{přírůstek funkce} \\ \partial x &= x - x_0 & \dots & \text{přírůstek } x \\ \partial y &= y - y_0 & \dots & \text{přírůstek } y \end{aligned}$$

Pak máme

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial x} \partial x + \frac{\partial f}{\partial y} \partial y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\partial x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \partial x \partial y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\partial y)^2$$

Nechť  $\pi$  je hodnota portfolia, kde  $r$ ,  $\sigma$  bereme konstantní. Uvažujeme tedy  $\pi$  jen jako funkci  $S$  a  $t$ . Dosazením dostaneme

$$\partial \pi \doteq \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial S}}_{=\Delta} \partial S + \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial t}}_{=\Theta} \partial t + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}}_{=\Gamma} (\partial S)^2 + \frac{\partial^2 \pi}{\partial t \partial S} \partial t \partial S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} (\partial t)^2$$

Tedy (po zanedbání členů vyššího řádu)

$$\partial \pi \doteq \Delta \partial S + \Theta \partial t + \frac{1}{2} \Gamma (\partial S)^2$$

Speciálně, pro  $\Delta$ -neutrální portfolio máme

$$\partial \pi \doteq \Theta \partial t + \frac{1}{2} \Gamma (\partial S)^2,$$

Pokud je portfolio  $\Delta$  i  $\Gamma$  neutrální, pak dostaneme

$$\partial \pi \doteq \Theta \partial t.$$

### 4.3.6 Vega

$\mathcal{V}$  měří citlivost na změnu volatility (vega není řecké písmeno, v matematicky orientované literatuře se původně používalo písmeno  $\nu$ ). Máme

$$\mathcal{V}(\text{call}) = \frac{\partial C}{\partial \sigma}.$$

Platí

$$\mathcal{V}(\text{call}) = S_0 \cdot \sqrt{T} \cdot \Phi'(d_1).$$

Velké vega znamená velkou citlivost portfolia na změny volatility. Pozice v akcii má vega rovno 0.  $\Gamma$ -neutrální portfolio má obvykle nenulové  $\mathcal{V}$  a naopak.

K sestavení  $\Gamma$  i  $\mathcal{V}$  neutrálního portfolia jsou potřeba nejméně dva různé deriváty na podkladovou akcii.

**Příklad 35.** Uvažujme  $\Delta$ -neutrální portfolio  $A$  s

$$\Gamma(A) = -5000, \quad \mathcal{V}(A) = -8000.$$

Obchodovaná opce  $O$  má gamma 0,5, vega 2,0 a delta 0,6. Sestavte gamma neutrální portfolio.

*Řešení.* Portfolio bude  $\mathcal{V}$ -neutrální pokud koupíme  $8000/2 = 4000$  opcí. To zvýší  $\Delta$  na  $4000 \cdot 0,6 = 2400$ , tedy je třeba prodat 2400 akcií, aby bylo opět  $\Delta$ -neutrální.  $\Gamma$  se změní na  $-5000 + 4000 \cdot 0,5 = -3000$ .

Pro  $\Gamma$  a současně  $\mathcal{V}$  neutrální portfolio musíme mít k dispozici ještě další opci.

**Příklad 36.** Nechť navíc další obchodovaná opce  $O_2$  má gamma 0,8, vega 1,2 a delta 0,5. Sestavte gamma i vega neutrální portfolio.

*Řešení.* Máme-li  $w_1$  opcí  $O$  a  $w_2$  opcí  $O_2$  pak chceme:

$$\Gamma : -5000 + 0,5w_1 + 0,8w_2 = 0$$

$$\mathcal{V} : -8000 + 2,0w_1 + 1,2w_2 = 0$$

Odtud dostaneme:

$$w_1 = 400$$

$$w_2 = 6000$$

Tedy koupíme-li 400 opcí  $O$  a 6000 opcí  $O_2$ , pak portfolio bude  $\Gamma$  i  $\mathcal{V}$  neutrální. Jeho  $\Delta$  bude  $400 \cdot 0,6 + 6000 \cdot 0,5 = 3240$ . Tedy musíme ještě prodat 3240 akcií, aby bylo portfolio i  $\Delta$ -neutrální.

Taylorův rozvoj v proměnných  $S$ ,  $t$ ,  $\sigma$  bude mít tvar

$$\begin{aligned} \partial\pi &\doteq \frac{\partial\pi}{\partial S}\partial S + \frac{\partial\pi}{\partial t}\partial t + \frac{\partial\pi}{\partial\sigma}\partial\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\pi}{\partial S^2}(\partial S)^2 \\ &= \Delta\partial S + \Theta\partial t + \mathcal{V}\partial\sigma + \frac{1}{2}\Gamma(\partial S)^2 \end{aligned}$$

### 4.3.7 Rho

$\rho$  měří změnu hodnoty opce (portfolio) v závislosti na změně úrokové míry.

$$\rho(\text{call}) = \frac{\partial C}{\partial r}$$

Přímým výpočtem dostaneme

$$\rho(\text{call}) = K \cdot T \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(d_2).$$

### 4.3.8 Vztah mezi $\Delta$ , $\Theta$ a $\Gamma$

Připomeňme si tvar Black-Scholesovy rovnice pro cenu derivátu  $f$  (například  $f = C, P, \dots$ ):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \cdot f.$$

Pro hodnotu  $\pi$  portfolio derivátů (na jednu stejnou podkladovou akcií) tedy dostaneme

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial\pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2\pi}{\partial S^2} = r \cdot \pi.$$

Odtud

$$\Theta + r \cdot S \cdot \Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \Gamma = r \cdot \pi.$$

Pro  $\Delta$ -neutrální portfolio máme

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \Gamma = r \cdot \pi.$$

Je-li  $\Theta$  velké kladné, pak  $\Gamma$  je velké záporné a naopak. V  $\Delta$ -neutrálním portfolio lze tedy  $\Theta$  použít jako náhražku  $\Gamma$ .

## 4.4 Příklady

**Příklad 37.** Uvažujeme  $\Delta$ -neutrální portfolio s  $\Gamma = 700$ .  $\Delta$  a  $\Gamma$  opce jsou 0,35 a 2,1. Sestrojte  $\Gamma$ -neutrální portfolio).

**Příklad 38.** Investor vlastní  $\Delta$ -neutrální portfolio které má  $\Gamma(\pi) = 250$  a  $\mathcal{V}(\pi) = -600$ . Sestavte gamma i vega neutrální portfolio s využitím dvou opcí, z nichž první má gamma 0,3, vega 1,0 a delta 0,7 a druhá opce má gamma 0,5, vega 0,8 a delta 0,3.

**Příklad 39.** Dokažte, že platí vztah

$$S_0\Phi'(d_1) = Ke^{-rT}\Phi'(d_2)$$

**Příklad 40.** S využitím předchozího příkladu dokažte, že platí

$$\Delta_{call} = \Phi(d_1).$$

**Příklad 41.** Dokažte vztah pro  $\Theta$  call opce,

$$\Theta_{call} = -rKe^{-rT}\Phi(d_2) - \frac{S_0\Phi'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}}.$$

**Příklad 42.** Odvodte vztah pro  $\Gamma$  call opce,

Vypočtete limitu

**Příklad 43.** Odvodte vztah pro vega call opce,

**Příklad 44.** Vypočtete limitu  $\Gamma$  pro  $S \rightarrow \infty$  a  $S \rightarrow 0$ .

**Příklad 45.** Dokažte, že cena call opce je rostoucí funkcí volatility.

**Příklad 46.** Odvodte vztahy pro parametry citlivosti vyšších řádů - Speed, Vanna, Vomma.

**Příklad 47.** Pomocí vztahu pro Speed najděte hodnotu  $S$  pro kterou je Gamma maximální.



# Chapter 5

## Implikovaná volatilita

Mezi všemi parametry Black-Scholesova modelu, tedy  $S_0$ ,  $K$ ,  $T$ ,  $r$ ,  $\sigma$ , je  $\sigma$  je jediný parametr, který nelze pozorovat. Existují dva základní způsoby počítání s volatilitou:

- odhad z historických dat
- používání implikované volatility

Volatilita  $\sigma$  měří naši nejistotu ohledně zisku z akcie. V Black-Scholesově modelu předpokládáme

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

tedy

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Z Itôova lemmatu dostaneme

$$S_t = S_0 \exp \left[ \sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2} T + \mu T \right],$$

odtud zlogaritmováním

$$\ln S_T - \ln S_0 = \sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2} T + \mu T.$$

$\ln S_T - \ln S_0$  má tedy rozdělení

$$N \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right),$$

odpovídající Brownově pohybu s driftem. Odtud plyne že  $\ln S_T$  má střední hodnotu

$$\ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$$

a rozptyl  $\sigma^2 T$ . Náhodná veličina  $S_T$  má log-normální rozdělení, jinak řečeno,  $\ln S_T$  má normální rozdělení. Máme

$$S_T = S_0 e^{xT},$$

kde

$$x = \frac{1}{T} \cdot \ln \frac{S_T}{S_0}$$

a  $x$  má rozdělení

$$N \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T} \right),$$

Střední směrodatná odchylka  $x$  je tedy  $\frac{\sigma}{\sqrt{T}}$ .

**Definice 5.1.** Veličina  $x$  se nazývá *míra zisku akcie*,

$$x \sim N \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T} \right).$$

## 5.1 Měření volatility

Volatilita je míra nejistoty o výnosech akcie. Typické hodnoty  $\sigma$  jsou 0,15-0,60.

Z předchozího víme, že  $x \sim N \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T} \right)$ , tedy  $\sigma$  je střední směrodatná odchylka míry zisku akcie za 1 rok.

Pro malé  $T = \Delta t$  máme

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t).$$

Odtud plyne, že  $\sigma \sqrt{T}$  je tedy střední směrodatná odchylka relativní změny ceny akcie za čas  $T$ .

**Příklad 48.** Předpokládejme, že  $\sigma = 0,3$  (30% ročně) a  $S_0 = 50$  Kč.

Střední směrodatná odchylka procentuální změny ceny akcie za 1 týden je pak

$$30 \cdot \sqrt{\frac{1}{52}} \doteq 4,16\%.$$

Tedy pohyb o 1 odchylku je  $50 \cdot 0,0416 \doteq 2,08$  Kč.

## 5.2 Odhad volatility z historických dat

Označme

- $n + 1$  ... počet pozorování
- $S_i$  ... cena akcie na konci  $i$ -tého intervalu,  $i = 0, 1, \dots, n$
- $\tau$  ... délka časového intervalu v letech

Dále nechť

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

a nechť  $s$  je střední směrodatná odchylka  $u_i$ ,

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2},$$

kde  $\bar{u}$  je střední hodnota  $u_i$ .

Víme, že střední směrodatná odchylka  $u_i$  je  $\sigma \cdot \sqrt{\tau}$  a je tedy odhadem  $\sigma\sqrt{\tau}$ . Odhad  $\sigma$  je pak

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

### Obchodní $\times$ kalendářní dny:

V praxi se ignorují dny, ve kterých se neobchoduje, tedy

$$\text{volatilita za rok} = \text{volatilita za 1 obch. den} \cdot \sqrt{\text{počet obch. dnů za rok.}}$$

Životnost opce se s touto konvencí počítá jako

$$T = \frac{\text{počet obch. dnů do expirace}}{\text{počet obch. dnů za rok (=252)}}.$$

## 5.3 Implikovaná volatilita a volatility smile

Připomeňme, že podle předpokladů Black-Scholesova modelu ceny akcie sledují geometrický Brownův pohyb, tedy pravděpodobnostní rozdělení cen akcie  $S_t$  je lognormální.

Empirické výsledky naopak ukazují významnou odchylku od tohoto předpokladu. Následující tabulka obsahuje procenta dnů kdy pohyby kursů jsou větší než 1, 2, 3, 4, 5, 6 středních směrodatných odchylek.

	realita (% dnů)	lognormální B.-S. model (% dnů)
> 1 SSO	25,00	32,00
> 2 SSO	5,00	5,00
> 3 SSO	1,30	0,27
> 4 SSO	0,30	0,01
> 5 SSO	0,08	0,00
> 6 SSO	0,03	0,00

Jak toho využít? V začátcích používání Black-Scholesova vzorce šlo na této velké odchylce profitovat. Stačilo nakoupit opce hluboko mimo peníze, podle Black-Scholesova modelu jsou velmi levné, a čekat. Protože velké výkyvy mají daleko větší pravděpodobnost než v lognormálním modelu, některé opce se dostaly do peněz.

Při použití Black-Scholesova modelu v praxi se dovolí, aby volatilita závisela na realizační ceně opce a čase do expirace.

Ze skutečných tržních cen opcí dopočítáme volatilitu v Black-Scholesově vzorci, která vede k této ceně. To je *implikovaná volatilita*.

Pokud by Black-Scholesův model beze zbytku platil, pak by tato volatilita byla stejná pro všechny realizační ceny  $K$ . Ve skutečnosti ale  $\sigma$  závisí na  $K$  (volatility smile, skew).

Tvar této závislosti závisí na povaze podkladového aktiva. Budeme uvažovat dva základní případy.

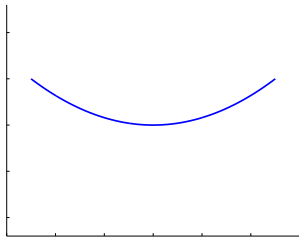


Figure 5.1: Volatility smile

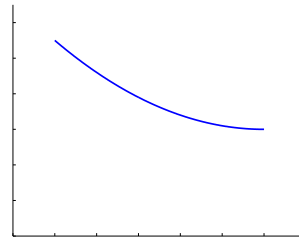


Figure 5.2: Volatility skew

### 5.3.1 Opce na směnné kurzy

Připomeňme, že hodnota opce v čase  $t = 0$  je rovna diskontovanému očekávání hodnoty opce v čase expirace  $t = T$ , vzhledem k risk-neutrální pravděpodobnostní míře.

