2. vnitrosemestrální písemka – MIN101 – podzim 2022 – 7. 12. 2022

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Mějme matici A s parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \\ c & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete parametry a, b, c tak, aby řádky této matice tvořily ortogonální bázi $\mathbb{R}^3$.

b) Určete parametry a, b, c tak, aby matice A měla vlastní vektor $w = (1, 0, 2)$ a zároveň měla nulový determinant.

c) Rozhodněte, zda existují parametry a, b, c takové, že $A = (\psi)_{\alpha,\alpha}$ pro nějakou bázi α, kde lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na přímku procházející počátkem. Připomeňme, že $(\psi)_{\alpha,\alpha}$ označuje matice lineárního zobrazení ψ v bázi α.

2. (5 bodů) Nechť φ je lineární zobrazení prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle přímky p (tj. osová symetrie), přičemž přímka p prochází počátkem a má směrový vektor $(3, 0, -1)$. Určete matici zobrazení φ ve standardní bázi.

Řešení a bodování:

1. [5 bodů]

a) [**1 bod**] Označme řádky matice v_1 (první řádek), v_2 (druhý řádek) a v_3 (třetí řádek). Podmínka ortogonality znamená

$$\langle v_1, v_2\rangle = 1 + 2a = 0, \quad \langle v_1, v_3\rangle = c + 6 = 0, \quad \langle v_2, v_3\rangle = c + 3a + b = 0.$$

Tato soustava rovnic má řešení $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{15}{2}$ a $c = -6$.

b) [**2 body**] Vektor w je vlastní, jestliže $Aw = \lambda w$, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \\ c & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2b \\ c + 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Tři složky poslední rovnosti jsou $\lambda = 1$, $1 + 2b = 0$ a $c + 2 = 2\lambda$. Tedy w je vlastní vektor pro vlastní číslo $\lambda = 1$, což znamená $b = -\frac{1}{2}$ a $c = 0$ (pro libovolné $a \in \mathbb{R}$). Pro tyto hodnoty parametrů spočteme determinant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & -1/2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = a - \frac{1}{2}.$$

Tedy $a = \frac{1}{2}$.

c) [**2 body**] Je-li A matice kolmé projekce na přímku, tak musí mít vlastní číslo 0 s geometrickou násobností 2, tj. matice $A - 0 \cdot E = A$ má hodnost 1. Ekvivalentně, matici A lze řádkovými elementárními úpravami převést na matici, kde jsou dva řádky nulové. Spočteme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \\ c & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a - 2 & b \\ 0 & 3 - 2c & 1 \end{pmatrix},$$

tedy druhý řádek je nulový pro volbu $a = 2$ a $b = 0$, nicméně třetí řádek je vždy nenulový. Parametry a, b, c tedy nelze zvolit tak, aby matice A měla hodnost 1. Proto nelze zvolit parametry tak, aby A byla maticí kolmé projekce na přímku v $\mathbb{R}^3$.

2. [5 bodů] Označme $v_1 = (3, 0, -1)$ směrový vektor přímky p a dále zvolíme dva vektory kolmé k v_1: např. $v_2 = (1, 0, 3)$ a $v_3 = (0, 1, 0)$, [1b za výběr vhodné báze]. V bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ má zobrazení φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

[1b]. Použijeme vztah $(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = (id)_{\epsilon,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\epsilon}$, [0.5b], kde pro matici $(id)_{\epsilon,\alpha}$ máme

$$(id)_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Matice $(id)_{\alpha,\epsilon}$ se určí jako matice inverzní k matici $(id)_{\epsilon,\alpha}$, [0.5b za úvahu], tj.

$$(id)_{\alpha,\epsilon} = \left((id)_{\epsilon,\alpha}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Celkem dostaneme

$$(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

[1b].