Afinní a Eukleidovská geometrie

MIN101 Matematika I

Zdeněk Pospíšil

707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

12. prosince 2022

Obsah

Afinní prostor

Definice

$$\Big(\mathcal{A}, ((\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1), (V, +, o), \cdot\,), +\Big),$$

Afinní prostor
Definice

$$\Big(\mathcal{A}, ((\mathbb{K},+,\cdot,0,1),(V,+,o),\,\cdot\,),+\Big),$$

$\mathcal{A}$	...	neprázdná množina bodů
$((\mathbb{K},+,\cdot,0,1),(V,+,o),\,\cdot\,)$	...	vektorový prostor – *zaměření afinního prostoru*
$(\mathbb{K},+,\cdot,0,1)$	...	pole skalárů
$(V,+,o)$	...	Abelovská grupa vektorů
$+$	...	vnější operace $+ : \mathcal{A}\times V \to \mathcal{A}$, $(A,v)\mapsto A+v$, která splňuje

1. $(\forall A\in\mathcal{A})\, A+o=A$,
2. $(\forall A\in\mathcal{A})(\forall v,w\in V)\, A+(v+w)=(A+v)+w$,
3. $(\forall A,B\in\mathcal{A})(\exists! v\in V)\, A+v=B$, označení $v=B-A$.

Afinní prostor
Definice

$$\Big(\mathcal{A}, ((\mathbb{K},+,\cdot,0,1),(V,+,o),\,\cdot\,),+\Big),$$

$\mathcal{A}$	…	neprázdná množina bodů
$((\mathbb{K},+,\cdot,0,1),(V,+,o),\,\cdot\,)$	…	vektorový prostor – *zaměření afinního prostoru*
$(\mathbb{K},+,\cdot,0,1)$	…	pole skalárů
$(V,+,o)$	…	Abelovská grupa vektorů
$+$	…	vnější operace $+ : \mathcal{A}\times V \to \mathcal{A}$, $(A,v)\mapsto A+v$, která splňuje

1. $(\forall A\in\mathcal{A})\, A+o=A$,
2. $(\forall A\in\mathcal{A})(\forall v,w\in V)\, A+(v+w)=(A+v)+w$,
3. $(\forall A,B\in\mathcal{A})(\exists! v\in V)\, A+v=B$, označení $v=B-A$.

Afinní prostor

Definice

$$\Big(\mathcal{A}, \big((\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1), (V, +, o), \cdot\,\big), +\Big),$$

Posunutí bodu o vektor $v \in V$*:* $\tau_v : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$*,*

$$\tau_v(A) = A + v.$$

Afinní prostor
Definice

$$\Big(\mathcal{A}, ((\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1), (V, +, o), \cdot), +\Big),$$

Posunutí bodu o vektor $v \in V$: $\tau_v : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$,

$$\tau_v(A) = A + v.$$

Dimenze afinního prostoru – dimenze jeho zaměření, $\dim \mathcal{A} = \dim V$.

Afinní prostor

Definice

$$\Big(\mathcal{A}, ((\mathbb{K},+,\cdot,0,1),(V,+,o),\,\cdot\,),+\Big),$$

Posunutí bodu o vektor $v \in V$: $\tau_v : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$,

$$\tau_v(A) = A + v.$$

Dimenze afinního prostoru – dimenze jeho zaměření, $\dim \mathcal{A} = \dim V$.

Afinní soustava souřadnic: $(A_B, u_1, u_2, \ldots, u_n)$, kde
$A_B \in \mathcal{A}$ pevně zvolený bod,
$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ báze zaměření V.

Afinní prostor

Definice

$$\Big(\mathcal{A}, ((\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1), (V, +, o), \cdot\,), +\Big),$$

Posunutí bodu o vektor $v \in V$: $\tau_v : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$,

$$\tau_v(A) = A + v.$$

Dimenze afinního prostoru – dimenze jeho zaměření, $\dim \mathcal{A} = \dim V$.