*Levý i pravý chvost* skutečného rozdělení je "těžší" (větší) než u lognormálního rozdělení.

Uvažujme call opci s realizační cenou  $K_2$ . Opce bude v penězích pro  $S_T > K_2$ . Pravděpodobnost toho, že  $S_T > K_2$  je větší pro skutečné rozdělení než pro lognormální. Z toho plynou následující důsledky:

Větší pravděpodobnost  $\Rightarrow$  větší očekávání  $\Rightarrow$  větší cena opce  $\Rightarrow$  větší volatilita  $\Rightarrow$  zvednutí grafu implikované volatility  $\Rightarrow$  "půlka" volatility smile.

Tak dostaneme levou půlku volatility smile. Analogicky pro  $K_1$  uvažujme put opci s realizační cenou  $K_1$ . Z put-call parity plyne, že implikovaná volatilita je stejná pro put i call opci se stejnými parametry.

Stejným argumentem dostaneme druhou půlku volatility smile.

### 5.3.2 Opce na akcie

*Levý chvost* je u skutečného rozdělení *větší* než u lognormálního rozdělení, *pravý chvost* je *menší*.

Dostaneme tedy jen levou půlku volatility smile, celkově dostaneme graf směřující šikmo dolů, který se nazývá *skew*.

Ukazuje se, že velké rozšíření stejných jistící strategií sice snižuje riziko každému jednotlivému investorovi, ale vede naopak k větší volatilitě celého trhu. Mechanismus který  $\Delta$ -hedging působí funguje takto:

pohyb ceny nahoru  $\Rightarrow$  nákup  $\Rightarrow$  další růst ceny

pohyb ceny dolů  $\Rightarrow$  prodej  $\Rightarrow$  další pokles

Jištění tedy zesiluje pohyb cen a tím zvyšuje celkovou volatilitu na trhu.

## 5.4 Plocha implikované volatility

Jak se ukazuje, u skutečných cen opcí nezávisí implikovaná volatilita jen na realizační ceně, ale také na čase expirace. Tak vzniká "časová struktura" volatility (volatility term structure).

Volatilita bývá rostoucí funkcí času pokud je současná volatilita historicky nízká. Důvodem je očekávání investorů že dojde k jejímu nárůstu. Naopak, pokud je současná volatilita historicky vysoká, pak volatilita bude klesající funkcí času, opět kvůli očekávání jejího poklesu.

Plocha implikované volatility dává současně závislost implikované volatility na čase a na realizační ceně. Když obchodník s opcemi chce ocenit nový opční kontrakt, požije příslušnou volatilitu kterou mu dává plocha implikované volatility.

Jednotlivými časovými řezy plochy volatility dostaneme volatility smiles pro různé doby expirace. Jak čas do expirace roste, volatility smile obvykle bývá méně výrazný.

V souvislosti s předchozími fakty se nabízí otázka jaká je reálná role Black-Scholesova modelu při praktickém oceňování opcí. Podle některých názorů slouží především jako interpolační nástroj, který pomáhá k tomu, aby konkrétní opce (zejména OTC opce) byly oceněny konzistentně s ostatními opcemi dostupnými na trhu.

## 5.5 Příklady

**Příklad 49.** Jaký typ volatility smile budeme pravděpodobně pozorovat pokud oba chvosty pravděpodobnostního rozdělení cen akcie jsou lehčí než u lognormálního rozdělení?

**Příklad 50.** Jaký typ volatility smile budeme pravděpodobně pozorovat pokud pravý chvosty pravděpodobnostního rozdělení cen akcie je těžší a levý lehčí než u lognormálního rozdělení?

**Příklad 51.** Dokažte, že implikovaná volatilita je stejná pro put i call opci se stejnými parametry (využijte k důkazu put-call paritu).

**Příklad 52.** Jaký typ volatility smile budeme pravděpodobně pozorovat při skocích v cenách podkladového aktiva? Bude výraznější pro opce s kratší nebo delší dobou splatnosti?

**Příklad 53.** Použijte reálná data pro opce na zvolenou akcii (například z databáze Bloomberg) a vypočtěte implikovanou volatilitu v závislosti na realizační ceně a na čase do expirace. Znázorněte graficky výslednou plochu implikované volatility.

# Chapter 6

## Exotické opce

V této kapitole se budeme zabývat méně obvyklými opčními kontrakty, pro které se ujal označení *exotické opce*

Evropské a americké opce se obvykle označují jako plain vanilla (obyčejné). Mají standardní vlastnosti a obchodují se ve velkém množství. Ostatní méně standardní produkty se označují jako exotické.

### 6.1 Packages

Jako první příklad uveďme balíčky, představující portfolia složená z evropských opcí, forwardů, podkladových akcií, hotovosti.

S příklady balíčků jsme se již setkali v části věnované opčním strategiím.

Jako příklad takového balíčku uveďme *flexibilní forward*

**Příklad 54.** Flexibilní forward sestavíme z jedné put opce nakrátko s realizační cenou  $K_1$  a jedné call opce nadlouho s realizační cenou  $K_2 > K_1$ .

- krátká pozice: zaručuje, že podkladové aktivum můžeme prodat za nějakou cenu mezi  $K_1$  a  $K_2$
- dlouhá pozice: zaručuje, že podkladové aktivum můžeme koupit za nějakou cenu mezi  $K_1$  a  $K_2$



## 6.2 Nestandardní americké opce

Nestandardní americké opce jsou charakterizovány omezením na dobu uplatnění. Připomeňme, že standardní americké opce můžeme uplatnit kdykoli do času expirace.

Uveďme několik příkladů typických omezení na dobu uplatnění:

- a) uplatnění opce je omezené na určitá data (*Bermudské opce*)
- b) uplatnění opce je možné jen po část životnosti opce, např.: od jistého data
- c) realizační cena se může měnit během životnosti opce

## 6.3 Složené opce

Složené opce jsou opce, jejichž podkladovým aktivem je opět opce. Dávají tedy právo koupit, případně prodat podkladovou opci s danými parametry ve stanovaném čase za stanovenou cenu.

V závislosti na typu jak opce samotné tak její podkladové opce rozlišujeme 4 typy složených opcí

- call na call
- call na put
- put na call
- put na put

K popsání takové opce tedy potřebujeme 2 realizační ceny a 2 realizační data. Tyto opce se dají ocenit za předpokladů Black-Scholesova modelu, pomocí 2-dimenzionálního normálního rozdělení

Uvažujme pro konkrétnost ocenění opce *Call na call*. Pro ostatní typy je situace zcela analogická.

V čase 1. expirace  $T_1$  má držitel právo koupit call opci za cenu  $K_1$ , která mu dává v čase  $T_2$  právo koupit podkladové aktivum (akcii) za cenu  $K_2$ .

Evropská call na call má v čase  $t = 0$  hodnotu

$$V_0 = S_0 \cdot M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - K_2 \cdot e^{-rT_2} M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1} \cdot K_1 \cdot \Phi(a_2),$$

kde

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S^*) + (r + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1},$$

$$b_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2},$$

$M(a, b; \rho)$  je sdružená distribuční funkce 2-dimenzionálního normálního rozdělení s korelačním koeficientem  $\rho$ , tedy

$$M(a, b; \rho) = P(X \leq a \ \& \ Y \leq b),$$

kde  $X$  a  $Y$  mají 2-dimenzionálního normálního rozdělení s korelačním koeficientem  $\rho$ .

$S^*$  je cena aktiva v čase  $T_1$  pro kterou je cena call opce v čase  $T_1$  rovna  $K_1$ . Tedy pokud  $S_1 > S^*$  složená opce bude uplatněna (v čase  $T_1$ ),  
 $S_1 < S^*$  složená opce bude uplatněna (v čase  $T_1$ ).

## 6.4 Chooser options

Chooser options jsou opce "na výběr" (alternativní anglický název – "as you like it") V předem daném čase  $T_1$  se držitel rozhodne, zda jde o call nebo put opci. Tedy hodnota v čase  $T_1$  je

$$\max(C, P),$$

kde  $C$  je hodnota příslušné call opce a  $P$  je hodnota příslušné put opce. Pokud realizační ceny obou jsou stejné, rovny  $K$ , potom máme podle put-call parity:

$$\max(C, P) = \max(C, C + K e^{-r(T_2-T_1)} - S_1) = C + \max(0, K e^{-r(T_2-T_1)} - S_1).$$

Tedy chooser opce je ekvivalentní dvěma opcím:

- 1 call opci s realizační cenou  $K$  a dobou expirace  $T_2$
- 1 put opci s realizační cenou  $K \cdot e^{-r(T_2-T_1)}$  a časem expirace  $T_1$ .

Tyto dvě opce můžeme ocenit podle Black-Scholesova modelu.

## 6.5 Bariérové opce

Bariérové opce rozlišujeme jednak podle typu bariéry, podle toho zda její dosažení aktivuje nebo deaktivuje opci, a dále podle vzájemné polohy bariéry a současné ceny.

### Knock-in:

opce začíná platit jen pokud cena akcie dosáhne bariéry  $H$  v čase 0 až  $T$ .

### Knock-out:

opce je bezcenná pokud cena akcie dosáhne bariéry  $H$  v čase 0 až  $T$ .

Podle polohy bariéry a současné ceny rozlišujeme opce v závislosti na tom, zda  $H > S_0$  Necht (bariéra shora), nebo  $H < S_0$  (bariéra zdola).

$$\begin{array}{ll} H < S_0 : & \text{down-and-in} \\ & \text{down-and-out} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} H > S_0 : & \text{up-and-in} \\ & \text{up-and-out} \end{array}$$

Pro konkrétnost uvažujme hodnotu  $C_{di}$  down-and-in call opce. Hodnota v čase  $t = 0$  této opce je

$$C_{di} = S_0 \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} \cdot \Phi(y) - K \cdot e^{-rT} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} \cdot \Phi\left(y - \sigma\sqrt{T}\right),$$

kde

$$\lambda = \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma^2}, \quad y = \frac{\ln(H^2/S_0 \cdot K)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda \sigma \sqrt{T}.$$

Platí

$$C = C_{di} + C_{do}$$

odkud plyne, že call down-and-out opce má hodnotu

$$C_{do} = C - C_{di}.$$

Analogické vztahy platí pro  $C_{ui}$  a  $C_{uo}$  (up-and-in, up-and-out call opce).

## 6.6 Binární opce

Binární opce je charakteristická nespojitou výplatní funkcí.

Opce typu Cash-or-nothing call má výplatu

$$V = \begin{cases} 0 & \text{pokud } S_T < K \\ Q & \text{pokud } S_T > K \end{cases},$$

kde  $Q$  je pevně daná hodnota.

Vzhledem k risk-neutrální míře je pravděpodobnost, že cena v čase expirace bude větší než  $K$ , rovna  $\Phi(d_2)$ .

Tedy cena cash-or-nothing call opce je rovna:

$$e^{-rT} \cdot Q \cdot \Phi(d_2).$$

Analogicky cash-or-nothing put opce má hodnotu

$$e^{-rT} \cdot Q \cdot \Phi(-d_2).$$

Dalším typem binární opce je Asset-or-nothing call, který má výplatní funkci

$$V = \begin{cases} 0 & \text{pokud } S_T < K \\ S_T & \text{pokud } S_T > K \end{cases}.$$

Obyčejná call opci je zřejmě rovna asset-or-nothing – cash-or-nothing, pro  $Q = K$ .

## 6.7 Look back opce

Výplata look back opce závisí na maximu (případně minimu) ceny aktiva během života opce. Pro evropskou look back call opci bude výplata rovna

$$S_T - \min_{t \in (0, T)} S_t.$$

Tedy opce nám umožní koupit akcii za minimální cenu dosaženou během života opce.

Pro put opci je výplata

$$\max_{t \in (0, T)} S_t - S_T.$$

Opce nám umožňuje prodat za maximální cenu dosaženou během života opce.

Pro stanovení maxima, případně minima musí být v opčním kontraktu stanoven přesný algoritmus ze kterých hodnot se maximální (minimální) hodnota určuje. Například to mohou být uzavírací ceny podkladové akcie každý obchodovací den na konkrétním trhu.

## 6.8 Shout options

Držitel shout opce má možnost 1-krát za dobu života opce "zavolat" na prodejce opce. Na konci obdrží buď obvyklou výplatu, nebo vnitřní hodnotu opce v čase zavolání. Označme čas zavolání  $\tau$ . Výplata tedy je

$$\max(0, S_T - S_\tau) + (S_\tau - K).$$

Hodnota v čase  $\tau$  je tedy současná hodnota  $(S_\tau - K)$  plus hodnota evropské call opce s expirační cenou  $S_\tau$ .

Další postup ocenění je analogický jako u americké opce.

## 6.9 Asijské opce

Výplata u asijských opcí závisí na průměru ceny aktiva za období životnosti opce. Jedním z důvodů používání těchto opcí je fakt, že znemožňují velkým investorům manipulovat s cenami podkladového aktiva těsně před vypršením opčního kontraktu.

Asijská call opce má výplatní funkci

$$\max(0, S_{\text{průměr}} - K)$$

Asijská put opce má výplatní funkci

$$\max(0, K - S_{\text{průměr}})$$

Pro geometrický průměr existuje oceňovací formule zatímco pro aritmetický průměr neexistuje.

## 6.10 Příklady

**Příklad 55.** Odvoďte alternativní rozklad chooser option na call opci s expirací v čase  $T_1$  a put opci s expirací v čase  $T_2$ .

**Příklad 56.** Bude lookback call opce hodnotnější nebo méně hodnotná když se zvýší frekvence pozorování ceny aktiva pro výpočet minima?

**Příklad 57.** Bude down-and-out call opce hodnotnější nebo méně hodnotná když se zvýší frekvence pozorování ceny aktiva pro určení zda byla překročena hranice?

