5. domácí úkol – MIN101 – podzim 2021 – odevzdat do **24.12.2021**

V prostoru $\mathbb{R}^4$ uvažme přímky

$$p_1 = [1, 2, 0, -1] + r_1(1, 1, 2, 0) \quad \text{a} \quad p_2 = [0, 3, -1, 2] + r_2(-1, 0, -1, 1)$$

a dále body

$$A = [2, 3, 1, a] \quad \text{a} \quad B = [1, b, 2b, -5]$$

s parametry $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby existovala příčka q mimoběžek p_1 a p_2 procházející bodem A. Dále pro všechy takové parametry a určete průnik příčky s přímkami p_1 a p_2, tj. body $P_1 := p_1 \cap q$ a $P_2 := p_2 \cap q$.

(b) Určete $b \in \mathbb{R}$ tak, aby existovala příčka q mimoběžek p_1 a p_2 procházející bodem B. (Zde není nutné určovat průsečíky příčky s přímkami p_1 a p_2, ale odpověď je třeba zdůvodnit.)

V částech (a) i (b) může existovat jedno, více nebo naopak žádné řešení. Je-li řešení více, najděte všechna z nich.

Řešení: Přímky p_1 a p_2 určují nadrovinu $\sigma := p_1 + p_2$, ve které body A a B nutně musí ležet. Standardním výpočtem se zjistí, že σ je určena rovnicí $-2x_2 + x_3 + x_4 + 5 = 0$.

(a) Dosazením bodu A do rovnice pro σ se zjistí, že $a = 0$. Lehce se zjistí, že $A \in p_2$, tedy $P_2 = A$ a za P_1 lze zvolit kterýkoliv bod na bod na p_1.

(b) Dosazením bodu B do rovnice pro σ se zjistí, že $B \in \sigma$ pro každé $b \in \mathbb{R}$. Tedy genericky existovat příčka bude, ale ne vždy – příčka nebude existovat, jestliže buď $p_1 + B \,||\, p_2$ nebo $p_2 + B \,||\, p_1$. V prvním případě generují vektory $(1, 1, 2, 0)$, $(-1, 0, -1, 1)$ a $B - [1, 2, 0, -1] = (0, b-2, 2, b-4)$ dvoudimenzionální podprostor, z čehož se dopočítá $b = -2$. V druhém případě generují vektory $(1, 1, 2, 0)$, $(-1, 0, -1, 1)$ a $B - [0, 3, -1, 2] = (1, b-3, 2b+1, -7)$ dvoudimenzionální podprostor, z čehož se dopočítá $b = -3$. Tedy příčka procházející bodem B existuje pro každé $b \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$.