1. termín závěrečné zkoušky – MIN101 – podzim 2022 – 3. 1. 2023

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ určete bod $A \in p$ a bod $B \in q$ tak, že přímka procházející body A a B je kolmá k přímkám p a q:

$$p : [5, -3, 8] + r(2, 1, 3), \qquad q : [-3, 9, 7] + s(2, -2, -3).$$

2. (5 bodů) Nechť φ je lineární zobrazení prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je projekcí na rovinu $x + 2y + z = 0$. Určete matici zobrazení φ ve standardní bázi.

3. (5 bodů) Určete explicitní formuli pro posloupnost celých čísel, která je dána následující rekurentní formulí a počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = 4(x_{n+1} - x_n) + 2, \quad x_0 = 2,\ x_1 = 8\,.$$

4. (5 bodů) Velká firma poskytuje všem svým 220 zaměstnancům služební notebook. Díky exkluzivní smlouvě se značkovým dodavatelem se notebooky vždy o prázdninách zkontrolují a notebooky s vážnější závadou nahrazují novými notebooky. Statisticky bylo zjištěno, že z notebooků, které jsou v provozu jeden rok, je závadných 20% a z notebooků, které jsou v provozu dva roky, je závadných 50%.

Firma se nejprve rozhodla, že bude používat každý notebook nejvýše tři roky, tj. po třech letech vyřadí všechny notebooky. Dodavatelská firma tedy nahradí závadné notebooky po jednom a dvou letech a všechny notebooky po třech letech. Určete, jak vypadá věková struktura notebooků ve firmě po dlouhodobém vývoji. Dále určete, kolik lze očekávat, že se notebooků o letošních prázdninách vymění za nové.

Příklad řešte jako úlohu na Leslieho populační model pro populaci notebooků, přičemž dokažte primitivnost použité matice. (Ale poznamenejme, že příklad lze řešit i jako Markovův proces.)

Řešení a bodování

1. **[5 bodů]** Označme $v = (a, b, c)$ směrový vektor $v = \overrightarrow{AB}$. Vektor v je kolmý na vektory $(2, 1, 3)$ a $(2, -2, -3)$, [0.5b]. Podmínky $v \perp (2, 1, 3)$ a $v \perp (2, -2, -3)$ jsou ekvivalentní rovnicím $2a+b+3c = 0$ a $2a-2b-3c = 0$, tedy $v = t(1, 4, -2)$ pro vhodné $t \in \mathbb{R}$, [1b]. Platí $A = [5, -3, 8] + r(2, 1, 3)$ (neboť $A \in p$) a $B = [-3, 9, 7] + s(2, -2, -3)$ (neboť $B \in q$). Jelikož $B = A + t(1, 4, -2)$ (neboť $v = \overrightarrow{AB}$), dostáváme

$$[5, -3, 8] + r(2, 1, 3) + t(1, 4, -2) = [-3, 9, 7] + s(2, -2, -3),$$

což znamená

$$r(2, 1, 3) + t(1, 4, -2) - s(2, -2, -3) = [-8, 12, -1],$$

[1b]. Maticový zápis této soustavy rovnic je

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix},$$

[0.5b], její řešení je $r = -2$, $t = 2$ a $s = 3$, [1b]. Tedy $A = [5, -3, 8] - 2(2, 1, 3) = [1, -5, 2]$, a $B = [-3, 9, 7] + 3(2, -2, -3) = [3, 3, -2]$, [1b].

2. **[5 bodů]** Označme $v_1 = (1, 2, 1)$ normálový vektor roviny a dále zvolíme dva vektory kolmé k v_1: např. $v_2 = (1, -1, 1)$ a $v_3 = (2, -1, 0)$, [1b za výběr vhodné báze]. V bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ má zobrazení φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

[1b]. Použijeme vztah $(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = (id)_{\epsilon,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\epsilon}$, [0,5 bodu], kde pro matici $(id)_{\epsilon,\alpha}$ máme

$$(id)_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Matice $(id)_{\alpha,\epsilon}$ se určí jako matice inverzní k matici $(id)_{\epsilon,\alpha}$, [0.5b za úvahu], tj.

$$(id)_{\alpha,\epsilon} = \left((id)_{\epsilon,\alpha}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

[1b]. Celkem dostaneme

$$(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix},$$

[1b].

3. **[5 bodů]** Charakteristický polynom je $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$, [0.5b], proto $x_n = A2^n + Bn2^n$, $A, B \in \mathbb{R}$ je obecné řešení zhomogenizované rovnice, [1b]. Partikulární řešení nehomogenní rovnice je konstanta 2, tedy obecné řešení zadané rovnice je $x_n = A2^n + Bn2^n + 2$, $A, B \in \mathbb{R}$, [1.5b]. Dále hledáme tyto konstanty tak, aby vyhovovaly počátečním podmínkám $x_0 = A + 2 = 2$ a $x_1 = 2A + 2B + 2 = 8$ (pro $n = 0$) a $2a + 2b = 8$, [1b]. Odtud $A = 0$ a $B = 3$, tj. $x_n = 3n2^n + 2$, [1b].

4. [5 bodů] Matice Leslieho modelu je v tomto případě

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

[1.5b], kde A^4 je pozitivní, tj. A je primitivní, [0.5b]. Dominantní vlastní číslo je 1, což lze ukázat přímým výpočtem nebo úvahou (celková populace dle zadání je stabilní) nebo z toho, že zadaná matice je stochastická, [0.5b]. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 je $v = (5, 4, 2)$, [1b]. Jelikož $5 + 4 + 2 = 11$, rozložení populace notebooků ve firmě s 220 zaměstnanci bude dáno vektorem $\frac{220}{11} v = (100, 80, 40)$. Nových notebooků tedy bude $100 \cdot \frac{1}{5} + 80 \cdot \frac{1}{2} + 40 = 100$, [1.5b].