Afinní soustava souřadnic: $(A_B, u_1, u_2, \ldots, u_n)$, kde
$A_B \in \mathcal{A}$ pevně zvolený bod,
$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ báze zaměření V.

Každý bod $A \in \mathcal{A}$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$A = A_B + x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n.$$

Afinní prostor

Afinní podprostory

$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}$, $Z(\mathcal{Q}) = \{B - A : A, B \in \mathcal{Q}\}$.

Afinní prostor

Afinní podprostory

$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}$, $Z(\mathcal{Q}) = \{B - A : A, B \in \mathcal{Q}\}$.

Afinnní prostor $(\mathcal{Q}, W) = \big(\mathcal{Q}, Z(\mathcal{Q})\big)$ *je afinním podprostorem afinního prostoru* $(\mathcal{A}, V)$, $(\mathcal{Q}, W) \subseteq (\mathcal{A}, V)$, pokud

(i) $\big(\mathbb{K}, Z(\mathcal{Q})\big) \subseteq (\mathbb{K}, V)$, tj. zaměření afinního prostoru $\mathcal{Q}$ je vektorým podprostorem zaměření afinního prostoru $\mathcal{A}$.

(ii) $(\forall A \in \mathcal{Q})(\forall w \in W)\, A + w \in \mathcal{Q}$.

Afinní prostor

Afinní podprostory

$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}$, $Z(\mathcal{Q}) = \{B - A : A, B \in \mathcal{Q}\}$.

Afinnní prostor $(\mathcal{Q}, W) = \big(\mathcal{Q}, Z(\mathcal{Q})\big)$ *je afinním podprostorem afinního prostoru* $(\mathcal{A}, V)$, $(\mathcal{Q}, W) \subseteq (\mathcal{A}, V)$, pokud

(i) $\big(\mathbb{K}, Z(\mathcal{Q})\big) \subseteq (\mathbb{K}, V)$, tj. zaměření afinního prostoru $\mathcal{Q}$ je vektorým podprostorem zaměření afinního prostoru $\mathcal{A}$.

(ii) $(\forall A \in \mathcal{Q})(\forall w \in W)\, A + w \in \mathcal{Q}$.

$\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{A}$

Afinní podprostor generovaný množinou M:

$$\langle M \rangle = \bigcap \big\{U :\ M \subseteq U, \big(U, Z(U)\big) \subseteq (\mathcal{A}, V)\big\}$$

Afinní prostor

Afinní podprostory

$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}$, $Z(\mathcal{Q}) = \{B - A : \ A, B \in \mathcal{Q}\}$.

Afinnní prostor $(\mathcal{Q}, W) = \big(\mathcal{Q}, Z(\mathcal{Q})\big)$ *je afinním podprostorem afinního prostoru* $(\mathcal{A}, V)$, $(\mathcal{Q}, W) \subseteq (\mathcal{A}, V)$, pokud

(i) $\big(\mathbb{K}, Z(\mathcal{Q})\big) \subseteq (\mathbb{K}, V)$, tj. zaměření afinního prostoru $\mathcal{Q}$ je vektorým podprostorem zaměření afinního prostoru $\mathcal{A}$.

(ii) $(\forall A \in \mathcal{Q})(\forall w \in W)\, A + w \in \mathcal{Q}$.

$\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{A}$

Afinní podprostor generovaný množinou M:

$$\langle M \rangle = \bigcap \big\{U : \ M \subseteq U, \big(U, Z(U)\big) \subseteq (\mathcal{A}, V)\big\}$$

$(\mathbb{K}, U) \subseteq (\mathbb{K}, V)$, $A_0 \in \mathcal{A}$:

$$\mathcal{Q} = A_0 + U := \{A_0 + v : \ v \in U\}$$

je afinním podprostorem afinního prostoru $(\mathcal{A}, V)$.

Afinní prostor

Afinní podprostory

$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}$, $Z(\mathcal{Q}) = \{B - A : A, B \in \mathcal{Q}\}$.

