

4. domácí úkol – MIN101 – podzim 2022 – odevzdat do **9.12.2022**

Uvažujme následující příklad jako Leslieho model růstu.

Pan Kočka chová myši. Má je rozdělené do tří skupin podle věku: v první skupině jsou nejmladší myši ve věku do 1 měsíce, v druhé skupině má myši ve věku 1-2 měsíce a ve třetí skupině má myši ve věku 2-3 měsíce. Myši starší než tři měsíce prodává farmaceutické firmě na testování kosmetiky. Pan Kočka dlouhodobým pozorováním porodnosti a úmrtnosti zjistil následující údaje. Během každého měsíce zemře polovina ve skupině nejmladších myší, ale myši ve věkové skupině 1-2 měsíce jsou odolnější a všechny přežijí. Dále myši v nejmladší skupině mají porodnost $1/2$ (vzhledem k počtu myší v této skupině), ve věkové skupině 1-2 měsíce mají pětinásobnou porodnost (vzhledem k počtu myší v této skupině) a ve věkové skupině 2-3 měsíce mají dvojnásobnou porodnost (vzhledem k počtu myší v této skupině).

- Po dlouhodobém vývoji populace pan Kočka jednou ráno spočítal, že má celkem 11000 myší (ve všech věkových skupinách). Kolik z nich je v nejmladší věkové skupině do 1 měsíce?
- Předpokládejme, že chov začal s populací 12 myší do jednoho měsíce, 0 myší ve věku 1-2 měsíce a 3 myši ve věku 2-3 měsíce. Kolik bude mít pan Kočka celkově myší po 100 měsících? (*Nápověda: počáteční populaci si vyjádřete jako lineární kombinaci vlastních vektorů matice Leslieho modelu.*)

Řešení: Uvažujeme-li skupiny myší v pořadí (0-1 měsíc, 1-2 měsíce, 2-3 měsíce), má tento Leslieho model matici

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato matice vlastní čísla $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ a $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$, příslušné vlastní vektory jsou

$$v_1 = (8, 2, 1), \quad v_2 = (2, -1, 1) \quad \text{a} \quad v_3 = (1, -1, 2).$$

Lehce se vidí, že matice L je primitivní a dominantní vlastní číslo je 2.

- Struktura chovu se dlouhodobě blíží poměru $8 : 2 : 1$ podle vektoru v_1 . Při celkové populaci 11000 to tedy bude populace ve struktuře $(800, 200, 100)$, tj. v nejmladší věkové skupině je 800 myší.
- Zadaná počáteční struktura chovu je dána vektorem

$$w = (12, 0, 3) = v_1 + 2v_2.$$

Po 100 měsících bude struktura chovu dána vektorem

$$L^{100} \cdot w = L^{100} \cdot (v_1 + 2v_2) = 2^{100}v_1 + 2(-1)^{100}v_2 = 2^{100}v_1 + 2v_2.$$

Celkový počet myší je součet složek vektoru $L^{100} \cdot w$, což je

$$2^{100}(8 + 2 + 1) + 2(2 - 1 + 1) = 2^{100} \cdot 11 + 4.$$