Determinanty

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_N} (-1)^{\pi(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

kde Σ_N je množina všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$,
tj. množina bijekcí $N \to N$;
$\pi(\sigma)$ je počet inverzí v permutaci σ.

Příklad:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Věta o rozvoji determinantu (Laplace):

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je libovolný index,

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & a_{1,j+2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & a_{2,j+2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & a_{i-1,j+2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,j+2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i+2,1} & a_{i+2,2} & \cdots & a_{i+2,j-1} & a_{i+2,j+1} & a_{i+2,j+2} & \cdots & a_{i+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & a_{n,j+2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

je matice, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Příklad:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

1. Nechť $b_{ij} = \begin{cases} a_{i,j}, & i \neq k \\ ca_{k2}, & \text{jinak} \end{cases}$,
   tj. matice B vznikne z matice A vynásobením k-tého řádku číslem c. Pak $\det B = c \det A$.

   D.: $\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_N} (-1)^{\pi(\sigma)} \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{i,\sigma(i)} \right) c a_{k,\sigma(k)} \left(\prod_{i=k+1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right) = c \sum_{\sigma \in \Sigma_N} (-1)^{\pi(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

2. Nechť jeden řádek v matici A je nulový. Pak $\det A = 0$.

   D.: To je speciální případ předchozího tvrzení s $c = 0$

3. Nechť pro všechny indexy j a nějaké dva indexy i, k je $a_{ij} = a_{kj}$, tj. v matici A jsou dva řádky shodné. Pak $\det A = 0$.

   D.: Nechť $a_{kj} = a_{rj}$ pro $k < r$. Pak součet $n!$ sčítanců definujících determinant lze rozepsat jako součet $\frac{1}{2} n!$ dvojic sčítanců

$$(-1)^{\pi(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} + (-1)^{\pi(\tilde{\sigma})} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tilde{\sigma}(i)}.$$

Přitom permutace

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & r & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k & \cdots & i_r & \cdots & i_n \end{pmatrix}, \tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & r & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r & \cdots & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

se zřejmě liší o jednu inverzi; sčítanci tedy mají stejnou absolutní hodnotu a liší se znaménkem.

4. Nechť $a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$, $b_{ij} = a_{ij}$ a $c_{ij} = a_{ij}$ pro $j \neq k$. Pak $\det A = \det B + \det C$, tj.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ a_{k+2,1} & a_{k+2,2} & \cdots & a_{k+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ a_{k+2,1} & a_{k+2,2} & \cdots & a_{k+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ a_{k+2,1} & a_{k+2,2} & \cdots & a_{k+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

D.: $$\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_N} (-1)^{\pi(\sigma)} \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{i,\sigma(i)} \right) \left(b_{k,\sigma(k)} + c_{k,\sigma(k)} \right) \left(\prod_{i=k+1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \Sigma_N} (-1)^{\pi(\sigma)} \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{i,\sigma(i)} \right) b_{k,\sigma(k)} \left(\prod_{i=k+1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right) + \sum_{\sigma \in \Sigma_N} (-1)^{\pi(\sigma)} \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{i,\sigma(i)} \right) c_{k,\sigma(k)} \left(\prod_{i=k+1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right)$$

5. Nechť
$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq k, \\ a_{kj} + c a_{pj} & i = k \end{cases}$$
pro nějaké indexy $k \neq p$, tj. matice B vznikla z matice A přičtením c-násobku p-tého řádku ke k-tému řádku. Pak $\det B = \det A$.

   D.: Přímo plyne z tvrzení 1., 3. a 4.

6. Nechť
$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & p \neq i \neq k, \\ a_{rj}, & i = k \\ a_{kj}, & i = r \end{cases}$$
pro nějaké indexy $k \neq p$, tj. matice B vznikla z matice A přehozením r-tého a k-tého řádku. Pak $\det B = -\det A$.

   D.: $\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_N} (-1)^{\pi(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, $\det B = \sum_{\tilde{\sigma} \in \Sigma_N} (-1)^{\pi(\tilde{\sigma})} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tilde{\sigma}(i)}$ a permutace σ, $\tilde{\sigma}$ se liší „o jednu inverzi“, viz důkaz tvrzení 3. V součtech se tedy vyskytují sčítanci se stejnou absolutní hodnotou a opačnými znaménky.

7. Je-li matice A trojúhelníková, pak $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

8. $\det A = \det A^{\mathsf{T}}$.

D.: Členy determinantu matice A jsou $(-1)^s a_{i,i_1} a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n}$, kde s je počet inverzí v permutaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

Členy determinantu matice A^{T} jsou $(-1)^t a_{i,i_1} a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n}$, kde t je počet inverzí v permutaci

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Avšak evidentně je $s = t$.

Tvrzení 3., 5., 6. a 7. poskytují efektivní metodu výpočtu determinantu.

Z tvrzení 8. plyne, že platí analogická tvrzení pro sloupce.

Cauchyova věta: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
D.:

$$H = \begin{pmatrix} B^{\mathsf{T}} & O \\ -E & A \end{pmatrix}, \qquad \det H = \det B^{\mathsf{T}} \cdot \det A = \det A \cdot \det B.$$

Položíme

$$k_{ij} = h_{ij}, \qquad k_{i,n+j} = h_{i,n+j} + \sum_{p=1}^{n} a_{ip} h_{jp} \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, 2n,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Pak je $\det K = \det H$, neboť ke sloupci matice jsme přičítali konečné množství násobků jiných sloupců.
Dále pro $i \leq n$ je

$$k_{i,n+j} = 0 + \sum_{p=1}^{n} a_{ip} h_{jp} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$$

a pro $i > n$ je

$$k_{i,n+j} = b_{ij} - \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \delta_{jp} = a_{ij} - a_{ij} = 0.$$

Tedy

$$K = \begin{pmatrix} B^{\mathsf{T}} & A \cdot B \\ -E & O \end{pmatrix}, \qquad \det K = \det(A \cdot B).$$

MASARYKOVA UNIVERZITA