Afinnní prostor $(\mathcal{Q}, W) = \big(\mathcal{Q}, Z(\mathcal{Q})\big)$ *je afinním podprostorem afinního prostoru* $(\mathcal{A}, V)$, $(\mathcal{Q}, W) \subseteq (\mathcal{A}, V)$, pokud

(i) $\big(\mathbb{K}, Z(\mathcal{Q})\big) \subseteq (\mathbb{K}, V)$, tj. zaměření afinního prostoru $\mathcal{Q}$ je vektorým podprostorem zaměření afinního prostoru $\mathcal{A}$.

(ii) $(\forall A \in \mathcal{Q})(\forall w \in W)\, A + w \in \mathcal{Q}$.

$\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{A}$

Afinní podprostor generovaný množinou M:

$$\langle M \rangle = \bigcap \big\{U : M \subseteq U, \big(U, Z(U)\big) \subseteq (\mathcal{A}, V)\big\}$$

$(\mathbb{K}, U) \subseteq (\mathbb{K}, V)$, $A_0 \in \mathcal{A}$:

$$\mathcal{Q} = A_0 + U := \{A_0 + v : v \in U\}$$

je afinním podprostorem afinního prostoru $(\mathcal{A}, V)$.

Je-li $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ báze U, pak

$$\mathcal{Q} = \{A_0 + t_1u_1 + t_2u_2 + \cdots + t_ku_k : t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{K}\}$$

– *parametrický popis afinního podprostoru.*

Afinní prostor

Afinní kombinace a afinní obal

Afinní prostor

Afinní kombinace a afinní obal

Afinní kombinace bodů $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$:

$$A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + \cdots + t_k(A_k - A_0),$$

kde $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$.

Afinní prostor

Afinní kombinace a afinní obal

Afinní kombinace bodů $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$:

$$A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + \cdots + t_k(A_k - A_0),$$

kde $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$.

Afinní obal bodů $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$:

$$\langle A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle = \left\{ A_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0) : \ t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{K} \right\}$$

Afinní prostor

Afinní kombinace a afinní obal

Afinní kombinace bodů $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$:

$$A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + \cdots + t_k(A_k - A_0),$$

kde $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$.

Afinní obal bodů $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$:

$$\langle A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle = \left\{ A_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0) : \; t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{K} \right\}$$

Body $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ *jsou v obecné poloze*, pokud vektory

$$A_1 - A_0, A_2 - A_0, \ldots, A_k - A_0$$

jsou lineárně nezávislé, tj. $\dim\langle A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle = k$.

Afinní prostor

Afinní zobrazení

Afinní zobrazení afinního prostoru $(\mathcal{A}, V)$ *do afinního prostoru* $(\mathcal{B}, W)$,
$f : (\mathcal{A}, V) \to (\mathcal{B}, W)$:

Afinní prostor

Afinní zobrazení

Afinní zobrazení afinního prostoru $(\mathcal{A}, V)$ *do afinního prostoru* $(\mathcal{B}, W)$,
$f : (\mathcal{A}, V) \to (\mathcal{B}, W)$:

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B},$$
$$(\exists \varphi : V \to W)\, \varphi \text{ lineární a } (\forall A \in \mathcal{A})(\forall v \in V)\, f(A + v) = f(A) + \varphi(v).$$

Afinní prostor

Afinní zobrazení

Afinní zobrazení afinního prostoru $(\mathcal{A}, V)$ *do afinního prostoru* $(\mathcal{B}, W)$,
$f : (\mathcal{A}, V) \to (\mathcal{B}, W)$:

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B},$$
$$(\exists \varphi : V \to W)\, \varphi \text{ lineární a } (\forall A \in \mathcal{A})(\forall v \in V)\, f(A + v) = f(A) + \varphi(v).$$

f afinní, pak

$$f\big(A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + \cdots + t_k(A_k - A_0)\big) =$$
$$= f(A_0) + \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0)\right) = f(A_0) + \sum_{i=1}^{k} t_i \varphi(A_i - A_0),$$

