1. domácí úkol – MIN101 – podzim 2021 – odevzdat do **4.10.2021**

1. Vyřešte následující rovnici pro $x \in \mathbb{C}$: $(x+i)^3 = 1$.
2. Vyřešte následující rovnici pro $x \in \mathbb{C}$: $x^4 + 2x^2 = -4$.
3. Najděte polynom tvaru $x^p = z$, $z \in \mathbb{C}$ co nejnižšího stupně p tak, aby tento polynom měl kořeny $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ a $x_2 = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}$. (Tedy úkolem je určit p a z.)

Řešení:

1. Rovnice $z^3 = 1$ má řešení $z \in \{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$, tedy $x \in \{1-i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}-2}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}+2}{2}i\}$.
2. Pro $y = x^2$ má rovnice $y^2 + 2y + 4 = 0$ řešení $y = -1 \pm \sqrt{3}i$, tj. potřebujeme vyřešit rovnice $x^2 = -1 \pm \sqrt{3}i$. Dostaneme $x \in \{\pm\sqrt{2}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i), \pm\sqrt{2}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)\}$.
3. Oba kořeny $x_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ a $x_2 = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}$ mají absolutní hodnotu jedna, tj. všechna řešení hledaného polynomu budou ležet na jednotkové kružnici a budou tvořit vrchol pravidelného p-úhelníka. Úhel mezi dvěma vrcholy bude $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{15} = \frac{2\pi}{30}$, tj. $p = 30$. Jelikož
$$x_1^{30} = ((\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6})^3)^{10} = i^{10} = -1,$$
hledaný polynom je tvaru $x^{30} = -1$.