**Příklad 58.** Vysvětlete, proč je možné obyčejnou evropskou call opci zapsat jako součet down-and-out a down-and-in evropské call opce.

**Příklad 59.** Vyjádřete standardní evropskou put opci jako součet dvou bariérových opcí typu up-and-out a up-and-in

**Příklad 60.** Necht  $S_0 < H < K$ . Vypočtete cenu up-and-out call opce.

**Příklad 61.** Necht  $c_1, p_1$  jsou ceny asijských opcí typu average price,  $c_2, p_2$  jsou ceny asijských opcí typu average strike, a  $c_3, p_3$  jsou ceny standardních evropských opcí. Dokažte, že platí

$$c_1 + c_2 - c_3 = p_1 + p_2 - p_3.$$

**Příklad 62.** Odvodte vztah pro cenu Forward start opce (Hull).

# Chapter 7

## Deriváty úrokových měr

V předchozích kapitolách jsme předpokládali, že úroková míra  $r$  je konstantní. Teď tento zjednodušující předpoklad opustíme a dovolíme, aby se  $r$  měnilo v čase.

### 7.1 Tržní cena rizika

Uvažujeme derivát, jehož hodnota závisí na jediné proměnné  $\theta$ . Předpokládejme, že  $\theta$  se řídí stochastickou diferenciální rovnicí

$$\frac{d\theta}{\theta} = m \cdot dt + s \cdot dW,$$

kde  $W$  je standardní Wienerův proces,  $m$  a  $s$  mohou záviset na  $\theta$  a na  $t$ .  $\theta$  může být např. cena akcie, cena ropy, ...

Nechť  $f_1$  a  $f_2$  jsou ceny 2 derivátů závislých jen na  $\theta$  a  $t$ . Jejich výplata je funkcí  $\theta$  v nějakém budoucím čase. Předpokládejme, že  $f_1$  a  $f_2$  splňují rovnice

$$\begin{aligned}\frac{df_1}{f_1} &= \mu_1 dt + \sigma_1 dW, \\ \frac{df_2}{f_2} &= \mu_2 dt + \sigma_2 dW,\end{aligned}$$

kde  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ , jsou funkce  $\theta$  a  $t$ .  $W$  je tentýž proces ve všech třech rovnicích. Náhodný člen  $\Delta W$  můžeme vhodnou kombinací  $f_1$  a  $f_2$  eliminovat:

$$\begin{aligned}\Delta f_1 &= \mu_1 f_1 \Delta t + \sigma_1 f_1 \Delta W && / \cdot \sigma_2 f_2 \\ \Delta f_2 &= \mu_2 f_2 \Delta t + \sigma_2 f_2 \Delta W && / \cdot (-\sigma_1 f_1)\end{aligned}$$

Uvažujme portfolio, které obsahuje množství  $\sigma_2 f_2$  1. derivátu a množství  $-\sigma_1 f_1$  2. derivátu. Nechť  $\pi$  je hodnota tohoto portfolia. Pak

$$\pi = \sigma_2 f_2 f_1 - \sigma_1 f_1 f_2$$

a

$$\Delta \pi = \sigma_2 f_2 \Delta f_1 - \sigma_1 f_1 \Delta f_2 = \mu_1 f_2 \sigma_2 f_1 \Delta t - \sigma_1 f_1 \mu_2 f_2 \Delta t$$

Takové portfolio je tedy bezrizikové a musí platit (z neexistence arbitráže)

$$\Delta \pi = r \cdot \pi \cdot \Delta t,$$

kde  $r$  je bezriziková úroková míra.

Dosazením dostaneme:

$$\begin{aligned}\Delta \pi &= \sigma_2 f_2 \Delta f_1 - \sigma_1 f_1 \Delta f_2 = r(\sigma_2 f_2 f_1 - \sigma_1 f_1 f_2) \Delta t \\ (\sigma_2 \mu_1 f_1 f_2 - \sigma_1 \mu_2 f_2 f_1) \Delta t &= r(\sigma_2 f_2 f_1 - \sigma_1 f_1 f_2) \Delta t \\ \sigma_2 \mu_1 - \mu_2 \sigma_1 &= r \sigma_2 - r \sigma_1 \\ \sigma_2 (\mu_1 - r) &= \sigma_1 (\mu_2 - r) \\ \underbrace{\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}}_{\text{parametry } f_1} &= \underbrace{\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}}_{\text{parametry } f_2} \Rightarrow \text{závisí pouze na } \theta\end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy, že je-li cena derivátu závislého jen na  $\theta$  a  $t$  rovna  $f$ , splňující rovnici

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sigma dW,$$

pak

$$\boxed{\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda} \quad .$$

platí pro všechny takové deriváty.



**Definice 7.1.**  $\lambda$  se nazývá *tržní cena rizika* veličiny  $\theta$

Obecně je  $\lambda$  funkcí  $\theta$  a  $t$ . Hodnota

$$\mu - r = \lambda \cdot \sigma$$

je míra rizika související s  $\theta$  obsažená v  $f$ . Máme tedy:

$\lambda$

... cena rizika

pravá strana = míra rizika · cena rizika

levá strana = očekávaný zisk přidáný k bezrizikové míře, který kompenzuje toto riziko

**Příklad 63.** Uvažujme derivát, jehož hodnota je závislá na ceně ropy (v kladném směru; t.j. roste-li cena ropy, roste cena derivátu) a nezávisí na jiných proměnných. Předpokládejme, že očekávaný zisk je 12% ročně, volatilita je 20% ročně a nechť  $r = 8\%$ . Tržní cena rizika ropy je tedy

$$\frac{0,12 - 0,08}{0,2} = 0,2.$$

Připomeňme, že výměnou pravděpodobnostní míry za ekvivalentní můžeme dosáhnout změny koeficientu driftu (Cameron-Martinova věta pro konstantní drift, Girsanova věta pro obecný stochastický drift).

Používá se také následující alternativní terminologie: výběr pravděpodobnostní míry určuje "svět," ve kterém platí určitá cena rizika ("míra"  $\sim$  cena rizika). Cena rizika = 0 pak odpovídá risk-neutrálnímu světu.

Nechť opět  $f$  je cena derivátu závislého na proměnné  $\theta$ . Předpokládejme, že se řídí stochastickou diferenciální rovnicí

$$df = \mu f dt + \sigma f dW,$$

kde  $W$  je standardní Wienerův proces,  $\mu$  a  $\sigma$  jsou funkce  $t$  a  $\theta$ .

Hodnota  $\mu$  závisí na vztahu investora vůči riziku. Ve světě, kde cena rizika je rovna 0 (risk-neutrální svět), máme

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} = 0 \iff \mu = r,$$

tedy

$$df = rf dt + \sigma f dW.$$

To platí v standardním risk-neutrálním světě (cena rizika odpovídá výběru pravděpodobnostní míry). Připomeňme si v této souvislosti ještě matematický popis vztahu investora k riziku.

#### **Příklad 64.**

**Volba I:** dostaneme s jistotou 50 Kč

**Volba II:** s pravděpodobností  $\frac{1}{2}$  dostaneme 100 Kč, s pravděpodobností  $\frac{1}{2}$  dostaneme 0 Kč

Očekávání je pro obě volby stejné (50 Kč). Volba I má rozptyl 0 (nulové riziko), volba II má nenulové riziko.

Investor je

1. rizikově neutrální, pokud obě volby jsou ekvivalentní
2. rizikově averzní, pokud volba I je pro něj lepší (většina investorů)
3. vyhledávající riziko, pokud volba II je pro něj lepší (hazardní hráči)

Jiné předpoklady o tržní ceně rizika dávají "jiné světy." Obecně máme

$$\mu = r + \lambda\sigma$$

a

$$df = (r + \lambda\sigma) \cdot f dt + \sigma f dW. \quad (7.1)$$

Tržní cena rizika tedy určuje míru růstu všech derivátů závislých na dané proměnné. Při přechodu od jedné ceny rizika k jiné se mění koeficient růstu, ale volatilita zůstává stejná.

Pro určitou hodnotu ceny rizika dostaneme reálný svět, to co pozorujeme v praxi.

*Připomenutí:* Itôův proces je martingal právě tehdy, když koeficient u  $dt$  je identicky rovný nule, tedy

$$d\theta = \sigma(t, \theta) \cdot dW.$$

Víme, že pro martingal platí

$$\boxed{E(\theta_T) = \theta_0}$$

## 7.2 Numeraire

Pojem numeraire zachycuje volbu jednotek které použijeme pro vyjádření ceny aktiva.

Nechť  $f$  a  $g$  jsou ceny obchodovatelných aktiv, závisející na jednom zdroji nejistoty.

**Definice 7.2.** Hodnota

$$\Phi = \frac{f}{g}.$$

se nazývá *relativní cena*  $f$  vzhledem ke  $g$ .

$\Phi$  můžeme chápat jako cenu  $f$  vyjádřenou v jednotkách  $g$ , namísto korun. Aktivum  $g$  se nazývá *numeraire*.

**Věta 7.3.** *Za předpokladu neexistence arbitráže je  $\Phi$  martingal pro nějakou volbu tržní ceny rizika. Touto volbou je volatilita  $g$ .*

*Proof.* Nechť volatilita  $f$  a  $g$  jsou  $\sigma_f$  a  $\sigma_g$ . Z rovnice 7.1 máme (za tržní cenu rizika bereme volatilitu  $g$ , tedy  $\sigma_g$ ):

$$\begin{aligned}df &= (r + \sigma_g \cdot \sigma_f) f dt + \sigma_f f dW \\dg &= (r + \sigma_g^2) g dt + \sigma_g g dW.\end{aligned}$$

Itôovo lemma (použité na funkci  $\ln$ ) dává

$$\begin{aligned}d \ln f &= \left( r + \sigma_g \cdot \sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2} \right) dt + \sigma_f dW \\d \ln g &= \left( r + \frac{\sigma_g^2}{2} \right) dt + \sigma_g dW.\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}d \left( \ln f - \ln g \right) &= \left( \sigma_g \cdot \sigma_f - \frac{\sigma_f^2}{2} - \frac{\sigma_g^2}{2} \right) dt + \left( \sigma_f - \sigma_g \right) dW \\d \left( \ln \left( \frac{f}{g} \right) \right) &= -\frac{1}{2} \left( \sigma_f - \sigma_g \right)^2 dt + \left( \sigma_f - \sigma_g \right) dW.\end{aligned}$$

Aplikací Itôova lemmatu na proces  $\frac{f}{g}$  a funkci  $\ln$  dostaneme

$$d \left( \frac{f}{g} \right) = \left( \sigma_f - \sigma_g \right) \cdot \frac{f}{g} dW.$$

Tedy  $\Phi = \frac{f}{g}$  je *martingal*. □

Svět, ve kterém je cena rizika rovna volatilitě  $g$ , budeme nazývat (forward)-*risk-neutrální vzhledem k  $g$* .

Podíl  $\frac{f}{g}$  je tedy martingal, odkud plyne

$$\frac{f_0}{g_0} = E_g \left( \frac{f_T}{g_T} \right)$$

a

$$f_0 = g_0 E_g \left( \frac{f_T}{g_T} \right),$$

kde  $E_g$  je očekávaná hodnota v risk-neutrálním světě vzhledem ke  $g$ .

### **Volby numeraire:**

1. Peněžní trh jako numeraire:

Peněžní trh je aktivum, které v čase  $t = 0$  má hodnotu 1 Kč a získává okamžitou bezrizikovou míru  $r$  v libovolném čase, (kde  $r$  může být stochastické).

Je-li  $g$  hodnota peněžního trhu, pak

$$dg = r \cdot g \cdot dt$$

Drift je stochastický, ale volatilita  $g$  je rovna 0. V risk-neutrálním světě vzhledem ke  $g$  je tedy cena rizika rovna 0.

Máme

$$f_0 = g_0 \widehat{\mathbb{E}} \left( \frac{f_T}{g_T} \right),$$

kde  $\widehat{\mathbb{E}}$  je očekávání ve standardním risk-neutrálním světě. Dále

$$g_0 = 1 \quad \text{a} \quad g_T = e^{\int_0^T r dt}$$

tedy

$$f_0 = \widehat{\mathbb{E}} \left( e^{-\int_0^T r dt} \cdot f_T \right),$$

neboli

$$\boxed{f_0 = \widehat{\mathbb{E}} \left( e^{-\bar{r}T} \cdot f_T \right)},$$

kde

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \int_0^T r dt$$

je aritmetický průměr hodnoty  $r$  mezi časy 0 a  $T$ .

2. Bez kuponový dluhopis jako numeraire:

Nechť  $P(t, T)$  je cena v čase  $t$  bezkuponového dluhopisu, který vyplatí 1\$ v čase  $T$ . Položme  $g$  rovno  $P(t, T)$ .

$\mathbb{E}_T$  bude označovat očekávání ve světě, který je risk-neutrální vzhledem k  $P(t, T)$ .

Protože  $g_T = P(T, T) = 1$  a  $g_0 = P(0, T)$ , rovnice

$$f_0 = g_0 \cdot \mathbb{E}_g \left( \frac{f_T}{g_T} \right)$$

dává

$$\boxed{f_0 = P(0, T) \cdot \mathbb{E}_T(f_T)}. \quad (7.2)$$

Tedy oproti peněžnímu trhu je diskontování (pomocí  $P(0, T)$ ) mimo operátor očekávání. To zjednoduší oceňování derivátů, které závisí jen na hodnotách v čase  $T$ .

