2. domácí úkol – MIN301 – podzim 2021 – odevzdat do **19.10.2021**

Uvažme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (x+p)e^{x^2-y^2}$$

s parametrem $p \in \mathbb{R}$. Určete lokální extrémy této funkce a zároveň určete, pro jaké hodnoty parametru p má tato funkce jeden, dva či více extrémů nebo žádný extrém.

Řešení: Přímým výpočtem zjistíme, že

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (1+2x^2+2xp)e^{x^2-y^2}, \\ f_y(x,y) &= (-2xy-2py)e^{x^2-y^2} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (2p+6x+4x^3+4px^2)e^{x^2-y^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= (-2y-2x^2y-2pxy)e^{x^2-y^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= (-2p-2x+4xy^2+4py^2)e^{x^2-y^2}. \end{aligned}$$

Stacionární body: ze vztahů $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ zjistíme, že $y = 0$ a $2x^2+2px+1 = 0$, tj. stacionární body jsou

$$[-\tfrac{p}{2} \pm \tfrac{\sqrt{p^2-2}}{2}, 0].$$

Hessián ve stacionárních bodech je

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \pm 2\sqrt{p^2-2} & 0 \\ 0 & -p \mp \sqrt{p^2-2}. \end{pmatrix}$$

Analýzou pozitivní/negativní definitnosti se zjistí následující:

- Pro $p < -\sqrt{2}$ má funkce f lokální minimum bodě $[-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2-2}}{2}, 0]$; v druhém stacionárním bodě je sedlový bod.
- Pro $p > \sqrt{2}$ má funkce f lokální maximum bodě $[-\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2-2}}{2}, 0]$; v druhém stacionárním bodě je sedlový bod.
- Pro $p \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ funkce f extrémy nemá.

Tento závěr stačí na splnění domácího úkolu, nicméně není úplný – zbývá určit chování funkce ve stacionárním bodě $[\mp\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$ pro $p = \pm\sqrt{2}$. Hessián $f''(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ je degenerovaný a tedy potřebujeme analyzovat vyšší derivace. Stačí uvážit funkci jedné proměnné

$$\varphi(x) = f(x,0).$$

Lehce se ověří, že $\varphi'(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = \varphi''(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$, ale $\varphi'''(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}) \neq 0$, tedy funkce f v bodech $[\mp\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$ extrém nemá.