4. domácí úkol – MIN101 – podzim 2021 – odevzdat do **29.11.2021**

V prostoru $\mathbb{R}^4$ uvažme vektory

$$v_1 = (1, -1, 0, 0), \quad v_2 = (1, 1, 2, 2), \quad v_3 = (1, 1, 1, -1), \quad v_4 = (2, 2, -1, -1)$$

a lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, které splňuje

$$\varphi(v_1) = v_2, \quad \varphi(v_2) = v_3, \quad \varphi(v_3) = v_4, \quad \varphi(v_4) = v_1.$$

(a) Určete vlastní čísla a vektory zobrazení φ. Dále napište $\mathbb{R}^4$ jako přímý součet vlastních podprostorů dimenze nejvýše 2.

(b) Určete vlastní čísla a vektory zobrazení $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$. Dále zobrazení φ^2 popište geometricky.

(c) Určete obraz $\varphi^{222}(v_1)$.

Geometrickým popisem rozumíme popis pomocí vlastností, které využívají pojmy jako jsou přímky, roviny, vektorové podprostory a dále, symetrie, kolmé projekce, rotace apod.

Řešení:

(a) Přímo z zadání zobrazení φ lehce uhodneme, že $u_1 := v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ je vlastní vektor s vlastním číslem 1 a $u_2 := v_1 - v_2 + v_3 - v_4$ je vlastní vektor s vlastním číslem -1. Obecněji, v bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ máme

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

U této (ortogonální) matice lehce spočteme vlastní čísla ± 1 a $\pm i$ a najdeme vlastní vektory $(u_1)_\alpha = (1, 1, 1, 1)$ a $(u_2)_\alpha = (1, -1, 1, -1)$; další jednorozměrné vlastní podprostory zobrazení φ nemá. Lze určit komplexní vlastní vektory pro $\pm i$ a následně najít reálnou bázi tohoto dvourozměrného podprostoru. Alternativně lze využít ortogonality matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ a použít ortogonální doplněk k vektorům $(1, 1, 1, 1)$ a $(1, -1, 1, -1)$. Tento je generovaný např. vektory

$$(1, 0, -1, 0) =: (u_3)_\alpha \quad \text{a} \quad (0, 1, 0, -1) =: (u_4)_\alpha,$$

tj. $u_3 = v_1 - v_3$ a $u_4 = v_2 - v_4$. Tedy

$$\mathbb{R}^4 = \langle v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \rangle \oplus \langle v_1 - v_2 + v_3 - v_4 \rangle \oplus \langle v_1 - v_3, v_2 - v_4 \rangle.$$

(b) Rovnou vidíme, že φ^2 má vlastní vektory $w_1 = v_1 + v_3$ a $w_2 = v_2 + v_4$ s vlastním číslem 1 a vlastní vektory $w_3 = v_1 - v_3$ a $w_4 = v_2 - v_4$ s vlastním číslem -1. Alternativně lze začít s maticí

$$(\varphi^2)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a najít její vlastní vektory

$$(1,0,1,0) = (w_1)_\alpha, \quad (0,1,0,1) = (w_2)_\alpha, \quad (1,0,-1,0) = (w_3)_\alpha, \quad (0,1,0,-1) = (w_4)_\alpha.$$

Zobrazení φ^2 je tedy symetrií podle dvourozměrého podprostoru $\langle w_1, w_2 \rangle$.

(c) Z předchozího vidíme, že $v_1 = \frac{1}{2}(w_1 + w_3)$. Tedy

$$\varphi^{222}(v_1) = \varphi^{222}(\tfrac{1}{2}(w_1 + w_3)) = \tfrac{1}{2}\big[(\varphi^2)^{111}(w_1) + (\varphi^2)^{111}(w_3)\big] = \tfrac{1}{2}\big[w_1 - w_3\big] = v_3.$$