Nechť  $\theta$  je stochastická proměnná, různá od úrokové míry. Forwardový kontrakt na  $\theta$  se splatností v čase  $T$  je definován jako kontrakt s výplatou

$$\theta_T - K$$

v čase  $T$ , kde  $\theta_T$  je hodnota v čase  $T$  a  $K$  je realizační cena. Nechť  $f$  označuje hodnotu kontraktu. Dále máme

$$f_0 = P(0, T) \cdot [\mathbb{E}_T(\theta_T) - K].$$

Forwardová cena  $F$  je ta hodnota  $K$ , pro kterou je  $f_0 = 0$ . Tedy

$$P(0, T) \cdot [\mathbb{E}_T(\theta_T) - F] = 0$$

odkud plyne

$$F = \mathbb{E}_T(\theta_T).$$

Tedy forwardová cena proměnné  $\theta$  je očekávání budoucí ceny ve světě risk-neutrálním vzhledem k  $P(t, T)$ .

### 7.3 Rozšíření Black-Scholesova modelu pro stochastickou úrokovou míru

Uvažujeme evropskou call opci s časem expirace  $T$ . Podle (7.2) máme

$$C = P(0, T) \cdot \mathbb{E}_T[\max(S_T - K, 0)],$$

kde  $S_T$  je cena akcie v čase  $T$ ,  $K$  je realizační cena opce.

Nechť  $R$  je zero rate ( $T$ -roční okamžitá úroková míra  $T$ -roční),

$$P(0, T) = e^{-RT},$$

tedy

$$C = e^{-RT} \cdot \mathbb{E}_T[\max(S_T - K, 0)].$$

Předpokládejme, že  $S_T$  je lognormální v risk-neutrálním světě vůči  $P(t, T)$  se střední směrodatnou odchylkou  $W$ . Dostaneme (jako při odvození standardního Black-Scholesova vzorce)

$$\mathbb{E}_T[\max(S_T - K, 0)] = \mathbb{E}_T(S_T) \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \Phi(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln[E_T(S_T)/K] + W^2/2}{W}, \quad d_2 = \frac{\ln[E_T(S_T)/K] - W^2/2}{W}.$$

$E_T(S_T)$  je forwardová cena akcie pro kontrakt se splatností v čase  $T$ .

Z neexistence arbitráže plyne, že

$$E_T(S_T) = S_0 \cdot e^{RT}.$$

Celkem tedy

$$C = S_0 \cdot \Phi(d_1) - K \cdot e^{-RT} \cdot \Phi(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln[S_0/K] + RT + W^2/2}{W}, \quad d_2 = \frac{\ln[S_0/K] + RT - W^2/2}{W}.$$

Platí-li  $W = \sigma \cdot \sqrt{T}$ , pak dostaneme přesně Black-Scholesův vzorec s  $r$  nahrazeným  $R$ .

## 7.4 Oceňování derivátů úrokových měř

Výplata takových derivátů závisí na úrovni úrokové míry. Oceňování je složitější než u opcí, protože

- pro řadu produktů je třeba mít model, který popisuje chování celé *výnosové křivky*,
- úrokové míry jsou použity jak pro diskontování, tak pro definici výplaty z derivátu.

### 7.4.1 Blackův model

Mějme evropskou call opci na proměnnou  $V$ . Označme:

$T$	...	čas do expirace opce
$F$	...	forwardová cena $V$ na kontrakt s expirací v čase $T$
$F_0$	...	hodnota $F$ v čase 0 (kontrakt uzavřený v čase 0)
$K$	...	realizační cena opce
$P(t, T)$	...	cena v čase $t$ dluhopisu vyplácejícího 1\$ v čase $T$
$V_T$	...	hodnota $V$ v čase $T$
$\sigma$	...	volatilita $F$

Pro oceňování opce:

1. Předpokládejme, že  $\ln V_T$  má normální rozdělení se střední hodnotou  $F_0$  a směrodatnou odchylkou  $\sigma\sqrt{T}$ .
2. Diskontujeme očekávanou výplatu pomocí  $T$ -roční okamžité úrokové míry (což je ekvivalentní vynásobení výplaty faktorem  $P(0, T)$ ).

Výplata z opce je

$$\max(V_T - K, 0).$$

Z lognormálního rozdělení dostaneme (jako u Black-Scholesova vzorce):

$$E(\max(V_T - K, 0)) = E(V_T) \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \Phi(d_2),$$

kde  $E(V_T)$  je očekávaná hodnota  $V_T$  a

$$d_1 = \frac{\ln[E_T(V_T)/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln[E_T(V_T)/K] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Protože předpokládáme, že  $E(V_T) = F_0$ , máme

$$C = P(0, T) \cdot [F_0 \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)], \quad (7.3)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln[F_0/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Podobně pro put opci:

$$P = P(0, T) \cdot [K \Phi(-d_2) - F_0 \Phi(-d_1)].$$

V tomto modelu nepředpokládáme geometrický Brownův pohyb pro vývoj ceny (uvolnění předpokladů Black-Scholesova modelu).



## 7.4.2 Opce na dluhopisy

Některé dluhopisy mají opce "zabudované v sobě."

**Callable bond:** dluhopis, který dovoluje firmě, která ho vydala, odkoupit jej zpátky za určenou cenu, v určených časech v budoucnosti.

Tedy držitel vlastně prodává call opci na tento dluhopis firmě, která ho vydala.

Na ocenění evropské call opce na dluhopis použijeme Blackův model.

Předpokládejme, že cena dluhopisu v čase  $T$  je lognormální.

Rovnici (7.3) můžeme použít (s  $F_0$  rovnou forwardové ceně dluhopisu  $F_B$  a  $\sigma$  rovno forwardové volatilitě dluhopisu  $\sigma_B$ ). Dostaneme

$$C = P(0, T) \cdot [F_B \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)]$$

pro call a

$$P = P(0, T) \cdot [K \Phi(-d_2) - F_B \Phi(-d_1)],$$

pro put, kde

$$d_1 = \frac{\ln[F_B/K] + \sigma_B^2 T/2}{\sigma_B \sqrt{T}} \quad \text{a} \quad d_2 = d_1 - \sigma_B \sqrt{T}.$$

$F_B$  se vypočítá podle vztahu

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P(0, T)},$$

kde  $I$  je současná hodnota kuponů a  $B_0$  je cena dluhopisů v čase 0.

# Chapter 8

## Numerické metody oceňování evropských opcí

V této kapitole ukážeme jak oceňovat evropské opce numericky. V tomto případě máme explicitní vzorec pro jejich hodnotu a numerické metody použít nemusíme. Nicméně v případě amerických opcí nemáme jinou možnost než použít numerické metody, které jsou založeny právě na rozšíření příslušných numerických metod pro evropské opce. Tomu se budeme věnovat v následující kapitole.

### 8.1 Explicitní metoda

Black-Scholesovu rovnici nejdříve převedeme na standardní rovnici vedení tepla (viz. Stochastická analýza). Uvažujme tedy rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.1)$$

na oblasti  $\mathbb{R} \times (0, T)$ , s počáteční podmínkou (transformovanou výplatní funkcí příslušné opce)

$$u(x, 0) = \psi(x) \quad (8.2)$$

a přetransformovanými okrajovými podmínkami pro  $x \rightarrow \pm\infty$  (připomeňme že například pro hodnotu call opce  $V(S, t)$  platí  $V \rightarrow 0$  pro  $S \rightarrow 0$  a  $V \rightarrow S$  pro  $S \rightarrow \infty$ ).

Jako první krok budeme diskretizovat oblast  $\mathbb{R} \times (0, T)$ . Zvolíme prostorový krok  $h > 0$  a časový krok  $k > 0$ . Předpokládejme, že  $k = \frac{T}{m}$ , jinak

řečeno  $m$  je počet dělicích podintervalů intervalu  $(0, T)$ . V oblasti  $\mathbb{R} \times (0, T)$  uvažujeme síť mřížových bodů

$$x_i = ih, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t_j = jk, \quad j = 0, \dots, m. \quad (8.3)$$

Aproximaci řešení v mřížovém bodě  $(x_i, t_j)$  označme  $u_i^j$ , tedy

$$u_i^j \approx u(x_i, t_j). \quad (8.4)$$

Parciální derivace budeme aproximovat příslušnými diferencemi. Uvažujme Taylorův rozvoj 2. řádu v bodě  $(x_i, t_j)$ . Máme  $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$ , tedy

$$u(x_{i+1}, t_j) = u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^3) \quad (8.5)$$

a analogicky

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^3). \quad (8.6)$$

Odečtením

$$u_{i+1}^j - u_{i-1}^j = 2 \frac{\partial u}{\partial x} h + O(h^3) \quad (8.7)$$

a vydělením  $h$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \quad (8.8)$$

s chybou  $O(h^2)$  pro  $h \rightarrow 0$ . To je aproximace první derivace pomocí *centrální difference*.

Sečtením rovnic (s přidáním členů 3. řádu, které se vyruší) dostaneme po úpravě a vydělení  $h^2$  aproximaci druhé derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}. \quad (8.9)$$

Pro časovou derivaci použijeme aproximaci pomocí *dopředné difference*. Máme

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial t} k + O(k^2) \quad (8.10)$$

Odtud

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \quad (8.11)$$

s chybou  $O(k)$ .

Dosazením aproximací do rovnice vedení tepla dostaneme pro  $u_i^j$  rovnici

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \quad (8.12)$$

s chybou  $O(k + h^2)$  pro  $h, k \rightarrow 0$ . Tedy hodnotu na časové vrstvě  $j + 1$  lze explicitně vyjádřit pomocí hodnot na vrstvě  $j$ ,

$$u_i^{j+1} = \gamma u_{i-1}^j + (1 - 2\gamma)u_i^j + \gamma u_{i+1}^j, \quad (8.13)$$

kde  $\gamma = \frac{k}{h^2}$ .

Pro konečnost výpočtu musíme ještě omezit obor proměnné  $x$ . Zvolíme  $N$  tak velké, abychom hraniční hodnoty  $u_{-N}^j$  a  $u_N^j$  mohli aproximovat pomocí okrajových podmínek.

Označme  $u^j$  vektor řešení na časové vrstvě  $j$ , tedy

$$u^j = (u_{-N+1}^j, \dots, u_{-1}^j, u_0^j, u_1^j, \dots, u_{N-1}^j) \quad (8.14)$$

je vektor v  $\mathbb{R}^{2N-1}$ . V maticovém zápisu tak dostaneme

$$u^{j+1} = Au^j + b^j \quad (8.15)$$

pro  $j = 0, \dots, m - 1$ , kde  $A$  je tridiagonální matice tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2\gamma & \gamma & & & & \\ \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma & & & \\ & \gamma & \dots & & & \\ & & & \dots & \gamma & \\ & & & \gamma & 1 - 2\gamma & \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

a

$$b^j = \begin{pmatrix} \gamma u_{-N}^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma u_N^j \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

Pokud platí takzvaná *Courant-Lewy-Fridrichsova podmínka stability*

$$0 < \gamma \leq \frac{1}{2}, \quad (8.18)$$

tedy

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (8.19)$$

pak je explicitní metoda stabilní. To znamená, že přibližná řešení konvergují pro  $h, k \rightarrow 0$  k přesnému řešení.

## 8.2 Metoda binomického stromu

Pokud zvolíme

$$h = \sqrt{2k} \quad (8.20)$$

bude  $\gamma = \frac{1}{2}$  a člen s koeficientem  $1 - 2\gamma = 0$  v (8.13) vypadne. Metoda pak má tvar

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{2}u_{i-1}^j + \frac{1}{2}u_{i+1}^j, \quad (8.21)$$

tedy  $u_i^{j+1}$  je aritmetický průměr hodnot řešení ve vrstvě  $t_j$ .

Výpočet je tedy analogický oceňování opce pomocí binomického modelu, tak jak je probírán v předcházejícím textu.

## 8.3 Implicitní metoda

V implicitní metodě pro aproximaci časové derivace namísto dopředné diference použijeme zpětnou diferenci,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} \quad (8.22)$$

s chybou  $O(k)$ . Tedy  $u_i^j$  splňuje rovnici

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \quad (8.23)$$

opět s chybou  $O(k + h^2)$  pro  $h, k \rightarrow 0$ . Tedy

$$-\gamma u_{i-1}^j + (1 + 2\gamma)u_i^j - \gamma u_{i+1}^j = u_i^{j-1} \quad (8.24)$$

kde  $\gamma = \frac{k}{h^2}$ . Omezíme se opět na konečnou posloupnost prostorových bodů  $x_i$ ,  $i = -N + 1, \dots, N - 1$ . Pak dostaneme soustavu rovnic

$$Au^{j+1} = u^j + b^j \quad (8.25)$$

pro  $j = 0, \dots, m-1$ , kterou vyřešíme vhodnou numerickou metodou (obvykle iterační metodou, viz. níže).  $A$  je v tomto případě matice

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & \gamma & & & & \\ \gamma & 1+2\gamma & \gamma & & & \\ & \gamma & \dots & & & \\ & & & \dots & \gamma & \\ & & & \gamma & 1+2\gamma & \end{pmatrix} \quad (8.26)$$

a  $b$  je vektor

$$b^j = \begin{pmatrix} \gamma u_{-N}^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma u_N^j \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

kde hodnoty řešení v krajních bodech  $x_{-N}$  a  $x_N$  aproximujeme pomocí okrajových podmínek.

Hlavní výhodou implicitní metody je stabilita pro libovolnou hodnotu  $\gamma$ . Posloupnost přibližných řešení tedy vždy konverguje k přesnému řešení.

## 8.4 Příklady

**Příklad 65.** Odvoďte diskretizaci obyčejné diferenciální rovnice

$$y'' + y' = x^2$$

**Příklad 66.** Odvoďte diskretizaci parciální diferenciální rovnice

$$F_{xx} - F_{yy} + F = 0$$

**Příklad 67.** Odvoďte tvar diskretizace druhé derivace s využitím dopředné difference.

**Příklad 68.** Pomocí Taylorova polynomu čtvrtého stupně odvoďte vztah pro diskretizaci třetí derivace reálné funkce jedné proměnné.