Afinní prostor

Afinní zobrazení

Afinní zobrazení afinního prostoru $(\mathcal{A}, V)$ *do afinního prostoru* $(\mathcal{B}, W)$,
$f : (\mathcal{A}, V) \to (\mathcal{B}, W)$:

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B},$$
$$(\exists \varphi : V \to W)\, \varphi \text{ lineární a } (\forall A \in \mathcal{A})(\forall v \in V)\, f(A + v) = f(A) + \varphi(v).$$

f afinní, pak

$$f\big(A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + \cdots + t_k(A_k - A_0)\big) =$$
$$= f(A_0) + \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0)\right) = f(A_0) + \sum_{i=1}^{k} t_i \varphi(A_i - A_0),$$

tedy: Afinní zobrazení zachovává afinní kombinaci bodů.

Afinní prostor

Afinní zobrazení

Afinní zobrazení afinního prostoru $(\mathcal{A}, V)$ *do afinního prostoru* $(\mathcal{B}, W)$,
$f : (\mathcal{A}, V) \to (\mathcal{B}, W)$:

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B},$$
$$(\exists \varphi : V \to W)\, \varphi \text{ lineární a } (\forall A \in \mathcal{A})(\forall v \in V) f(A + v) = f(A) + \varphi(v).$$

f afinní, pak

$$f\big(A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + \cdots + t_k(A_k - A_0)\big) =$$
$$= f(A_0) + \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0)\right) = f(A_0) + \sum_{i=1}^{k} t_i\varphi(A_i - A_0),$$

tedy: Afinní zobrazení zachovává afinní kombinaci bodů.

Poměr bodu C vzhledem k daným bodům A, B na přímce:

$$C \neq B, \quad C = A + s(B - A) = B + r(A - B),$$
$$(C; A, B) = -\frac{s}{r}.$$

Afinní prostor

Afinní zobrazení

Afinní zobrazení afinního prostoru $(\mathcal{A}, V)$ *do afinního prostoru* $(\mathcal{B}, W)$,
$f : (\mathcal{A}, V) \to (\mathcal{B}, W)$:

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B},$$
$$(\exists \varphi : V \to W)\, \varphi \text{ lineární a } (\forall A \in \mathcal{A})(\forall v \in V)\, f(A + v) = f(A) + \varphi(v).$$

f afinní, pak

$$f\big(A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + \cdots + t_k(A_k - A_0)\big) =$$
$$= f(A_0) + \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0)\right) = f(A_0) + \sum_{i=1}^{k} t_i \varphi(A_i - A_0),$$

tedy: Afinní zobrazení zachovává afinní kombinaci bodů.

Poměr bodu C vzhledem k daným bodům A, B na přímce:

$$C \neq B, \quad C = A + s(B - A) = B + r(A - B),$$
$$(C; A, B) = -\frac{s}{r}.$$

Afinní zobrazení zachovává poměr bodů na přímce.

Standardní afinní prostor

$$\left(\mathbb{R}^n, ((\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1), (\mathbb{R}^n, +, \boldsymbol{o}), \cdot\ ), +\right)$$

Standardní afinní prostor

$$\Big(\mathbb{R}^n, \big((\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1), (\mathbb{R}^n, +, \boldsymbol{o}), \cdot\,\big), +\Big)$$

Vektory i body jsou sloupcové vektory.

Standardní afinní prostor
Konvence

$$\left(\mathbb{R}^n, ((\mathbb{R},+,\cdot,0,1),(\mathbb{R}^n,+,\boldsymbol{o}),\,\cdot\,),+\right)$$

Vektory i body jsou sloupcové vektory.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x_k} = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x_{jt}} = \begin{pmatrix} x_{1jt} \\ x_{2jt} \\ \vdots \\ x_{njt} \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\mathsf{A})_{ij} = a_{ij}$$

Standardní afinní prostor

Podprostory

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

Standardní afinní prostor

Podprostory

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} = \mathsf{A}\boldsymbol{y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow\ \mathsf{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\mathsf{A}\boldsymbol{x} + \beta\mathsf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$,

Standardní afinní prostor

Podprostory

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} = \mathsf{A}\boldsymbol{y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathsf{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\mathsf{A}\boldsymbol{x} + \beta\mathsf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$,
tedy množina řešení homogenního systému tvoří vektorový prostor.

