3. termín zkoušky – MIN101 – podzim 2021 – 1. 2. 2022

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány roviny ρ a σ obecnými rovnicemi:

$$\rho : x_1 + x_2 - x_3 = 8\,, \qquad \sigma : 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5\,.$$

Dále je dán bod $X = [1, -2, 3]$. Určete

a) vzdálenost bodu X od roviny ρ,

b) odchylku rovin ρ a σ,

c) parametrické vyjádření roviny σ,

d) parametrické vyjádření přímky p, která je průnikem rovin ρ a σ,

e) vzdálenost bodu X od přímky p.

2. (5 bodů) Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Najděte Jordanův kanonický tvar J matice A spolu s transformační maticí P, tj. $A = PJP^{-1}$.

3. (5 bodů) Mějme matici A a vektor w,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & -a & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad w = (-1, 1, 1),$$

s parametrem $a \in \mathbb{R}$. Uvažme bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ takovou, že matice přechodu z báze α do standardní báze je $(\mathrm{id})_{\epsilon,\alpha} = A$. Dále uvažme kvadratickou formu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, jejíž matice ve standardní bázi je A. Určete všechny hodnoty parametru a, pro které

a) determinant matice A je roven 0,

b) kvadratické forma f je pozitivně definitní,

c) vektor w je vlastním vektorem matice A a určete příslušné vlastní číslo,

d) báze α je ortogonální,

e) objem čtyřstěnu $PABC$, kde $P = [0, 0, 0]$, $A = P + v_1$, $B = P + v_2$ a $C = P + v_3$, je roven 1.

4. (5 bodů) Uvažme následující příklad jako Markovův proces.

Půjčovna koloběžek v Moravském krasu má tři pobočky – na Skalním mlýně, ve Sloupu a v Blansku. Každý zákazník může vrátit koloběžku na libovolné z těchto tří poboček. Každá koloběžka se půjčuje na jeden den – zákazník si ji vyzvedne dopoledne a vrátí odpoledne. Firemní statistik zjistil následující údaje. Koloběžka vyzvednutá zákazníkem na Skalním mlýně je s pravděpodobností 1/6 navrácena na Skalním mlýně, s pravděpodobností

1/2 navrácena ve Sloupu a s pravděpodobností 1/3 navrácena v Blansku. Koloběžka vyzvednutá zákazníkem ve Sloupu je s pravděpodobností 1/2 navrácena na Skalním mlýně, s pravděpodobností 1/4 navrácena ve Sloupu a s pravděpodobností 1/4 navrácena v Blansku. Koloběžka vyzvednutá zákazníkem v Blansku je s pravděpodobností 1/3 navrácena na Skalním mlýně, s pravděpodobností 1/3 navrácena ve Sloupu a konečně s pravděpodobností 1/3 navrácena v Blansku.

Po mnohaletém provozu se majitel jednou ráno (kdy jsou všechny koloběžky vrácené na některou z poboček) rozhodl projet s nejoblíbenější koloběžkou. S jakou pravděpodobností ji najde na pobočce na Skalním mlýně a s jakou pravděpodobností tato koloběžka bude v Blansku?

Řešení a bodování:

1. **[5 bodů]** Bodování: každá část za 1 bod.

a) Sestrojíme projekci bodu X do roviny ρ. Uvažujeme tedy přímku q, která je kolmá k rovině ρ a prochází bodem X. Normálový vektor roviny ρ je $(1,1,-1)$. Přímka q má tedy parametrické vyjádření $[1,-2,3]+t(1,1,-1)$. Určíme průnik q a ρ dosazením parametrického vyjádření q do obecné rovnice ρ: $-4+3t=8$. Odtud $t=4$ a kolmý průmět je $Y=[5,2,-1]$. Vzdálenost je velikost vektoru $\overrightarrow{XY}=4\cdot(1,1,-1)$, která je $4\sqrt{3}$.

b) Odchylka dvou rovin v $\mathbb{R}^3$ je rovna odchylce jejich normálových vektorů. Tj. zajímá nás odchylka vektorů $(1,1,-1)$ a $(2,1,3)$. Protože jejich skalární součin je 0, je jejich odchylka $90°$.

c) Jedná se o řešení systému o jedné rovnici. Takže volíme $x_2=s$ a $x_3=t$ volné parametry a dostaneme $2x_1=-5-s-3t$, tj. $x_1=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}s-\frac{3}{2}t$. Rovina má tedy parametrické vyjádření $[-\frac{5}{2},0,0]+s\cdot(-\frac{1}{2},1,0)+t\cdot(-\frac{3}{2},0,1)$.

