3. domácí úkol – MIN101 – podzim 2021 – odevzdat do **12.11.2021**

Nechť M je množina všech kružnic v rovině, které protínají osu y. Zadáme-li kružnici se středem $[x, y]$ a poloměrem r jako trojici (x, y, r), pak

$$M = \{(x, y, r) \mid x, y, r \in \mathbb{R}, r \geq |x|\}.$$

Na množině M uvažujme relaci ρ danou vztahem $(a_1, b_1, r_1)\rho(a_2, b_2, r_2)$

$$(a_1, b_1, r_1)\rho(a_2, b_2, r_2) \iff r_1^2 - r_2^2 = a_1^2 - a_2^2.$$

Ukažte, že se jedná o relaci ekvivalence a geometricky popište rozklad množiny M na třídy ekvivalence.

Geometrickým popisem rozumíme popis pomocí vlastností, které využívají pojmy jako jsou body, přímky, kružnice, vzdálenosti, úhly, obsahy apod.

Řešení: Po úpravě

$$(a_1, b_1, r_1)\rho(a_2, b_2, r_2) \iff r_1^2 - a_1^2 = r_2^2 - a_2^2$$

se lehce ukáže, že ρ je ekvivalence. Třída rozkladu $[(a_1, b_1, r_1)]_\rho$ je plně určena hodnotou $c := r_1^2 - a_1^2 \geq 0$, tj. množina M/ρ je bijektivní s $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Pro popis třídy $[(a_1, b_1, r_1)]_\rho$ potřebujeme zjistit, které kružnice (x, y, r) splňují $r^2 - x^2 = c$. Z obrázku (a po chvíli přemýšlení) se zjistí, že kružnice (x, y, r) protíná osu y v bodech, jejichž vzdálenost je $2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{c}$. Tedy M/ρ je rozklad množiny M na třídy kružnic, jejichž průnik s osou y je úsečka stejné délky.