Standardní afinní prostor

Podprostory

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} = \mathsf{A}\boldsymbol{y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathsf{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\mathsf{A}\boldsymbol{x} + \beta\mathsf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$,
tedy množina řešení homogenního systému tvoří vektorový prostor.

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Standardní afinní prostor

Podprostory

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} = A\boldsymbol{y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow\ A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha A\boldsymbol{x} + \beta A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$,
tedy množina řešení homogenního systému tvoří vektorový prostor.

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{y} \Rightarrow\ A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$,

Standardní afinní prostor

Podprostory

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} = \mathsf{A}\boldsymbol{y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow\ \mathsf{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\mathsf{A}\boldsymbol{x} + \beta\mathsf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$,
tedy množina řešení homogenního systému tvoří vektorový prostor.

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \mathsf{A}\boldsymbol{y} \Rightarrow\ \mathsf{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x} - \mathsf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$,
tedy množina řešení nehomogenního systému jsou prvky afinního prostoru, jehož zaměřením je vektorový prostor řešení homogenního systému.

Standardní afinní prostor

Podprostory

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} = \mathsf{A}\boldsymbol{y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \ \mathsf{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\mathsf{A}\boldsymbol{x} + \beta\mathsf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$,
tedy množina řešení homogenního systému tvoří vektorový prostor.

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \mathsf{A}\boldsymbol{y} \Rightarrow \ \mathsf{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x} - \mathsf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$,
tedy množina řešení nehomogenního systému jsou prvky afinního prostoru, jehož zaměřením je vektorový prostor řešení homogenního systému.

$\operatorname{rank} \mathsf{A} = k \leq n$. Pak

$$\{\boldsymbol{x} : \ \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

je podprostor dimenze k standardního afinního prostoru.
$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ... *implicitní popis afinního podprostoru*

Standardní afinní prostor

Podprostory

$$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} = \mathrm{A}\boldsymbol{y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\mathrm{A}\boldsymbol{x} + \beta\mathrm{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$,
tedy množina řešení homogenního systému tvoří vektorový prostor.

$$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \mathrm{A}\boldsymbol{y} \Rightarrow \mathrm{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathrm{A}\boldsymbol{x} - \mathrm{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$,
tedy množina řešení nehomogenního systému jsou prvky afinního prostoru, jehož zaměřením je vektorový prostor řešení homogenního systému.

$\operatorname{rank} \mathrm{A} = k \leq n$. Pak

$$\{\boldsymbol{x} : \mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

je podprostor dimenze k standardního afinního prostoru.
$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ... *implicitní popis afinního podprostoru*

Je-li $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ báze prostoru řešení rovnice $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{\beta}$ je nějaké řešení rovnice $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, pak parametrický popis afinního podprostoru je

$$\left\{\boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^{k} s_i\boldsymbol{v}_i : s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Standardní afinní prostor

Afinní kombinace a konvexní množiny

Standardní afinní prostor

Afinní kombinace a konvexní množiny

Afinní kombinace bodů $\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$:

$$\boldsymbol{a_0} + \sum_{i=1}^{k} t_i(\boldsymbol{a_i} - \boldsymbol{a_0}) = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i\right)\boldsymbol{a_0} + \sum_{i=1}^{k} t_i\boldsymbol{a_i} = \sum_{i=0}^{k} t_i\boldsymbol{a_i},$$

přitom $\sum\limits_{i=0}^{k} t_i = 1$.

Standardní afinní prostor

Afinní kombinace a konvexní množiny

Afinní kombinace bodů $\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$:

$$\boldsymbol{a_0} + \sum_{i=1}^{k} t_i(\boldsymbol{a_i} - \boldsymbol{a_0}) = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i\right)\boldsymbol{a_0} + \sum_{i=1}^{k} t_i\boldsymbol{a_i} = \sum_{i=0}^{k} t_i\boldsymbol{a_i},$$

přitom $\sum\limits_{i=0}^{k} t_i = 1$.

