

2. domácí úkol – MIN101 – podzim 2021 – odevzdat do **19.10.2021**

Mějme čtverec $ABCD$, kde $A = [-6, 2]$ a $C = [0, 6]$, přičemž AC je jeho úhlopříčka. Dále uvažme přímku

$$p : x + ay - 10 = 0$$

s parametrem $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka p rozdělila čtverec $ABCD$ na dvě části stejného obsahu.
- (b) Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka p rozdělila čtverec $ABCD$ na dvě části stejného obvodu.
- (c) Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka p protнула dvě sousední strany čtverce $ABCD$ pod stejným úhlem.

Řešení: Lehce dopočítáme, že $B = [-1, 1]$ a $D = [-5, 7]$. Přímka p prochází bodem $[10, 0]$ a prochází bodem A pro $a = 8$, bodem B pro $a = 11$, bodem C pro $a = \frac{5}{3}$ a bodem D pro $a = \frac{15}{7}$. Tedy nás zajímá $a \in [\frac{5}{3}, 11]$, ale z obrázku (nakreslete si ho) je vidět, že pro části (a) a (b) se můžeme omezit na $p \in [\frac{15}{7}, 8]$. Též je vidět, že v obou těchto případech dostaneme stejnou hodnotu a .

- (a,b) Potřebujeme průsečíky přímky p se stranami AD a BC , výpočtem zjistíme, že to jsou body

$$[-6, 2] + \frac{-2a+16}{5a+1}(1, 5) \quad \text{a} \quad [-1, 1] + \frac{-a+11}{5a+1}(1, 5).$$

Délka strany čtverce je $\sqrt{26}$, pro stejný obsah či obvod obou částí tedy potřebujeme

$$\left\| \frac{-2a+16}{5a+1}(1, 5) \right\| = \sqrt{26} - \left\| \frac{-a+11}{5a+1}(1, 5) \right\|,$$

z čehož spočteme $a = \frac{13}{4} \in [\frac{15}{7}, 8]$.

- (c) Směrový vektor přímky p je $(a, -1)$, tedy podmínka stejných úhlů nám říká, že

$$\frac{|((a, -1), (1, 5))|}{\|(a, -1)\| \cdot \|(1, 5)\|} = \frac{|((a, -1), (-5, 1))|}{\|(a, -1)\| \cdot \|(-5, 1)\|}.$$

Toto má dvě řešení $a \in \{\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\}$, která ale neleží v intervalu $[\frac{5}{3}, 11]$. Tedy úloha nemá řešení.