**Příklad 69.** Najděte cenu strategie strangle, vytvořené pomocí call opce s realizační cenou  $K = 20$  Kč a put opce s realizační cenou  $K = 18$  Kč. Ostatní hodnoty parametrů jsou  $S = 20$  Kč,  $r = 0$ ,  $\sigma = 0,3$ .

## Chapter 9

# Stochastické modely pro vývoj úrokových měr

Tato kapitola poskytuje přehled základních typů modelů které se používají pro modelování pohybu úrokových měr. První takový model zavedl Oldřich Vašíček, americký matematik českého původu.

### 9.1 Vašíčkův model

Vašíčkův model předpokládá, že okamžitá úroková míra se vyvíjí podle stochastické diferenciální rovnice

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma dW_t$$

kde  $W_t$  je Wienerův proces,  $r_t$  je hodnota okamžité úrokové míry v čase  $t$  a  $a, b, \sigma$  jsou parametry modelu. Tato rovnice má vlastnost mean reversion, tedy úroková míra má tendenci se vracet k jakési dlouhodobé průměrné hodnotě, popsané parametrem  $b$ . Parametr  $a$  měří intenzitu (rychlost) této tendence.

Parametr  $\sigma$  pak popisuje okamžitou volatilitu tohoto procesu.

Význam jednotlivých parametrů modelu ilustruje také dlouhodobé chování procesu. V limitě platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(r_t) = b$$

a



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}.$$

Hodnota

$$\frac{\sigma^2}{2a}$$

tedy hraje roli jakési dlouhodobé volatility.

Vašíčkův model je prvním modelem který zachycuje vlastnost návratu k průměru. Nevýhodou tohoto modelu je, že navzdory vlastnosti mean reversion dovoluje hodnotám okamžité úrokové míry nabývat záporné hodnoty. Tuto nevýhodu odstraňuje CIR model.

## 9.2 Model CIR

Tento model zavedli Cox, Ingersoll a Ross. Rovnice má v tomto případě tvar

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t$$

s analogickým významem parametrů jako ve Vašíčkově modelu.

Koeficient driftu stejně jako ve Vašíčkově modelu způsobuje mean reversion. Koeficient volatility  $\sigma\sqrt{r_t}$  ale zabráňuje hodnotám  $r_t$  dostat se do záporných hodnot. Pokud hodnota úrokové míry klesne na nulu, pak je volatility nulová, a rovnice se stává deterministickou s kladným driftem. Úroková míra se tedy s jistotou vrátí do kladných hodnot.

Pro tento model je možným spočítat explicitně pravděpodobnostní rozdělení budoucích hodnot úrokové míry.

## 9.3 Model Hulla a Whitea

Jednofaktorový model Hulla a Whitea dovoluje závislost parametrů na čase.

Rovnice má tvar

$$dr_t = [\theta(t) + \alpha(t)r_t] dt + \sigma dW(t)$$

Řešením rovnice můžeme odvodit pravděpodobnostní rozdělení pro  $r_t$  - normální rozdělení se střední hodnotou

$$e^{-\alpha t}r(0) + \frac{\theta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

a rozptylem

$$\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}).$$

Další používaný model zavedli Ho a Lee. Tento model předpokládá, že vývoj úrokové míry je popsán stochastickou diferenciální rovnicí

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t.$$

Tento model nemá mean reversion, ani mechanismus jak zabránit záporným hodnotám úrokové míry. Je ale možné jej volbou funkce  $\theta$  nakalibrovat tak, aby souhlasil se současnou výnosovou křivkou.

# Chapter 10

## Americké opce

V této kapitole se budeme zabývat americkými opcemi a jejich oceňováním. Jak již víme, s americkou call opcí bez dividendy je situace jednoduchá. Její hodnota je vždy rovna hodnotě příslušné evropské call opce, a můžeme k jejímu ocenění použít Black-Scholesův vzorec. Na druhé straně, pro oceňování amerických put opcí, a také call opcí na akcie vyplácející dividendy, neexistuje, alespoň zatím, žádná analytická teorie. Proto se k oceňování těchto opcí používají numerické metody.

Připomeňme, že americká kupní opce je kontrakt který dává majiteli právo koupit podkladové aktivum kdykoliv v časovém intervalu  $[0, T]$  za realizační cenu  $K$ , kde  $T$  je čas expirace opce.

Označme  $V^{AC}$  resp.  $V^{EC}$  hodnotu americké, resp. evropské call opce, a analogicky pro put opce. Zřejmě platí

$$V^{AC}(S, t) \geq V^{EC}(S, t) \quad (10.1)$$

a stejně tak pro put opci. Navíc cena americké call opce musí splňovat

$$V^{AC}(S, t) \geq \max(S_t - K, 0). \quad (10.2)$$

Opravdu, jinak by existovala zřejmá arbitráž : koupíme opci a okamžitě ji uplatníme. To dá zisk  $S_t - K$ , celkem pak máme  $S_t - K - V^{AC} > 0$ .

Graf ceny americké call opce tedy nikdy neprotne graf výplatní funkce opce. Na druhé straně, ukážeme že pro evropskou put opci i pro call s dividendou graf ceny protne graf výplatní funkce.

Pro evropskou put opci (bez dividendy) máme

$$V^{EP}(S, 0) = Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (10.3)$$

tedy

$$V^{EP}(0, 0) = Ke^{-rT} < K = K - S. \quad (10.4)$$

Podobně pro evropskou call opci na akcii s dividendovou mírou  $d$  máme

$$V^{EC}(S, 0) = Se^{-dT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2). \quad (10.5)$$

Tedy

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V^{EC}}{S} = e^{-dT} < 1 \quad (10.6)$$

a tedy

$$V^{EC}(S, 0) < S - K \quad (10.7)$$

pro dostatečně velké  $S \gg K$ .

Hodnota americké put opce je tedy větší než hodnota příslušné evropské opce a totéž platí pro call opci s dividendou.

## 10.1 Ocenění amerických opcí

Pro ocenění americké put opce, případně call opce s dividendou musíme vedle hodnoty řešení  $V^{AC}$  najít také funkci  $S_u(t)$  která popisuje hranici předčasného uplatnění. Ta má následující vlastnosti:

— Je-li  $S < S_u(t)$  pak  $V^{AC}(S, t) > \max(S - K, 0)$  a opci budeme dále držet. Pro malou změnu času platí stejný jistící argument jako pro evropskou opci. Tedy v oblasti  $0 < t < T$  a  $S < S_u(t)$  platí Black-Scholesova rovnice.

— Je-li  $S \geq S_u(t)$ , pak  $V^{AC}(S, t) = \max(S - K, 0)$  a opci uplatníme

Matematická formulace vypadá následovně:

Chceme najít funkci  $V^{AC}(S, t)$  společně s funkcí  $S_u(t)$  popisující hranici předčasného uplatnění, tak, aby platilo

— Funkce  $V = V^{AC}(S, t)$  splňuje Black-Scholesovu diferenciální rovnici.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - d)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (10.8)$$

na časově proměnné oblasti  $0 < t < T$  a  $S < S_u(t)$ .

— jsou splněny koncové podmínky pro call opci

$$V(S, T) = \max(S_T - K, 0) \quad (10.9)$$

— jsou splněny okrajové podmínky pro americkou call opci

$$V(0, t) = 0 \quad (10.10)$$

$$V(S_u(t), t) = S_u(t) - K \quad (10.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_u(t), t) = 1 \quad (10.12)$$

(pro odvození třetí podmínky viz. cvičení). V další části si ukážeme jak tuto úlohu řešit numericky.

## 10.2 Iterační metoda řešení soustav lineárních rovnic

V této části si ukážeme iterační metodu řešení systému lineárních rovnic, nazývanou SOR metoda, kterou lze adaptovat i na řešení úloh lineární komplementarity, tedy problému na který vede oceňování amerických opcí.

Nechť  $\omega > 0$  je zvolený parametr (tzv. relaxační parametr). Nechť

$$A = L + D + U \quad (10.13)$$

je rozklad matice  $A$  na diagonální část ( $D$ ) a dolní a horní trojúhelníkovou matici ( $L$  a  $U$ ).

Chceme řešit rovnici

$$Au = b. \quad (10.14)$$

To je ekvivalentní rovnici

$$Du = Du + \omega(b - Au). \quad (10.15)$$

Z rozkladu  $A = L + D + U$  dostaneme

$$(D + \omega L)u = (1 - \omega)Du - \omega Uu + \omega b. \quad (10.16)$$

Matice  $D + \omega L$  je invertovatelná, tedy  $u$  řeší úlohu

$$u = T_\omega u + c_\omega \quad (10.17)$$

kde

$$T_\omega = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)Du - \omega U) \quad (10.18)$$

a

$$c_\omega = \omega(D + \omega L)^{-1}b. \quad (10.19)$$

Pomocí matice  $T_\omega$  definujeme rekurentní posloupnost přibližných řešení úlohy  $Au = b$ ,

$$u^0 = C \quad (10.20)$$

pro zvolený vektor  $C$  (např.  $C = 0$ ) a

$$u^{p+1} = T_\omega u^p + c_\omega \quad (10.21)$$

pro  $p = 1, 2, \dots$ , Pokud posloupnost  $u^p$  konverguje k nějakému vektoru  $u$ , pak zřejmě platí

$$u = T_\omega u + c_\omega, \quad (10.22)$$

tedy  $u$  je řešení původní úlohy  $Au = b$ .

Konvergenci dostaneme pomocí Banachovy věty o kontrakci. Pokud dokážeme, že ve vhodné normě (např. spektrální, kdy je norma rovna maximum z absolutních hodnot vlastních čísel)

$$\|T_\omega\| < 1, \quad (10.23)$$

pak zobrazení

$$u \longrightarrow T_\omega u + c_\omega \quad (10.24)$$

je kontrakce

Platí následující věta:

**Věta 10.1.** *Pro tridiagonální diagonálně dominantní matici existuje  $\omega_0 \in (1, 2)$  pro které je spektrální norma minimální, a platí*

$$\|T_{\omega_0}\| < 1. \quad (10.25)$$

## 10.3 Lineární komplementarita pro americké opce

Pro americkou call a put opci platí parciální diferenciální nerovnost

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - d)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0 \quad (10.26)$$

pro všechna  $S \in (0, \infty)$  a  $t \in (0, T)$ . Pro ověření tohoto tvrzení uvažujme americký call s dividendami. Víme, že pro  $0 < S < S_u(t)$  platí Black-Scholesova rovnice, tedy nastává rovnost. Je-li naopak  $S \geq S_u(t)$  pak

$$V(S, t) = \max(S - K, 0) = S - K \quad (10.27)$$

neboť  $S_u(t) \geq K$ . Dosazením funkce  $S - K$  do levé strany Black-Scholesovy rovnice dostaneme

$$(r - d)S - r(S - K) = rK - dS \leq rK - DS_u(t) \leq 0, \quad (10.28)$$

neboť platí

$$S_u(t) \geq K \max\left(\frac{r}{d}, 1\right) \quad (10.29)$$

(dk.: cvičení). Tedy hodnota americké call opce splňuje následující úlohu lineární komplementarity

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - d)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0 \quad (10.30)$$

$$V(S, t) \geq \max(S - K, 0) \quad (10.31)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - d)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV\right)(V(S, t) - \max(S - K, 0)) = 0 \quad (10.32)$$

pro  $S \in (0, \infty)$  a  $t \in (0, T)$ .

## 10.4 Řešení úlohy o lineární komplementaritě

Máme dānu matici  $A$  a vektory  $b$  a  $g$ . Chceme řešit úlohu o lineární komplementaritě v diskrétním tvaru

$$Au \geq b, \quad u \geq g \quad (10.33)$$

a

$$(Au - b)(u - g) = 0, \quad (10.34)$$

kde všechny tři vztahy jsou chápány po složkách.

Nechť  $A$  je tridiagonální a diagonálně dominantní matice, tedy platí

$$\alpha_i > |\beta_i| + |\gamma_i|, \quad (10.35)$$

pro každé  $i$ , kde  $\alpha_i$  jsou hodnoty na hlavní diagonále a  $\beta_i, \gamma_i$  hodnoty na vedlejších diagonálách.

### 10.4.1 Projektovaná SOR metoda

V každém jednotlivém kroku přejdeme od vektoru aproximace  $u^p$  k  $u^{p+1}$  tak aby platilo

$$u^{p+1} \geq g. \quad (10.36)$$

Pak se ukáže že limita těchto aproximací je opravdu řešení úlohy.

Definujeme posloupnost aproximací řešení úlohy vztahy

$$u^0 = C, \quad u^{p+1} = \max(T_\omega u^p + c_\omega, g), \quad (10.37)$$

kde maximum opět bereme po složkách.

Platí

**Věta 10.2.** *Pokud posloupnost  $u^p$  konverguje k  $u$ , pak  $u$  je řešením úlohy.*

Označme

$$F(u) = \max(T_\omega u + c_\omega, g). \quad (10.38)$$

Zřejmě  $F$  je nelineární zobrazení. Nicméně důkaz toho že je to kontrakce se redukuje na ověření stejné vlastnosti pro lineární operátor  $T$ .

**Věta 10.3.**  *$F$  je kontrakce pokud  $\|T_\omega\| < 1$ , tedy pokud  $T$  samo o sobě je kontrakce.*



## 10.5 Numerické metody pro americké opce

Chceme řešit úlohu lineární komplementarity

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(u(x, t) - g(x, t)) = 0, \quad (10.39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq 0 \quad (10.40)$$

a

$$u(x, t) - g(x, t) \geq 0 \quad (10.41)$$

pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Funkce  $g(x, t)$  je transformovaná výplata příslušného typu opce. Provedeme diskretizaci jako v případě evropských opcí. Pro příslušné aproximace funkcí  $u$  a  $g$  označíme  $u^j$  a  $g^j$  hodnoty na časové vrstvě  $t_j$ , tedy

$$u^j = (u_{-N+1}^j, \dots, u_{N-1}^j) \in \mathbb{R}^{2N-1} \quad (10.42)$$

Opět zvolíme  $N$  tak velké, abychom mohli v krajních bodech aproximovat řešení pomocí okrajových podmínek, jako u evropských opcí.