Afinní obal bodů $\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$:

$$\langle \boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k} \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i\boldsymbol{a_i} : t_0, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \right\}.$$

Standardní afinní prostor

Afinní kombinace a konvexní množiny

Konvexní množina v $\mathbb{R}^n$: $M \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M \;\Rightarrow\; (\forall t \in [0,1])\, \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \in M,$$

tj. $(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \in M$.

Je-li M konečná, $\mathcal{K}(M)$ – *konvexní mnohostěn*.

Standardní afinní prostor

Afinní kombinace a konvexní množiny

Konvexní množina v $\mathbb{R}^n$: $M \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M \;\Rightarrow\; (\forall t \in [0,1])\, \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \in M,$$

tj. $(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \in M$.

Konvexní obal množiny M:

$$\mathcal{K}(M) = \cap\{N : N \subseteq M \text{ konvexní}\} =$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{\omega} t_i \boldsymbol{x_i} : \omega \in \mathbb{N}, \omega > 0,\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \ldots, t_\omega \geq 0, \sum_{i=1}^{\omega} t_i = 1,\ \boldsymbol{x_i} \in M \right\}.$$

Je-li M konečná, $\mathcal{K}(M)$ – *konvexní mnohostěn.*

Standardní afinní prostor

Afinní kombinace a konvexní množiny

Konvexní množina v $\mathbb{R}^n$: $M \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M \;\Rightarrow\; (\forall t \in [0,1])\, \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \in M,$$

tj. $(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \in M$.

Konvexní obal množiny M:

$$\mathcal{K}(M) = \cap\{N:\; N \subseteq M \text{ konvexní}\} =$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{\omega} t_i \boldsymbol{x_i} :\; \omega \in \mathbb{N}, \omega > 0,\; t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \ldots, t_\omega \geq 0, \sum_{i=1}^{\omega} t_i = 1,\; \boldsymbol{x_i} \in M \right\}.$$

Je-li M konečná, $\mathcal{K}(M)$ – *konvexní mnohostěn.*

Jsou-li body $\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$ v obecné poloze, pak

$$\mathcal{K}(\{\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k}\})$$

se nazývá *k-rozměrný simplex.*

Euklidovský prostor

$$\Big(\mathbb{R}^n, \big((\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1), (\mathbb{R}^n, +, \boldsymbol{o}), \cdot, (\,\cdot\,, \,\cdot\,)\big), +\Big)$$

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$.

Euklidovský prostor

$$\Big(\mathbb{R}^n, \big((\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1), (\mathbb{R}^n, +, \boldsymbol{o}), \cdot, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big), +\Big)$$

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$.

Kartézská souřadná soustava:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n),$$

kde $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je orthonormální báze $\mathbb{R}^n$.

Euklidovský prostor
Podprostory

Převod parametrického popisu podprostoru na implicitní:

$$\mathcal{Q} = \left\{ \boldsymbol{q} + \sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{v_i} \,:\, t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Euklidovský prostor
Podprostory

Převod parametrického popisu podprostoru na implicitní:

$$\mathcal{Q} = \left\{ \boldsymbol{q} + \sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{v_i} :\ t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R} \right\}$$

$(\boldsymbol{v_{k+1}}, \boldsymbol{v_{k+2}}, \dots, \boldsymbol{v_n})$ orthogonální báze $\mathcal{Q}^\perp$, tj.

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, k\})(\forall j \in \{k+1, k+2, \dots, n\})\, \boldsymbol{v_i}^T \boldsymbol{v_j} = 0.$$

Euklidovský prostor
Podprostory

Převod parametrického popisu podprostoru na implicitní:

$$\mathcal{Q} = \left\{ \boldsymbol{q} + \sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{v_i} : \ t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R} \right\}$$

$(\boldsymbol{v_{k+1}}, \boldsymbol{v_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{v_n})$ orthogonální báze $\mathcal{Q}^\perp$, tj.

$$(\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\})(\forall j \in \{k+1, k+2, \ldots, n\})\, \boldsymbol{v_i}^T \boldsymbol{v_j} = 0.$$

Pak

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v_{k+1}}^T \\ \boldsymbol{v_{k+2}}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{v_n}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v_{k+1}}^T \\ \boldsymbol{v_{k+2}}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{v_n}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{q}$$

je implicitní popis podprostoru.

