2. termín zkoušky – MIN101 – podzim 2022 – 24. 1. 2023

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ je dána rovina ρ a přímka π,

$$\rho : [-2,-3,0] + r(1,1,-4) + s(1,-1,0), \qquad \pi : [0,1,2] + t(1,0,1).$$

Dále je dán bod $B = [3,4,5]$ a počátek $O = [0,0,0]$.

a) Najděte nějaký vektor n, který je kolmý na rovinu ρ.

b) Určete parametrický popis roviny σ, která je rovnoběžná s rovinou ρ, přičemž vzdálenost těchto dvou rovin je 6.

c) Rozhodněte, zda bod B leží v rovině ρ.

d) Určete průsečík roviny ρ s osou z.

e) Určete velikost úhlu α, který svírá rovina ρ a přímka π.

2. (5 bodů) Mějme kvadratickou formu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 10x_3^2.$$

a) Určete matici A této kvadratické formy ve standardní bázi.

b) Najděte nějakou polární bázi β kvadratické formy f a napište matici B této formy v bázi β.

c) Rozhodněte, zda je kvadratická forma f pozitivně či negativně definitní či semidefinitní nebo indefinitní (nebo ani jedno z předchozího).

3. (5 bodů) Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Najděte Jordanův kanonický tvar J matice A spolu s transformační maticí P, tj. $A = PJP^{-1}$.

b) Uvažme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $\varphi(v) = B \cdot v$, kde $v \in \mathbb{R}^3$ chápeme jako sloupcový vektor. Rozhodněte, zda existuje báze $\mathbb{R}^3$, ve které má zobrazení φ matici A.

4. (5 bodů) Firma se rozhodla tajně sledovat čas příchodu svých zaměstnanců. Směna začíná v 6:00 a firemní statistik vždy ráno u každého zaměstnance eviduje, jestli přišel buď předčasně (tj. o více než 15 minut před 6:00) nebo včas (o maximálně 15 minut před 6:00) nebo s mírným zpožděním (o maximálně 15 minut po 6:00) nebo s velkým zpožděním (o více než 15 minut po 6:00). Statistik dlouhodobým sledováním zjistil následující údaje.

– Přišel-li některý zaměstnanec v daný den předčasně, pak následující pracovní den přijde s pravděpodobností 1/4 opět předčasně, s pravděpodobností 1/2 včas a s pravděpodobností 1/4 s mírným zpožděním.

- Přišel-li některý zaměstnanec v daný den včas, pak následující pracovní den přijde s pravděpodobností $1/2$ předčasně, s pravděpodobností $1/4$ včas a s pravděpodobností $1/4$ s velkým zpožděním.
- Přišel-li některý zaměstnanec v daný den s mírným zpožděním, pak následující pracovní den přijde s pravděpodobností $1/2$ předčasně, s pravděpodobností $1/4$ včas a s pravděpodobností $1/4$ s velkým zpožděním.
- Přišel-li některý zaměstnanec v daný den s velkým zpožděním, pak následující pracovní den přijde s pravděpodobností $1/4$ předčasně, s pravděpodobností $1/2$ včas a s pravděpodobností $1/4$ s mírným zpožděním.

Jeden z řadových zaměstnanců se jmenuje Rudolf. Jednou večer po mnoha měsících sledování se majitel firmy naštval na nedochvilné zaměstnance a rozhodl se je potrestat: kdo následující pracovní den dorazí s velkým zpožděním, ten bude za trest celý den umývat záchody, a kdo přijde s mírným zpožděním, bude celý den drhnout podlahu. S jakou pravděpodobností stráví Rudolf následující den čištěním záchodu a s jakou pravděpodobností bude drhnout podlahu? Úlohu řešte jako Markovův proces, přičemž dokažte primitivnost použité matice.

Řešení a bodování:

1. [5 bodů]

a) [1b] Vektor $n = (x, y, z)$ musí být kolmý k vektorům ze zaměření roviny ρ, a proto musí splňovat rovnice $x + y - 4z = 0$ a $x - y = 0$. Řešením této soustavy je (až na násobek) vektor $n = (2, 2, 1)$.

b) [1b] Rovina σ má stejné zaměření jako rovina ρ, zbývá tedy najít nějaký bod $D \in \sigma$. „Posunutím" bodu $[-2, -3, 0] \in \rho$ ve směru normálového vektoru dostaneme bod $D = [-2, -3, 0] + a(2, 2, 1)$; pak vzdálenost rovin ρ a σ (která má být 6) bude rovna velikosti vektoru $a(2, 2, 1)$, $a \in \mathbb{R}$. Jelikož $||(2, 2, 1)|| = 3$, musíme tedy zvolit $a = 2$ nebo $a = -2$. Úloha má dvě řešení: pro $D_1 = [-2, -3, 0] + 2(2, 2, 1) = [2, 1, 2]$ a $D_2 = [-2, -3, 0] - 2(2, 2, 1) = [-6, -7, -2]$ dostáváme roviny

$$\sigma_1 : [2, 1, 2] + r(1, 1, -4) + s(1, -1, 0) \quad \text{a} \quad \sigma_2 : [-6, -7, -2] + r(1, 1, -4) + s(1, -1, 0).$$

c) [1b] Potřebujeme zjistit, zda existují parametry r a s takové že, jejich dosazením do parametrického popisu roviny ρ dostaneme bod B. Hledáme tedy $r, s \in \mathbb{R}$ takové, že $-2 + r + s = 3$, $-3 + r - s = 4$ a $-4r = 5$. Tato soustava nemá řešení, tedy bod B v rovině ρ neleží.