Můžeme vzít

$$u_{-N}^j = g(x_{-N}, t_j), \quad u_N^j = g(x_N, t_j) \quad (10.43)$$

protože pro velké hodnoty  $x$  je okrajová podmínka přibližně rovna příslušné počáteční podmínce. Pak diskrétní verze úlohy o lineární komplementaritě má vektorový tvar

$$Au^{j+1} \geq u^j + b^j, \quad u^{j+1} \geq g^{j+1}, \quad j = 0, \dots, m-1 \quad (10.44)$$

$$(Au^{j+1} - b)_i (u^{j+1} - g^{j+1})_i = 0, \quad (10.45)$$

pro všechna  $i = 1, \dots, 2N-1$ . Matice  $A$  je stejná jako u implicitní metody pro evropské opce, tedy tridiagonální matice tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & \gamma & & & & & \\ \gamma & 1+2\gamma & \gamma & & & & \\ & \gamma & \dots & & & & \\ & & & \dots & \gamma & & \\ & & & \gamma & 1+2\gamma & & \end{pmatrix} \quad (10.46)$$

a

$$b^j = \begin{pmatrix} \gamma g(x_{-N}, t_{j+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma g(x_N, t_{j+1}) \end{pmatrix} \quad (10.47)$$

Řešení najdeme opět pomocí projektované SOR metody.

## 10.6 Příklady

**Příklad 70.** Najděte hodnotu americké call opce s dividendovým výnosem 3% ročně. Volatilita akcie je 0.3, úroková míra je 5% ročně, čas expirace je 0.5 roku. Realizační cena  $K = 15$  Kč je rovna současné ceně akcie.

**Příklad 71.** Najděte hodnotu americké put opce na akcii bez dividendy, je-li volatilita akcie je 0.15, úroková míra je 8% ročně, čas expirace jsou 4 měsíce, realizační cena je  $K = 50$  Kč a současná cena akcie je 45 Kč.

**Příklad 72.** Odvoďte okrajovou podmínku pro derivaci ceny americké call opce v bodě uplatnění (podmínka (10.12)).

**Příklad 73.** Platí pro americké opce vždy put-call parita? Ilustrujte svoji odpověď na příkladu.

**Příklad 74.** Jakým způsobem závisí hodnota hranice předčasného uplatnění na čase? Je to rostoucí nebo klesající závislost?

# Chapter 11

## Pravděpodobnostní rozdělení se silnými chvosty

V této kapitole se budeme věnovat distribucím se silnými chvosty. V Black-Scholesově modelu je předpoklad normality rozdělení zdůvodněn zejména centrální limitní větou.

Připomeňme, že Black-Scholesův model má tři základní předpoklady:

- lognormální rozdělení cen podkladového aktiva
- spojitost trajektorií cen aktiva
- nezávislost přírůstků cen za disjunktní časové intervaly

Na druhé straně, empirické výsledky ukazují odchylky od těchto předpokladů:

- silné chvosty pravděpodobnostních rozdělení
- skoky v cenách aktiv (při příchodu důležité informace, při přerušení obchodování, ...)
- krátkodobé korelace v pohybech cen (do cca 30 minut)

### 11.1 Charakterizace chvostů distribucí

Jedním ze způsobů jak kvantitativně sílu chvostu charakterizovat je pomocí existence nebo neexistence momentů. Připomeňme, že  $k$ -tý obecný moment

je definován jako

$$m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx, \quad (11.1)$$

kde  $f(x)$  je hustota příslušné náhodné veličiny. Pokud  $m_k$  existuje, tedy integrál je konečný, pak musí platit

$$f(x) < \frac{1}{|x|^{n+1}} \quad (11.2)$$

pro  $|x| \rightarrow \infty$ .

Pravděpodobnostní rozdělení se řídí tzv. *mocninným zákonem*, jestliže platí

$$f(x) \approx \frac{A_{\pm}}{|x|^{n+1}} \quad (11.3)$$

pro  $|x| \rightarrow \infty$  (tedy limita podílu obou stran je rovna jedné). V tom případě je zřejmě pro  $k \geq n$

$$m_k = \infty. \quad (11.4)$$

Speciálně pro  $n \leq 2$  distribuce nemá konečný rozptyl. Zřejmě musí vždy být  $n > 0$ , jinak by integrál z  $f(x)$  divergoval.

## 11.2 Charakterizace pomocí funkce přežití

Připomeňme, že funkce přežití  $S_X(x)$  náhodné veličiny  $X$  je definována jako pravděpodobnost, že  $X$  je větší než  $x$ , tedy

$$S_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x).$$

Pro relativní míru síly chvostu, řekneme že  $X_1$  má lehčí chvost než  $X_2$  pokud podíl funkcí přežití  $X_1$  a  $X_2$  diverguje do nekonečna, tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_{X_1}}{S_{X_2}} = \infty.$$

Pomocí L'Hospitalova pravidla můžeme vypočet limity redukovat na vztah pro hustoty náhodné veličiny,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_{X_1}}{S_{X_2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S'_{X_1}}{S'_{X_2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-f_{X_1}}{-f_{X_2}}.$$

### 11.3 Charakterizace pomocí funkce rizika

Připomeňme, že funkce rizika (hazard rate function)  $h_X(x)$  náhodné veličiny  $X$  je definována jako podíl hustoty a funkce přežití, tedy

$$h_X(x) = \frac{f(x)}{S(x)}.$$

Chování funkce rizika také úzce souvisí s chováním chvostů pravděpodobnostního rozdělení. Je-li funkce rizika pravděpodobnostního rozdělení rostoucí, má rozdělení lehké chvosty. Je-li klesající, pak má těžké chvosty.

Obecně samozřejmě nemusí být ani rostoucí ani klesající, ale pro standardní rozdělení používaná v praxi tomu tak bude.

Hraničním případem je exponenciální rozdělení, pro které je funkce rizika konstantní.

**Příklad 75.** Jako příklad uveďme Paretovo rozdělení s parametry  $a, b$ , tedy s hustotou

$$f(x) = ab^a(x+b)^{-a-1}.$$

Funkce přežití je rovna

$$S(x) = b^a(x+b)^{-a}.$$

Celkem tedy

$$h(x) = \frac{ab^a(x+b)^{-a-1}}{b^a(x+b)^{-a}} = \frac{a}{x+b},$$

což je zřejmě klesající funkce. Toto rozdělení má tedy těžké chvosty.

Analogicky je možné charakterizovat chování chvostů pomocí *funkce očekávané ztráty*. Ta je definovaná vztahem

$$e_X(y) = E(X - y | X > y).$$

Pokud je tato funkce klesající, má rozdělení těžký chvost, pokud je rostoucí, má lehký chvost.

## 11.4 Stabilní distribuce

Lévyho rozdělení je speciální případ mocninného zákona, které má navíc vlastnost stability. Objevuje se proto v obecné verzi centrální limitní věty. Používají se při popisu “víceúrovňových jevů“, jako je velikost příjmu, amplituda zemětřesení, atd.

Označme  $L_\mu(x)$  hustotu Lévyho rozdělení s parametrem  $\mu$ , kde  $\mu \in [1, 2]$ . Platí

$$L_\mu(x) \approx \frac{A_\pm^\mu}{|x|^{\mu+1}}, \quad (11.5)$$

kde  $A_\pm^\mu$  jsou konstanty popisující přesnou sílu pravého a levého chvostu. Pokud platí

$$A_+^\mu = A_-^\mu, \quad (11.6)$$

pak mluvíme o symetrickém Lévyho rozdělení. Obecné Lévyho rozdělení pak charakterizuje ještě parametr asymetrie

$$\beta = \frac{A_+^\mu - A_-^\mu}{A_+^\mu + A_-^\mu}. \quad (11.7)$$

S výjimkou případu krajních hodnot a  $\mu = \frac{3}{2}$  neexistuje pro hustotu analytické vyjádření. Jednoduchý popis ale existuje pro charakteristickou funkci.

Pro krajní hodnoty parametru dostaneme nejdříve pro  $\mu = 1$  Cauchyho rozdělení s hustotou

$$L_1(x) = \frac{A}{x^2 + \pi^2 A^2}. \quad (11.8)$$

Pro charakteristickou funkci máme obecně následující popis,

$$\hat{L}_\mu(\xi) = \exp(-a_\mu |\xi|^\mu), \quad (11.9)$$

kde  $a_\mu$  je konstanta úměrná konstantě  $A_\mu$ . V limitě pro  $\mu = 2$  dostaneme Gaussovo rozdělení, pro které

$$\hat{L}_2(\xi) = \exp(-c\xi^2). \quad (11.10)$$

Pokud součet  $n$  náhodných veličin se stejným rozdělením má opět totéž rozdělení, pak mluvíme o stabilní distribuci. Tato vlastnost je velmi silná a

vzácná. Stabilními distribucemi jsou právě Lévyho distribuce (včetně limitního případu Gaussovy distribuce).

Lévyho distribuce má také vlastnost nekonečné dělitelnosti, jak uvidíme dále.

## 11.5 Limitní rozdělení

V obecné verzi centrální limitní věty, bez předpokladu konečnosti rozptylu, hrají stabilní distribuce zcela analogickou roli jako Gaussovo rozdělení hraje v klasickém případě.

Stabilní distribuce, tedy Lévyho a Gaussova (jako limitní případ), jsou z definice pevnými body konvoluce. Pro jejich hustoty tedy platí, symbolicky zapsáno,

$$f \star f = f. \quad (11.11)$$

Navíc ale také fungují jako "atraktory" pro konvoluci. Libovolná distribuce při velkém počtu nezávislých sčítanců s tímto rozdělením konverguje ke stabilnímu rozdělení. To je obsah Centrální limitní věty.

Pro IID náhodné veličiny s konečným rozptylem platí standardní Centrální limitní věta, limitní distribucí je Gaussovo rozdělení.

**Věta 11.1.** *Nechť  $X_i, i = 1, 2, \dots$ , je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s hustotou pravděpodobnosti  $f$ , kde  $\hat{f} \in C^2(\mathbb{R})$ . Nechť  $E(X_i) = 0$  a  $E(X_i^2) = 1$ . Pak hustota pravděpodobnosti*

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$$

*se blíží k hustotě standardizovaného normálního rozdělení, t.j.*

$$Pr\left\{a \leq \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \leq b\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

*pro  $n \rightarrow \infty$ .*

Důležité při aplikaci této věty je mít na paměti, že chvosty součtu se mohou velmi lišit od chvostů normálního rozdělení. CLV dává aproximaci v



*centrální* oblasti, o chování chvostů neříká nic. Chvosty konečného součtu jsou kvalitativně stále stejné jako pro jednotlivé sčítance.

Poznamenejme, že tato verze CLV platí v daleko větší obecnosti. Na místo nezávislosti stačí předpokládat že korelace  $X_i$  a  $X_j$  klesají dostatečně rychle pro  $|i - j| \rightarrow \infty$ . Podobně lze oslabit i předpoklad stejného rozdělení. Stačí, aby rozptyly jednotlivých  $X_i$  si byly "dostatečně podobné".

S vlastností atraktoru pro operaci konvoluce normálního rozdělení souvisí další významná vlastnost normálního rozdělení. Mezi všemi distribucemi s daným konečným rozptylem má normální rozdělení nejmenší Shannonovu informační entropii. Ta měří informační obsah daného pravděpodobnostního rozdělení, největší je pro konstantní náhodnou veličinu, kdy hodnotu známe s jistotou. Shannonova informační entropie je definována jako

$$I(f) = - \int f(x) \ln f(x) dx. \quad (11.12)$$

Minimalizace entropie těsně souvisí s tím že při sčítání náhodných veličin ztrácíme informaci. Z hodnoty součtu nemůžeme zjistit téměř nic o hodnotách jednotlivých sčítanců

Pokud uvažujeme posloupnost IID náhodných veličin s mocninným zákonem s parametrem  $\mu < 2$ , tedy s nekonečným rozptylem, pak limitní distribuce je Lévyho distribuce.

## 11.6 Lévyho procesy

V této kapitole se budeme zabývat širokou třídou procesů, které poskytují přirozené zobecnění Wienerova procesu. Jejich hlavní výhodou je fakt že dovolují do pravděpodobnostního popisu vývoje cen aktiv zahrnout skoky a také rozdělení se silnými chvosty. Obě tyto vlastnosti jsou klíčové pro věrohodnost modelu.

**Definice 11.2.** Adaptovaný stochastický proces  $X$  se nazývá *Lévyho proces*, jestliže platí:

1.  $X_0 = 0$

2.  $X$  má přírůstky nezávislé na minulosti, tedy  $X_t - X_s$  je nezávislé na hodnotách procesu do času  $s$
3.  $X$  má stacionární přírůstky, tedy  $X_t - X_s$  má stejné rozdělení jako  $X_{t-s}$ .
4.  $X$  je stochasticky spojitý, tedy pro každé  $\epsilon$  a  $t \geq 0$  platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon) = 0 \quad (11.13)$$

**Věta 11.3.** *Nechť  $X$  je Lévyho proces. Pak existuje jednoznačně určená funkce  $\psi$  tak, že*

$$\phi_{X_t}(\xi) = e^{t\psi(\xi)} \quad (11.14)$$

Funkce z předchozí věty se nazývá Lévyho exponent.

**Definice 11.4.**  $X$  je nekonečně dělitelná náhodná veličina, jestliže pro každé  $N$  existují stejně rozdělené nezávislé náhodné veličiny  $X_1, \dots, X_N$  tak, že

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

S využitím charakteristické funkce můžeme otázku dělitelnosti převést na problém kdy je  $(\psi_X)^{\frac{1}{N}}$  charakteristická funkce nějakého pravděpodobnostního rozdělení.