Euklidovský prostor
Vzdálenosti

Euklidovský prostor
Vzdálenosti
Vzdálenost bodů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})} = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

Euklidovský prostor

Vzdálenosti

Vzdálenost bodů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})} = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

Vzdálenost bodu $\boldsymbol{a}$ od podprostoru $\mathcal{Q}$:

Euklidovský prostor

Vzdálenosti

Vzdálenost bodů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})} = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

Vzdálenost bodu $\boldsymbol{a}$ od podprostoru $\mathcal{Q}$:

$(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_k})$ …báze zaměření podprostoru $\mathcal{Q}$,
$(\boldsymbol{v_{k+1}}, \boldsymbol{v_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{v_n})$ …báze $Z(\mathcal{Q})^\perp$,
$\boldsymbol{b} = \mathcal{Q} \cap \left\{ \boldsymbol{a} + \sum_{i=k+1}^{n} t_i \boldsymbol{v_i} \right\}$

$$\varrho(\boldsymbol{a}, \mathcal{Q}) = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

Euklidovský prostor

Vzdálenosti

Vzdálenost bodů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})} = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

Vzdálenost bodu $\boldsymbol{a}$ od podprostoru $\mathcal{Q}$:

$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ …báze zaměření podprostoru $\mathcal{Q}$,
$(\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ …báze $Z(\mathcal{Q})^{\perp}$,
$\boldsymbol{b} = \mathcal{Q} \cap \left\{\boldsymbol{a} + \sum\limits_{i=k+1}^{n} t_i \boldsymbol{v}_i\right\}$

$$\varrho(\boldsymbol{a}, \mathcal{Q}) = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

Vzdálenost dvou podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$:

Euklidovský prostor

Vzdálenosti

Vzdálenost bodů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})} = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

Vzdálenost bodu $\boldsymbol{a}$ od podprostoru $\mathcal{Q}$:

$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ ... báze zaměření podprostoru $\mathcal{Q}$,
$(\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ ... báze $Z(\mathcal{Q})^\perp$,
$\boldsymbol{b} = \mathcal{Q} \cap \left\{ \boldsymbol{a} + \sum\limits_{i=k+1}^{n} t_i \boldsymbol{v}_i \right\}$

$$\varrho(\boldsymbol{a}, \mathcal{Q}) = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|.$$

Vzdálenost dvou podprostorů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$:

Zvolíme body $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$, $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$,
$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$,
$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_1 \in \big(Z(\mathcal{P}), Z(\mathcal{Q})\big)$, $\boldsymbol{w}_2 \in \big(Z(\mathcal{P}), Z(\mathcal{Q})\big)^\perp$,

$$\varrho(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \|\boldsymbol{w}_2\|.$$

Euklidovský prostor

Odchylky

Euklidovský prostor

Odchylky

Odchylka vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$:

$$\cos\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}, \quad 0 \leq \varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) < 2\pi.$$

Euklidovský prostor
Odchylky

Odchylka vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$:

$$\cos\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}, \quad 0 \le \varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) < 2\pi.$$

Kosinová věta:

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).$$

Euklidovský prostor

Odchylky

Odchylka vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$:

$$\cos\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}, \quad 0 \le \varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) < 2\pi.$$

Kosinová věta:

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).$$

Věta o směrových vektorech:

$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ ... orthonormální báze $\mathbb{R}^n$,

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{e}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \big(\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{e}_i\|\cos\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_i)\big)^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 \sum_{i=1}^n \big(\cos\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_i)\big)^2,$$

$$1 = \sum_{i=1}^n \big(\cos\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{e}_i)\big)^2.$$

