3. domácí úkol – MIN301 – podzim 2022 – odevzdat do **2.12.2022**

Uvažme omezenou oblast $A \subset \mathbb{R}^3$ ohraničenou paraboloidem $z = 4 - x^2 - y^2$, válcem $x^2 + y^2 = 4$ a rovinami $y = 0$ a $z = 0$. Určete, pro jakou konstantu $a \in \mathbb{R}$ rozděluje rovina $z = a$ oblast A na dvě části o stejném objemu.

Řešení: Zadání vyhovují dvě oblasti (navzájem symetrické podle roviny $y = 0$), nicméně konstanta a je po obě stejná. Zvolme oblast A, pro kterou je $y \geq 0$. Ve válcových souřadnicích

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$

má tato oblast parametrizaci

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq 4 - r^2.$$

Jelikož Jakobián této transformace souřadnic je r, objem celé oblasti A je

$$V = \iiint_A r\, dr d\varphi dz = \int_0^\pi \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r\, dz dr d\varphi = \ldots = 4\pi.$$

Rovina $z = a$ pro $0 \leq a \leq 4$ rozdělí oblast na dvě menší, kde ta „horní“ má parametrizaci

$$0 \leq r \leq \sqrt{4-a}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad a \leq z \leq 4 - r^2.$$

Tedy hledáme $a \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\tfrac{1}{2}V = 2\pi = \int_0^\pi \int_0^{\sqrt{4-a}} \int_a^{4-r^2} r\, dz dr d\varphi = \ldots = \pi\tfrac{(4-a)^2}{4},$$

tj. $a = 4 - 2\sqrt{2}$.