**Věta 11.5.** *Nechť  $X$  je Lévyho proces. Pak  $X_t$  je nekonečně dělitelné pro každé  $t$  a platí*

$$\phi_{X_t}(\xi) = (\phi_{X_{\frac{t}{n}}}(\xi))^n \quad (11.15)$$

**Příklad 76.** V případě Wienerova procesu je Lévyho exponent zřejmě roven

$$\phi_{X_t}(\xi) = e^{-t(\frac{\xi^2}{2})} \quad (11.16)$$

tedy

$$\psi(\xi) = -\frac{\xi^2}{2} \quad (11.17)$$

Pro Wienerův proces s driftem  $a$  a volatilitou  $b$  dostaneme

$$\psi(\xi) = -ia\xi - \frac{b^2\xi^2}{2} \quad (11.18)$$

# Chapter 12

## Měření rizika

Nejčastěji používanou mírou rizika ve finanční matematice je střední směrodatná odchylka. Jedním z hlavních důvodů je nesporně fakt že vede k poměrně jednoduchým výpočtům. Na druhé straně je s touto mírou spojena řada problémů.

Pravděpodobnostní rozdělení se silnými chvosty, která se v praxi často objevují, často nemívají konečnou SSO. Dalším problémem je, že SSO nespĺňuje některé žádoucí vlastnosti obvykle požadované od koherentní míry rizika. Takovým mírám se bude věnovat následující podkapitola.

### 12.1 Vlastnosti míry rizika

Koherentní míra rizika  $m(X)$  náhodné veličiny  $X$  musí mít následující vlastnosti:

1.  $m(X + Y) \leq m(X) + m(Y)$  (subaditivita)
2. platí-li  $X \leq Y$  pro všechny možné jevy, pak musí platit  $m(X) \leq m(Y)$  (monotonost)
3. Pro libovolnou konstantu  $c > 0$  platí  $m(cX) = cm(X)$  (homogenita)
4. pro libovolnou konstantu  $c > 0$  platí  $m(X + c) = m(X)$  (invariance na posunutí).

Uvedme několik poznámek k jednotlivým vlastnostem.

1. vlastnost, subaditivita, říká, že riziko vzniklé zkombinováním dvou aktiv nemůže být větší než obě rizika dohromady. Volně řečeno, diverzifikace

nemůže nikdy zvyšovat riziko.

2. vlastnost, monotonost, znamená že pokud je ztráta z jednoho aktiva za všech okolností větší než z druhého, pak toto aktivum má nutně větší riziko.

3. vlastnost, homogenita říká že míra rizika nezávisí na jednotkách ve kterých riziko měříme.

4. vlastnost, invariance na posunutí lze interpretovat tak, že riziko zůstává stejné pokud přidáme aktivum které neobsahuje žádnou nejistotu.

Jak jsme se již zmínili, SSO není koherentní mírou rizika (viz. příklad níže).

Jak uvidíme v další části, často používaná veličina Value-at-Risk (VaR) také nedává koherentní míru rizika.

## 12.2 Value-at-Risk

Obecně řečeno, hodnota Value-at-Risk popisuje vystavení riziku tak, že udává množství kapitálu které je potřeba abychom se s jistou danou vysokou pravděpodobností (např. 0,995) nedostali do platební neschopnosti.

**Definice 12.1.** Uvažujme náhodnou veličinu  $X$  měřící naši možnou ztrátu. Hodnota Value-at-Risk na úrovni  $100p\%$ , označovaná jako  $VaR_p(X)$  je definována jako  $100p$  percentil rozdělení veličiny  $X$ .

Jinak řečeno, je to taková hodnota, pro kterou platí

$$P(X > VaR_p(X)) = 1 - p.$$

Jak ukážeme v následující části, přes značnou oblibu VaR neposkytuje koherentní míru rizika.

V následující podkapitole budeme definovat přirozenější míru rizika, která má již všechny požadované vlastnosti.

## 12.3 Tail-Value-at-Risk

**Definice 12.2.** Uvažujme náhodnou veličinu  $X$  měřící naši možnou ztrátu. Tail-Value-at-Risk ( $TVaR_p$ ) náhodné veličiny  $X$  na úrovni  $100p\%$  je defi-

nován jako očekávaná ztráta za podmínky že ztráta překročila  $100p$  percentil rozdělení  $X$ .

Tail-Value-at-Risk můžeme tedy zapsat takto:

$$TVaR_p(X) = E(X|X > VaR_p)$$

a

$$TVaR_p(X) = \frac{\int_{V_p}^{\infty} x f(x) dx}{1 - F(V_p)},$$

kde

$$V_p = VaR_p.$$

Dále integrací per partes dostaneme vztah

$$TVaR_p(X) = \frac{\int_{V_p}^{\infty} VaR_u(X) du}{1 - p}.$$

## 12.4 Příklady nekoherence

V této části ukážeme dva příklady, které demonstrují že dvě v praxi nejčastěji používané hodnoty k měření rizika, SSO a VaR, nesplňují požadavky na koherenci, zformulované v předchozí podkapitole.

První příklad se týká VaR.

**Příklad 77.** Uvažujme náhodnou veličinu  $X$ , jejíž distribuční funkce nabývá následující hodnoty:

$$F_X(1) = 0,95$$

$$F_X(100) = 0,96$$

$$F_X(110) = 0,99,$$

tedy 96 procentní kvantil je roven 100.

Uvažujme dále rozklad této náhodné veličiny na dvě části,  $Z$  a  $Y$  (nikoliv nezávislé), tedy  $X = Y + Z$ , definované následovně

$$Y = \begin{cases} X & \text{pokud } X \leq 110 \\ 0 & \text{pokud } X > 110 \end{cases},$$

a

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{pokud } X \leq 110 \\ X & \text{pokud } X > 110 \end{cases}.$$

Máme tedy  $X = Y + Z$ . Distribuční funkce pro náhodnou veličinu  $Y$  splňuje

$$F_Y(1) = 0,96$$

$$F_Y(100) = 0,99$$

$$F_Y(110) = 1.$$

Je tedy

$$VaR_{96\%}(Y) = 1.$$

Analogicky platí

$$F_Z(0) = 0.99$$

je tedy 99% pravděpodobnost žádné ztráty. Odtud plyne, že 96% kvantil musí splňovat

$$VaR_{96\%}(Z) \leq 0.$$

Celkem dostáváme, že součet 96% kvantilů veličin  $Y$  a  $Z$  je menší než 96% kvantil veličiny  $X$ , tedy subaditivita je porušena. V dalším příkladu ukážeme že ani SSO nesplňuje všechny předpoklady koherence. V tomto případě bude porušena monotonie

**Příklad 78.** Uvažujme dvojici náhodných veličin  $(X, Y)$  popisujících naši ztrátu. S pravděpodobností 0,5 nabývají hodnoty  $(0,10)$  a s pravděpodobností 0,5 nabývají hodnoty  $(10,10)$ . Zřejmě ve všech scénářích platí

$$X(\omega) \leq Y(\omega).$$

Na druhé straně ale náhodná veličina  $Y$  má nulovou SSO, zatímco  $X$  má SSO větší než nula. Je tedy

$$\sigma(X) > \sigma(Y)$$

a monotonie je porušena.

# Chapter 13

## Rozdělení extrémních hodnot

### 13.1 Maxima náhodných veličin

Uvažujme posloupnost nezávislých realizací stejné náhodné veličiny. V analýze rizika je klíčové znát rozdělení, které má maximální pozorovaná hodnota mezi prvními  $n$  realizacemi.

V praxi může jít o maximální pokles hodnoty finančního aktiva, největší škodu při automobilové havárii, atd.

Ze zákona velkých čísel plyne, že jev který má pravděpodobnost  $q$  se při  $n$  pozorováních objeví v průměru  $nq$  krát. Heuristicky se tedy dá říct, že při  $n$  pozorováních očekáváme se setkat s událostmi, jejichž pravděpodobnost je alespoň  $\frac{1}{n}$ . Řádově by tedy pro maximální hodnotu pozorovanou do  $n$ -té realizace mělo platit

$$F(M_{max}) \approx \frac{1}{n},$$

kde  $F$  je příslušná distribuční funkce dané náhodné veličiny.

Abychom získali přesnější představu o rozdělení maximální hodnoty, uvažujme náhodnou veličinu

$$x_{max} = \max(x_1, \dots, x_n).$$

Distribuční funkci

$$F_{max}(y) = P(x_{max} < y)$$

získáme snadno. Maximum je menší než  $y$  právě tehdy když jsou všechny pozorované hodnoty menší než  $y$ . Z nezávislosti tedy máme

$$F_{max}(y) = F(y)^n.$$

Pro velké hodnoty  $n$  můžeme použít aproximaci

$$F_{max}(y) = (1 - \tilde{F}(y))^n \approx e^{-nF(y)}$$

kde

$$\tilde{F}(y) = 1 - F(y) = P(X \geq y).$$

Z tohoto vztahu můžeme získat například pravděpodobnost kvantilu

$$F_{max}(Q_{\frac{1}{4}}) = \frac{1}{4},$$

tedy

$$\tilde{F}_{max}(Q_{\frac{1}{4}}) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{n}} \approx \frac{\ln 4}{n}.$$

Obecně pak budeme mít

$$\tilde{F}_{max}(Q_{\frac{1}{4}}) = 1 - p^{\frac{1}{n}} \approx -\frac{\ln p}{n}.$$

Tedy hodnota  $M_{max}$  pro kterou platí

$$F(M_{max}) \approx \frac{1}{n},$$

bude přibližně rovna

$$p \approx \frac{1}{e} \approx 0,37.$$

Jinak řečeno, pravděpodobnost, že  $M_{max}$  bude ještě větší je asi 0,63.

Kdybychom tedy například chtěli odhadnout největší denní ztrátu  $S$  příští rok s pravděpodobností 99%, dostaneme

$$F_{max}(-S) \approx \frac{-\ln(0.99)}{252}$$

kde  $F$  je distribuční funkce denních změn ceny a 252 je počet obchodních dnů.



Důležité je, že pro velké hodnoty  $n$  závisí rozdělení maxima pouze na asymptotickém chování původního rozdělení pro  $x \rightarrow \infty$ . Například, je-li rozdělení exponenciální, tedy

$$F(x) \approx e^{-ax},$$

pak platí

$$M_{max} \approx \frac{\ln n}{a},$$

dostáváme tedy velmi pomalý logaritmický růst s hodnotou  $n$ .

Substitucí

$$x_{max} = M_{max} + \frac{t}{a}$$

vypočteme rozdělení okolo maximální hodnoty. To je dáno Gumbelovým rozdělením

$$f(t) = e^{-e^{-t}} e^{-t}.$$

Jeho nejpravděpodobnější hodnota je 0. V tomto případě je tedy hodnota  $M_{max}$  nejpravděpodobnější hodnotou maxima.

## 13.2 Gumbelovo rozdělení

Obecně je distribuční funkce tohoto rozdělení definována vztahem

$$G_{0,\mu,\theta}(x) = \exp(-\exp(-\frac{x-\mu}{\theta})),$$

kde  $\mu$  je parametr polohy a  $\theta$  je parametr měřítka. Normovanou distribuční funkci Gumbelova rozdělení dostaneme pro  $\mu = 0$  a  $\theta = 1$ , tedy

$$G_0(x) = \exp(-\exp(-x)).$$

## 13.3 Fréchetovo rozdělení

Distribuční funkce tohoto rozdělení je

$$G_{1,\alpha,\mu,\theta}(x) = \exp(-(\frac{x-\mu}{\theta})^{-\alpha}).$$

kde  $\mu$  je parametr polohy,  $\theta$  je parametr měřítka a  $\alpha$  je parametr tvaru.

Fréchetovo rozdělení je definováno pouze pro hodnoty  $x > \mu$ . Jeho normalizovaná verze má tvar

$$G_{1,\alpha}(x) = \exp(-x^{-\alpha}).$$

## 13.4 Weibullovo rozdělení

V obecném případě máme pro toto rozdělení distribuční funkci

$$G_{2,\alpha,\mu,\theta}(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)^{-\alpha}\right).$$

kde  $\mu$  je parametr polohy,  $\theta$  je parametr měřítka a  $\alpha$  je parametr tvaru. Weibullovo rozdělení je naopak definováno pouze pro hodnoty  $x < \mu$ .

Normalizovaný tvar Weibullova rozdělení pak bude

$$G_{2,\alpha}(x) = \exp(-(-x)^{-\alpha}).$$

## 13.5 Zobecněné rozdělení extrémních hodnot

Toto rozdělení obsahuje předchozí tři rozdělení jako speciální případy. Normalizovaná distribuční funkce tohoto rozdělení je dána vztahem

$$F(x) = \exp\left(-\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right),$$

neboli

$$G_\gamma(x) = \exp\left(-\left(1 + \gamma x\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right),$$

V limitě pro  $\gamma \rightarrow 0$  dostaneme v exponentu  $e^{-x}$ , tedy  $G_0$  je normalizované Gumbelovo rozdělení.

## 13.6 Stabilita

Uvažujme nejdříve Gumbelovo rozdělení. Zřejmě platí

$$G_0(x + \ln n)^n = \exp(-n \exp(-x - \ln n)) =$$

$$\exp(-\exp(-x)) = G_0(x),$$

neboli

$$G_0(x + \ln n)^n = G_0(x).$$

Odtud plyne, že rozdělení maxima  $n$  pozorování z normalizovaného Gumbelova rozdělení má stále Gumbelovo rozdělení, pouze s posunutým parametrem měřítka o  $\ln n$ .

