1. vnitrosemestrální písemka – MIN101 – podzim 2022 – 1. 11. 2022

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (4.5 bodu) V rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme body A, B, R, počátek O a přímku p,

$$A = [8, 3], \quad B = [2, 5], \quad R = [9, 7], \quad O = [0, 0] \quad \text{a} \quad p : [7, -4] + t(2, 3).$$

a) Určete obsah trojúhelníku ABO.

b) Nechť q je přímka procházející body A a B. Určete průsečík přímek p a q.

c) Určete body C a D tak, aby AB byla strana čtverce $ABCD$, který celý leží v 1. kvadrantu.

d) Určete bod P na úsečce AB, jehož vzdálenost od bodu R je rovna 5.

V částech c) a d) určete všechna řešení, existuje-li jich více.

2. (3.5 bodu) Skupina osmi spolužáků (čtyři dívky a čtyři chlapci) chce jít do kina, mezi nimi jsou Petr, Honza a Eva. V kině si všichni sednou do stejné řady, ve které je osm sedadel. Do sálu přijdou až za tmy, takže se do této řady rozmístí náhodně. Uvažme následující jevy:

- Jev A: Alespoň jeden z dvojice Petr, Honza sedí na krajním sedadle.
- Jev B: Mezi Petrovými sousedy není Honza.
- Jev C: Petr si sedne vedle Evy.
- Jev D: Žádné dvě dívky nesedí vedle sebe.

Určete pravděpodobnost jevů A, B, C a D.

Poznámka : Výsledek stačí napsat pomocí zlomků a faktoriálů, tj. není třeba ho dále upravovat.

3. (2 body) Je dána relace ρ na množině M. Ve všech případech rozhodněte, zda se jedná o relaci ekvivalence. Je-li tomu tak, popište třídy rozkladu množiny M podle relace ρ.

a) $M = \mathbb{R}^2$ a

$$(a, b)\rho(c, d) \iff \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0.$$

b) $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ a

$$(a, b)\rho(c, d) \iff h \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1.$$

c) $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ a

$$(a, b)\rho(c, d) \iff \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Zde $h(\ )$ označuje hodnost matice. Připomeňme, že matice 2x2 má hodnost 1 právě, když po úpravě na schodovitý tvar bude mít pouze jeden řádek.

Řešení a bodování:

1. [4.5 bodu]

a) **[1 bod]** Hledaný obsah S je roven

$$S = |\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OB}\end{pmatrix}| = \frac{1}{2}|\det\begin{pmatrix}8 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}| = \frac{1}{2}|40-6| = 17.$$

b) **[1 bod]** Potřebujeme řešení soustavy

$$[7,-4] + t(2,3) = [8,3] + s(-6,2),$$

což je $t = 2$ a $s = -\frac{1}{2}$. Průsečík je tedy $[7,-4] + 2(2,3) = [11,2]$..

c) **[1.5 bodu]** Platí $\overrightarrow{AB} = (-6,2)$, tedy směr kolmý na $\overrightarrow{AB}$ je dán vektorem $n = (2,6)$, kde $||n|| = ||\overrightarrow{AB}||$. Jelikož AB má být strana čtverce, nutně buď $C = B + n$ a $D = A + n$ nebo $C = B - n$ a $D = A - n$ (rozmyslete si obrázek!). V prvním případě máme

$$C = [2,5] + (2,6) = [4,11] \quad \text{a} \quad D = [8,3] + (2,6) = [10,9],$$

a tedy všechny body A, B, C i D leží v 1. kvadrantu, [0.1b]. V druhém případě máme $D = [8,3] - (2,6) = [6,-3]$, tj. bod D by se ocitl mimo 1. kvadrant. Existuje tedy jediné řešení.

d) **[1 bod]** Bod P je tvaru $P = [8,3] + r(-6,2)$, kde $0 \le r \le 1$, [0.1b], přičemž chceme $||\overrightarrow{RP}|| = 5$. Tedy

$$5 = ||\overrightarrow{RP}|| = ||(-1-6r, -4+2r)|| = \sqrt{(-1-6r)^2 + (-4+2r)^2} = \sqrt{40r^2 - 4r + 17}.$$

Toto vede na rovnici $10r^2 - r - 2 = 0$, [0.1b], která má kořeny $\frac{1}{2}$ a $-\frac{2}{5}$. Pouze řešení $\frac{1}{2}$ vyhovuje podmínce $0 \le \frac{1}{2} \le 1$, tedy jediným řešením je bod $P = [8,3] + \frac{1}{2}(-6,2) = [5,4]$.

2. [3.5 bodu] Jev A, **[1 bod]:** Pro případ, kdy Petr a Honza sedí na krajních sedadlech, existuje $2(8-2)!$ možností. Případů, kde právě jeden z dvojice Honza, Martin je na krajním sedadle, je $4\cdot 6\cdot 6!$. Tedy

$$P(A) = \frac{2\cdot 6! + 4\cdot 6\cdot 6!}{8!} = \frac{13}{28}.$$

J ev B, **[1 bod]:** Sedí-li Petr na jednom z krajních sedadel, pak je $6\cdot 6!$ možností. Sedí-li Petr na některém pevně zvoleném sedadle „uvnitř", máme $6\cdot 5\cdot 5!$. Tedy

$$P(B) = \frac{2\cdot(6\cdot 6!) + 6\cdot(6\cdot 5\cdot 5!)}{8!} = \frac{3}{4}.$$

Jiná úvaha: doplněk B^c jevu B znamená, že Petr a Honza sedí vedle sebe. Tedy $P(B^c) = P(C) = \frac{2\cdot 7\cdot 6!}{8!} = \frac{1}{4}$ (viz úvaha níže).

Jev C, **[0.5 bodu]:** Dvojici Petr + Eva chápeme jako jednu osobu, tedy

$$P(C) = \frac{2\cdot 7!}{8!} = \frac{1}{4}.$$

Jev D, **[1 bod]:** Máme dvě možnosti pro „střídavé" rozmístění CDCDCDCD nebo DCDCDCDC, tedy celkem $2\cdot(4!)^2$ rozesazení. Dále jsou možné případy, kde je právě jedna dvojice sousedních chlapců, např. DCCDCDCD. Pak jsou nutně dívky na krajních sedadlech a pro umístění dvojice sousedních chlapců máme 3 možností. Celkem tedy

$$P(D) = \frac{(2+3)\cdot(4!)^2}{8!} = \frac{1}{14}.$$

2. [2 body]

a) **[0.5 bodu]:** Relace ρ není tranzitivní: např. $(0,0)\rho(1,1)$ a $(0,0)\rho(1,2)$, ale $(1,1)\not\rho(1,2)$.

b) **[1 bod]:** Relace ρ je ekvivalence, přičemž třída rozkladu určená prvkem (a,b) je

$$[(a,b)]_\rho = \{(ka,kb) \mid k \in \mathbb{R}, k \neq 0\},$$

což lze interpretovat jako přímku v rovině procházející počátkem, ze které počátek odstraníme.

c) **[0.5 bodu]:** Relace ρ není reflexivni: např. $(1,1)\not\rho(1,1)$.