Euklidovský prostor

Odchylky

Odchylka dvou vektorových podprostorů $U, W \subseteq \big(\mathbb{R}, V, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big)$, $\dim U \geq 1$, $\dim W \geq 1$

Euklidovský prostor

Odchylky

Odchylka dvou vektorových podprostorů $U, W \subseteq \big(\mathbb{R}, V, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big)$, $\dim U \geq 1$, $\dim W \geq 1$:

$$\alpha = \varphi(U, W) \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

Euklidovský prostor

Odchylky

Odchylka dvou vektorových podprostorů $U, W \subseteq \big(\mathbb{R}, V, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big)$, $\dim U \geq 1$, $\dim W \geq 1$:

$$\alpha = \varphi(U, W) \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

1. $\dim U = 1 = \dim W$, $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$:

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}|}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{w}\|}.$$

Euklidovský prostor

Odchylky

Odchylka dvou vektorových podprostorů $U, W \subseteq \big(\mathbb{R}, V, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big)$, $\dim U \geq 1$, $\dim W \geq 1$:

$$\alpha = \varphi(U, W) \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

1. $\dim U = 1 = \dim W$, $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$:
$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}|}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{w}\|}.$$
2. $U \subseteq W$ nebo $W \subseteq U$: $\alpha = 0$.

Euklidovský prostor

Odchylky

Odchylka dvou vektorových podprostorů $U, W \subseteq \big(\mathbb{R}, V, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big)$, $\dim U \geq 1$, $\dim W \geq 1$:

$$\alpha = \varphi(U, W) \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

1. $\dim U = 1 = \dim W$, $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$:
$$\cos \alpha = \frac{|\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{w}|}{\|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{w}\|}.$$
2. $U \subseteq W$ nebo $W \subseteq U$: $\alpha = 0$.
3. $\dim U > 1$ nebo $\dim W > 1$, $U \cap W = \{\boldsymbol{o}\}$:
$$\alpha = \min \left\{\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) :\ \boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{w} \in W\right\}.$$

Euklidovský prostor

Odchylky

Odchylka dvou vektorových podprostorů $U, W \subseteq \big(\mathbb{R}, V, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big)$, $\dim U \geq 1$, $\dim W \geq 1$:

$$\alpha = \varphi(U, W) \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

1. $\dim U = 1 = \dim W$, $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$:
$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}|}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{w}\|}.$$
2. $U \subseteq W$ nebo $W \subseteq U$: $\alpha = 0$.
3. $\dim U > 1$ nebo $\dim W > 1$, $U \cap W = \{\boldsymbol{o}\}$:
$$\alpha = \min\left\{\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) :\ \boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{w} \in W\right\}.$$
4. $U \cap W \neq \{\boldsymbol{o}\}$, $U \neq U \cap W \neq W$:
$$\alpha = \varphi\big(U \cap (U \cap W)^{\perp}, W \cap (U \cap W)^{\perp}\big).$$

Euklidovský prostor
Odchylky

Odchylka dvou vektorových podprostorů $U, W \subseteq \big(\mathbb{R}, V, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big)$, $\dim U \geq 1$, $\dim W \geq 1$:

$$\alpha = \varphi(U, W) \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

1. $\dim U = 1 = \dim W$, $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$:
$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}|}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{w}\|}.$$
2. $U \subseteq W$ nebo $W \subseteq U$: $\alpha = 0$.
3. $\dim U > 1$ nebo $\dim W > 1$, $U \cap W = \{\boldsymbol{o}\}$:
$$\alpha = \min\left\{\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) : \boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{w} \in W\right\}.$$
4. $U \cap W \neq \{\boldsymbol{o}\}$, $U \neq U \cap W \neq W$:
$$\alpha = \varphi\big(U \cap (U \cap W)^\perp, W \cap (U \cap W)^\perp\big).$$

Odchylka dvou afinních podprostorů – odchylka jejich zaměření.

MASARYKOVA UNIVERZITA