Pro obecnou situaci s libovolnou polohou a měřítkem dostaneme

$$\begin{aligned} G_{0,\mu,\theta}(x)^n &= G_0\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)^n \\ &= G_0\left(\frac{x-\mu}{\theta} - \ln n\right) = G_0\left(\frac{x-\mu-\theta \ln n}{\theta}\right) \\ &= G_0\left(\frac{x-\mu^*}{\theta}\right) \\ &= G_{0,\mu^*,\theta}(x), \end{aligned}$$

kde

$$\mu^* = \mu + \theta \ln n.$$

Stejná vlastnost platí i pro Fréchetovo rozdělení. Pro normalizovanou verzi máme

$$\begin{aligned} G_{1,\alpha}(n^{\frac{1}{\alpha}}x)^n &= \exp\left(-n(n^{\frac{1}{\alpha}}x)^{-\alpha}\right) \\ &= \exp(-x^{-\alpha}) = G_{1,\alpha}(x), \end{aligned}$$

neboli

$$G_{1,\alpha}(x)^n = G_{1,\alpha}(xn^{-\frac{1}{\alpha}}).$$

Odtud plyne že rozdělení  $n$  maxim z normalizovaného Fréchetova rozdělení má samo také Fréchetovo rozdělení, jenom se změněným měřítkem.

Pro obecný tvar dostaneme

$$G_{1,\alpha,\mu,\theta}(x)^n = G_{1,\alpha}\left(\frac{x-\mu}{\theta n^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = G_{1,\alpha,\mu,\theta^*}(x),$$

kde

$$\theta^* = \theta n^{\frac{1}{\alpha}}.$$

EV rozdělení jsou tedy stabilní vůči maximům. Jak ukážeme dále rozdělení maxim velké většiny rozdělení konverguje pro  $n \rightarrow \infty$  právě k takovému EV rozdělení. Tato rozdělení tedy hrají pro maxima zcela analogickou roli jako hraje normální rozdělení pro součty, podle Centrální limitní věty.

## Chapter 14

# Konvergence rozdělení maximálních hodnot

Tvrzení zformulované na konci minulé kapitoly formalizuje následující věta Fischer - Tippetova.

**Věta 14.1.** *Nechť pro distribuční funkci  $F$  daného rozdělení má*

$$F\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right)^n$$

*nedegenerovanou limitu pro  $n \rightarrow \infty$  pro nějaké konstanty  $a_n, b_n$ . Pak*

$$F\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right)^n \rightarrow G(x)$$

*pro  $n \rightarrow \infty$ , kde  $G$  je jedno z EV rozdělení pro nějakou hodnotu parametrů polohy a měřítka.*

Jako příklad uvažujme exponenciální rozdělení. Zvolíme-li konstanty

$$a_n = 1, \quad b_n = \ln n,$$

pak dostaneme

$$\begin{aligned} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) &= P(M_n \leq a_n x + b_n) \\ &= P(X \leq a_n x + b_n)^n = P(X \leq x + \ln n)^n \end{aligned}$$

$$= 1 - \exp(-x - \ln n)^n = \left(1 - \frac{\exp(-x)^n}{n}\right),$$

což konverguje pro  $n \rightarrow \infty$  k

$$\exp(-\exp(-x))$$

Limitní rozdělení maxim exponenciálního rozdělení pro vhodně zvolené normalizační konstanty je tedy Gumbelovo rozdělení.

## 14.1 Oblasti přitažlivosti

V této části se budeme zabývat otázkou jak poznat pro dané rozdělení že jeho maxima lze asymptoticky popsat Gumbelovým nebo Fréchetovým rozdělením.

V případě Fréchetova rozdělení je popis celkem jednoduchý.

### 14.1.1 Oblasti přitažlivosti pro Fréchetovo rozdělení

Oblastí přitažlivosti pro danou stabilní distribuci  $G$  rozumíme množinu všech rozdělení takových, že normalizovaná maxima konvergují k tomuto rozdělení. Taková vlastnost by zřejmě měla záviset pouze na vlastnostech chvostů těchto rozdělení. Následující věta to potvrzuje.

**Věta 14.2.** *Pravděpodobnostní rozdělení patří do oblasti přitažlivosti dané EV rozdělením  $G_i$ , s normalizačními konstantami  $a_n, b_n$ , právě tehdy, když platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS(a_n x + b_n) = -\ln G_i(x).$$

**Příklad 79.** Uvažujme normalizované exponenciální rozdělení. Pro normalizační konstanty  $a_n = 1$  a  $b_n = \ln n$  dostaneme pro maximum

$$\begin{aligned} nS(x + b_n) &= nP(X > x + \ln n) = n \exp(-x - \ln n) \\ &= n \exp(-x - \ln n) = \exp(-x) \\ &= -\ln G_0(x) \end{aligned}$$

Tedy pro tyto normalizační konstanty je limitním rozdělením Gumbelovo rozdělení.

V následující větě zformulujeme podmínku pro to, aby normalizovaná limitní distribuce maxima bylo Fréchetovo rozdělení.

**Definice 14.3.** Funkce  $f(x)$  je pomalu se měnící v nekonečno, pokud platí pro  $x \rightarrow \infty$

$$f(tx) \approx f(x)$$

pro všechna  $t > 0$ .

**Věta 14.4.** *Pokud má dané pravděpodobnostní rozdělení chvost splňující*

$$S(x) \approx T(x)x^{-a},$$

*kde  $T(x)$  je pomalu se měnící funkce, pak patří do oblasti přitažlivosti Fréchetova rozdělení.*

Následující postačující podmínku formuloval Von Mises.

**Věta 14.5.** *Nechť pro pravděpodobnostní rozdělení platí*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{S(x)} = a > 0.$$

*Pak toto rozdělení patří do oblasti přitažlivosti Fréchetova rozdělení.*

**Příklad 80.** Uvažujme nyní Paretovo rozdělení s parametrem  $a = -1$ , tedy s funkcí přežití

$$\frac{x+b}{b}$$

s normovacími konstantami

$$a_n = bn$$

a  $b_n = 0$ . Pak maximum má v limitě Fréchetovo rozdělení.

## 14.1.2 Oblasti přitažlivosti pro Gumbelovo rozdělení

Charakterizace rozdělení která patří do oblasti přitažlivosti Gumbelova rozdělení není tak jednoduchá jako pro Fréchetovo rozdělení.

Obecně řečeno sem patří rozdělení které mají lehčí chvosty než mocninné. Speciálně, taková rozdělení musí nutně mít momenty všech řádů. Patří sem například Gamma rozdělení, exponenciální, lognormální.

Chování chvostů jsou ale značně různá, patří sem jak normální rozdělení s lehkým chvostem, tak inverzní Gaussovo rozdělení s relativně těžkým chvostem.

Jako hlavní nástroj popisu oblasti přitažlivosti se používají tzv. Von Misesovy funkce.

**Definice 14.6.** Nechť  $F$  je distribuční funkce náhodné veličiny  $X$ . Předpokládejme, že existuje  $z \in R$  takové, že  $S(x)$  lze zapsat ve tvaru

$$S(x) = K \exp \left( - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right)$$

pro nějakou kladnou konstantu  $K$  a funkci  $a(t)$ , která je kladná a absolutně spojitá, s derivací  $a'(x)$ , pro kterou platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a'(x) = 0.$$

Pak  $F$  se nazývá Von Misesova funkce, s doprovodnou funkcí  $a$ . Základní vlastnosti shrnuje následující věta

**Věta 14.7.** *Von Misesova funkce je absolutně spojitá s hustotou  $f$ . Doprovodnou funkci můžeme zvolit ve tvaru*

$$a(x) = \frac{S(x)}{f(x)}.$$

*Dále platí*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x f(x)}{S(x)} = \infty.$$

Zřejmě je

$$a^{-1}(X) = \frac{f(x)}{S(x)}$$



rovno funkci rizika.

Následující věta dává postačující podmínku pro to aby rozdělení patřilo do oblasti přitažlivosti Gumbelova rozdělení.

**Věta 14.8.** *Nechť distribuční funkce náhodné veličiny  $F$  je Von Misesova funkce. Pak tato náhodná veličina patří do oblasti přitažlivosti Gumbelova rozdělení.*

Pro úplnou charakterizaci musíme zobecnit tvar Von Misesovy funkce.

**Věta 14.9.** *Distribuční funkce  $F$  patří do oblasti přitažlivosti Gumbelovy distribuce právě tehdy když můžeme  $S(x)$  zapsat ve tvaru*

$$S(x) = K(x) \exp\left(-\int_z^x \frac{b(t)}{a(t)} dt\right),$$

kde  $K$  a  $b$  jsou měřitelné funkce splňující

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K(x) = K > 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b(x) = 1$$

a  $a(t)$  je kladná a absolutně spojitá funkce s hustotou  $a'(x)$ , pro kterou platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a'(x) = 0.$$

Za normalizační konstanty můžeme vzít

$$d_n = F\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad c_n = a(d_n).$$

Dále můžeme vzít

$$a(x) = \int_x^\infty \frac{S(t)}{S(x)} dt$$

Analogicky jako u Von Misesovy funkce, funkce  $a$  se nazývá doprovodná funkce k funkci  $F$ .

Funkce  $a(x)$  je definována jako

$$a(x) = E(X - x | X > x),$$

jde tedy o ztrátovou funkci.

# Chapter 15

## Optimální jištění opční pozice

V této části se budeme zabývat otázkou jak provést prakticky optimální zajištění opční pozice, bez zjednodušujících (a leckdy nereálných) předpokladů Black-Scholesova modelu.

### 15.1 Statické zajištění

Uvažujme investora který v čase  $t = 0$  upsal jednu evropskou call opci a chce zajistit tuto pozici. Předpokládejme že (například z důvodu velkých transakčních nákladů) má možnost provést jen jednou, hned na začátku, nákup určitého množství podkladového aktiva.

Označme toto množství  $A$ . Naším cílem je najít optimální hodnotu  $A$  která bude minimalizovat investorovo riziko.

Celková bilance zisku pro investora je rovna

$$\Delta B = C - \max(S_n - K, 0) + A \sum_k \Delta S_k.$$

kde  $\Delta S_k = S_k - S_{k-1}$

Pokud je očekávání přírůstků ceny aktiva rovno nule, t.j.

$$E(\Delta S_k) = 0$$

pro všechna  $k$ , pak dostaneme pro rozptyl konečného zisku investora

$$V = \Delta S^2 - (\Delta S)^2$$

vztah

$$V = nD\Delta t A^2 - 2A(S_n - S_0) \max((S_n - K), 0) + V_0,$$

kde  $V_0$  je riziko samotné nekryté opce, tedy

$$V_0 = E(\max((S_n - K), 0)^2) - E(\max((S_n - K), 0))^2$$

Dostali jsme tedy jednoduchou kvadratickou závislost rizika na hodnotě  $A$ . Snadno tedy najdeme optimální hodnotu  $A$  která minimalizuje riziko, derivováním rovnice podle  $A$ . Dostaneme

$$A = \frac{1}{D\Delta t n} \int_K^\infty (S - K)(S - S_0)P(S|S_0)dS.$$

Pokud by pravděpodobnostní rozdělení hodnot aktiva bylo normální, pak lze integrál explicitně vypočítat. Dostaneme zajímavý výsledek, totiž hodnota  $A$  bude přímo rovna pravděpodobnosti že opce bude uplatněna,

$$A = \int_K^\infty P(S|S_0)dS.$$

V další části budeme uvažovat investora který má možnost provádět dynamický (ale samozřejmě diskrétní) jištění.

## 15.2 Dynamické jištění opční pozice

Uvažujme investora který provádí dynamické jištění v časech  $t = 0, 1, \dots, n$ . Množství aktiva které bude držet v čase  $k$  označíme  $A_k$ . Závisí jak na čase tak na současné dosažené ceně aktiva.

Celková bilance zisku investora bude rovna

$$\Delta B = C(1 + r)^n - \max((S_n - K), 0) + \sum_k A_k(S_k)\Delta S_k.$$

Stejně jako v předchozím případě vypočteme celkové riziko, které je opět kvadratickou funkcí hodnot  $A_k$ . Konstantní členy pro optimalizaci uvažovat

nemusíme. Dále budeme předpokládat, že přírůstky jsou nekorelované, tedy platí

$$E(\Delta S_k \Delta S_j) = 0$$

pro  $k \neq j$ .

Lineární a kvadratická část nám dává

$$\sum_k E(A_k^2) E_k(\Delta S_k) - 2 \sum_k E_k(A_k \Delta S_k \max(S_n - K, 0)),$$

kde očekávání  $E_k$  bereme podmíněné informacemi dostupnými v čase  $k$ . Uvažujme pravděpodobnostní rozdělení v jednotlivých časech  $t = k$ .

Opět chceme minimalizovat riziko vzhledem k hodnotám  $A_k$ . Dostaneme tak

$$A_k(x) = \frac{1}{D} \int_K^\infty E(\Delta S_k)_{(S,k) \rightarrow (S',n)} (S' - K) P(S', n | S, k) dS.$$

kde

$$D = E_k(\Delta S_k^2)$$

# Bibliography

- [1] Hull J. C.: *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall 2012
- [2] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS Bratislava 2005
- [3] Bouchaud P., Potters, M.: *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge University Press 2003
- [4] Willmott P., Howison S., Dewynne, J.: *The Mathematics of Financial derivatives, A Student Introduction*, Cambridge University Press 1996
- [5] Klugman S., Panjer H., Willmot G.: *Loss Models: From Data to Decisions*, Wiley 2006
- [6] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Slovenská technická univerzita 2009
- [7] Etheridge A.: *A Course in Financial Calculus*, Cambridge University Press 2002
- [8] Baxter M., Rennie A.: *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge University Press 1996
- [9] Wilmott P.: *Paul Wilmott on Quantitative Finance, 3 Volume Set*, Wiley 2006
- [10] Wilmott P.: *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*, Wiley 2007

- [11] Černý A.: *Mathematical Techniques in Finance: Tools for Incomplete Markets* Princeton University Press 2009
- [12] Bachelier L.: *Louis Bachelier's Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance, translated and commented by Davis and Etheridge*, Princeton University Press 2006