

#### 4. domácí úkol – MIN301 – podzim 2021 – odevzdat do **29.11.2021**

Vyřešte následující diferenciální rovnice s neznámou funkcí  $y(x)$ :

(a)  $y' = (4x - y + 1)^2$ , přičemž  $y(0) = 7$ ;

(b)  $y' = (4x - y + 1)^2$ , přičemž  $y(0) = 3$ ;

(c)  $y' = \sin x(\sin^2 x - y)$ , přičemž  $y(0) = 0$ .

U všech řešení určete maximální interval, na kterém je řešení definované.

#### Řešení:

- (a,b) Po substituci  $z(x) = 4x - y(x) + 1$  dostaneme rovnici  $z' = 4 - z^2$ , u které lze separovat proměnné ve tvaru  $\frac{dz}{4-z^2} = dx$ . Touto úpravou ovšem ztratíme případy  $z = \pm 2$ , což jsou dvě konstantní řešení. Integrováním dostaneme  $\frac{z+2}{z-2} = Ce^{4x}$ , což zahrnuje řešení  $z = -2$  jestliže uvažujeme libovolné  $C \in \mathbb{R}$ . Navíc tedy máme jen řešení  $z = 2$ . Další úpravou tedy dostaneme  $z(x) = \frac{2(1+Ce^{-4x})}{1-Ce^{4x}}$  a dosazením  $z(x) = 4x - y(x) + 1$  dostaneme výsledek: množina všech řešení je

$$y(x) = 4x + \frac{3+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad y(x) = 4x - 1.$$

Dosazením počátečních podmínek dostaneme řešení  $y(x) = 4x + \frac{6+e^{4x}}{2-e^{4x}}$  definované na maximálním intervalu  $(-\infty, \ln \sqrt{2})$  v části (a) a  $y(x) = 4x + 3$  definovaná na celé reálné ose v části (b).

- (c) Jedná se o lineární rovnici  $y' - y \sin x = \sin^3 x$ . U rovnice bez pravé strany  $y' - y \sin x = 0$  lze separovat proměnné, její obecné řešení je tvaru  $y = Ce^{\cos x}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . (Pozor na konstantní řešení  $y = 0$ , které je při separaci proměnných ztraceno.) Dále postupujeme variací konstanty, tj. uvažujeme  $y = C(x)e^{\cos x}$  a dosadíme do rovnice s pravou stranou. Odtud se spočte  $C'(x) = e^{-\cos x} \sin^3 x$ . Při následném integrování se použije substituce  $z = \cos x$ . Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je tvaru

$$y(x) = -(\cos x + 1)^2 + Ce^{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Počáteční podmínka  $y(0) = 0$  znamená, že  $C = \frac{4}{e}$ , tj. výsledkem je funkce

$$y(x) = -(\cos x + 1)^2 + \frac{4}{e}e^{\cos x} = -(\cos x + 1)^2 + 4e^{\cos x - 1}$$

definovaná na celé reálné ose.