d) Nyní řešíme soustavu dvou zadaných rovnic. Vyřešením dostaneme například parametrické vyjádření $[-13,21,0]+t\cdot(-4,5,1)$.

e) Hledáme t takové, že pro bod $Z=[-13,21,0]+t\cdot(-4,5,1)$ platí $\overrightarrow{XZ}\perp p$. Tzn. vektor $\overrightarrow{XZ}=Z-X=(-14,23,-3)+t\cdot(-4,5,1)$ je kolmý k vektoru $(-4,5,1)$. Proto $-14\cdot(-4)+23\cdot5-3\cdot1+t\cdot(4^2+5^2+1)=0$, tedy $168+42t=0$. Odtud $t=-4$ a $\overrightarrow{XZ}=(-14,23,-3)+(16,-20,-4)=(2,3,-7)$. Vzdálenost bodu X a přímky p je proto $||\overrightarrow{XZ}||=\sqrt{2^2+3^3+7^2}=\sqrt{62}$.

2. **[5 bodů]** Vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1=-3$ a $\lambda_2=1$, kde $\lambda_2=1$ má algebraickou násobnost 2, [1b]. Vlastní vektory jsou $v_1=(1,3,4)$ pro $\lambda_1=-3$ a $v_2=(3,1,0)$ pro $\lambda_2=1$, tj. $\lambda_2=1$ má geometrickou násobnost 1, [1b]. Odtud

$$J=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad [1b].$$

Do příslušné báze $\alpha=(v_1,v_2,v_3)$ potřebujeme třetí vektor v_3 splňující $(A-E)v_3=v_2$, což je např. $v_3=(2,0,1)$, [1b]. Tedy

$$P=(\mathrm{id})_{\epsilon,\alpha}=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&1&0\\4&0&1\end{pmatrix},\quad [1b].$$

3. **[5 bodů]** Každá z částí a), b), c), d), e) za 1 bod.

a) Spočteme determinant matice A,

$$\det A=\det\begin{pmatrix}2&-1&a\\-1&2&-a\\a&-a&2\end{pmatrix}=6-2a^2.$$

Tedy $\det A=0$ pro $a=\pm\sqrt{3}$.

b) Dle Sylvestrova kritéria musí být hlavní minory kladné,

$$1>0,\qquad \det\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}=3>0\qquad\text{a}\quad \det A=6-2a^2>0.$$

Poslední podmínka znamená $a\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

c) Má platit $Aw=\lambda w$ pro nějaké $\lambda\in\mathbb{R}$, tj.

$$Aw=\begin{pmatrix}2&-1&a\\-1&2&-a\\a&-a&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-3\\-a+3\\-2a+2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Tedy $-a+3=-2a+2$, tj. $a=-1$.

d) Vztah $(id)_{\epsilon,\alpha} = A$ znamená, že sloupce matice A jsou vektory báze α, tj.

$$v_1 = (2, -1, a), \quad v_2 = (-1, 2, -a) \quad \text{a} \quad v_3 = (a, -a, 2).$$

Ortogonalita báze α znamená, že má platit $(v_1, v_2) = (v_1, v_3) = (v_2, v_3) = 0$. Přímým výpočtem se ověří, že $(v_1, v_2) = -4 - a^2 < 0$, tedy báze α nemůže být ortogonální.

e) Objem čtyřstěnu $PABC$ je roven

$$\frac{1}{6}|\det A| = \frac{1}{6}|6 - 2a^2|$$

použitím části a). Tedy $\frac{1}{6}|6 - 2a^2| = 1$, tj. $3 - a^2 = \pm 3$, což má tři řešení $a \in \{0, \pm\sqrt{6}\}$.

4. [5 bodů] Uvažujeme-li pořadí stavů Skalní mlýn, Sloup a Blansko, jedná se o Markovův proces se (stochastickou) maticí

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

[1.5b]. Je třeba najít vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu 1, [0.5b]. Hledáme tedy řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$B - E_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -27 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde E_3 je jednotková matice 3×3. Její řešení je (až na násobek) vektor $v = (30, 32, 27)$, [1b]. My ale potřebujeme pravděpodobnostní vektor [0.5b za úvahu], což je $w = \frac{1}{30+32+27}v = \frac{1}{89}(30, 32, 27) = (\frac{30}{89}, \frac{32}{89}, \frac{27}{89})$, [0.5b]. Oblíbená koloběžka bude s pravděpodobností $\frac{30}{89}$ na Skalním mlýně, [0.5b], a s pravděpodobností $\frac{27}{89}$ v Blansku, [0.5b].