d) [1b] Body na ose z mají souřadnice x a y nulové, tj. potřebujeme nalézt parametry r a s takové, že $-2 + r + s = 0$ a $-3 + r - s = 0$. Tato soustava rovnic má řešení $r = \frac{5}{2}$ a $s = -\frac{1}{2}$. Hledaný průsečík je tedy $[-2, -3, 0] + \frac{5}{2}(1, 1, -4) - \frac{1}{2}(1, -1, 0) = [0, 0, -10]$.

e) [1b] Nejprve určíme úhel β, který svírá normála n roviny ρ s přímkou π. Dostaneme

$$\cos\beta = \frac{\langle (2, 2, 1), (1, 0, 1) \rangle}{||(2, 2, 1)|| \cdot ||(1, 0, 1)||} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tj. $\beta = \frac{\pi}{4}$. Úhel α je doplněk tohoto úhlu do $90°$, tj. $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

2. [5 bodů]

a) Je to matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad [0.5\text{b}].$$

b) Úpravou na čtverec dostaneme

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_3)^2 + 4(x_2 + \tfrac{1}{2}x_3)^2, \quad [1.5\text{b}],$$

tj. $y_1 = x_1 - 3x_3$, $y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3$ a $y_3 = x_3$ jsou souřadnice v polární bázi β s maticí přechodu

$$(\mathrm{id})_{\beta,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [0.5\text{b}]$$

Tato matice matice má inverzi

$$(\mathrm{id})_{\epsilon,\beta} = \big((\mathrm{id})_{\beta,\epsilon}\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [1\text{b}].$$

Báze β je tvořena sloupci předchozí matice, tj.

$$\beta = \big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (3, -\tfrac{1}{2}, 1)\big), \quad [0.5\text{b}]$$

a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [0.5\text{b}].$$

c) Z matice B vidíme, že kvadratická forma f je pozitivně semidefinitní, [0.5b].

3. [5 bodů]

a) [4b] Spočteme $\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^3$, tedy matice A má jediné vlastní číslo 1, [0.5b]. Z matice

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vidíme, že prostor vlastních vektorů pro vlastní číslo 1 je generovaný vektory $v_1 = (0, 1, 0)$ a $v_2 = (1, 0, -1)$, [1b]. Než z prostoru vlastních vektorů vybereme vhodou bázi, najdeme si vektor w splňující $(A-E)w = a_1v_1 + a_2v_2$, [0.5b], pro nějaké parametry $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ - vektor w spolu s vlastním vektorem $a_1v_1 + a_2v_2$ pak budou odpovídat Jordanově buňce 2x2. Z matice

$$(A - E|a_1v_1 + a_2v_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 \end{array}\right)$$

vidíme, že nutně $a_2 = 0$ a dále můžeme zvolit např. $a_1 = 1$ a $w = (1, 0, 0)$, tj. $a_1v_1 + a_2v_2 = v_1$, [1b za vektor w]. Tedy v bázi $\alpha = (v_1, w, v_2)$ bude Jordanův kanonický tvar

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

[0.5b]. Vztah $A = PJP^{-1}$ používá matice přechodu $P^{-1} = (\mathrm{id})_{\alpha,\epsilon}$ a $P = (\mathrm{id})_{\epsilon,\alpha}$, kde ϵ je standardní báze. Sloupce matice P jsou tedy bázové vektory báze α, tj.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

[1b].

b) [1b] Matice B je v Jordanově kanonickém tvaru a tedy je to Jordanův tvar zobrazení φ; ten je tvořen jedinou buňkou a tedy je dán jednoznačně. Matice tohoto zobrazení v libovolné bázi proto musí mít Jordanův tvar B. Jelikož má matice A má jiný Jordanův tvar, požadovaná báze neexistuje.

4. [5 bodů] Uvažujeme-li pořadí stavů (předčasně, včas, mírné zpoždění, velké zpoždění), jedná se o Markovův proces se (stochastickou) maticí

$$B = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

[1.5b]. Je třeba najít vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu 1, [0.5b]. Hledáme tedy řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$B - E_4 = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & -1 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde E_4 je jednotková matice 4×4. Její řešení je (až na násobek) vektor $v = (3, 3, 1, 1)$, [1.5b]. My ale potřebujeme pravděpodobnostní vektor, což je $w = \frac{1}{3+3+1+1}v = \frac{1}{8}(3, 3, 1, 1) = (\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$, [0.5b]. Rudolf tedy bude čistit záchod pravděpodobností $\frac{1}{8}$, a bude drhnout podlahu s pravděpodobností také $\frac{1}{8}$, [1b].