Utváření moderního a budoucího světa aneb jak mluvit o matematice

Petr Liška

Masarykova univerzita v Brně

Letní škola

Mně matematika nikdy nešla a nebavila mě.

Typický pohled

1. Matematika je neužitečná!

Typický pohled

1. Matematika je neužitečná!
2. Matematika je suchý a logický předmět bez jakéhokoliv lidského obsahu.

Typický pohled

1. Matematika je neužitečná!
2. Matematika je suchý a logický předmět bez jakéhokoliv lidského obsahu.
3. Matematikové jsou šílení.

Kdo je kdo?

Kdo je kdo?

James Clark Maxwell
1831–1879

mobilní telefon, WiFi, internet, počítače, radar, satelitní navigace...

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Kdo je kdo?

Florence Nightingale
1820–1910

medicínská statistika, grafická reprezentace dat

Podstata problému

Skutečným problémem (aplikované) matematiky je, že je jako vzduch, který dýcháme. Je životně důležitá pro všechno, co děláme, ale je neviditelná a lehko ignorovatelná.

— Chris Budd

Podstata problému

Skutečným problémem (aplikované) matematiky je, že je jako vzduch, který dýcháme. Je životně důležitá pro všechno, co děláme, ale je neviditelná a lehko ignorovatelná.

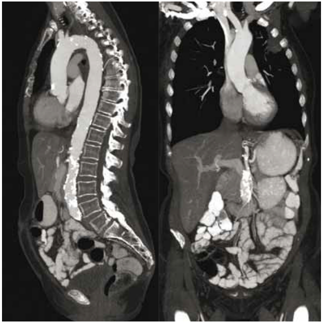
— Chris Budd

Většina matematických koncepcí nevychází z každodenních jevů, ale ze starších matematických koncepcí. Takže jediný způsob, jak novým myšlenkám porozumět, je pochopit dlouhou řadu předcházejících abstrakcí.

— Keith Devlin

Jak může matematika zachránit život?

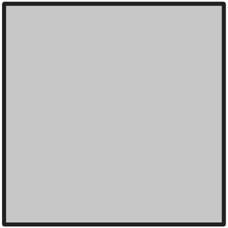
Zobrazovací metody v lékařství

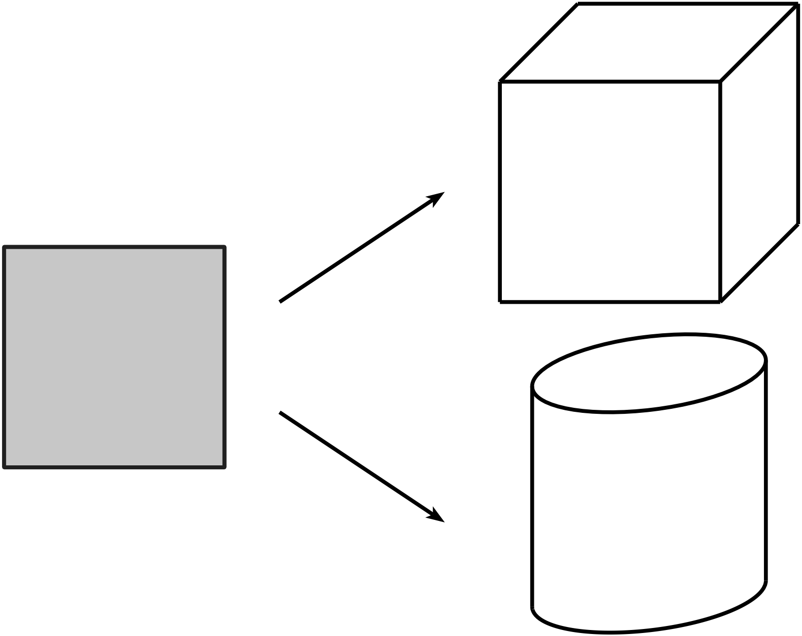


Hodně chytrý (rozuměj matematicky) ultrazvuk

SONO, CAT, PET, MRI, FMRI. . . WTF?

1. Zdroj je venku
   - Ultrazvuk (lékařská ultrasonografie)
   - CAT (Computerised axial tomography) - rentgenové záření
2. Zdroj je uvnitř
   - PET (Positron emission tomography) - radiofarmakum - rozpad - zachycení záření
   - MRI (Magnetic resonance imaging) - silné magnetické pole - spin - uvolnění energie





tuky – 1 jednotka, svaly – 2 jednotky, kosti – 3 jednotky

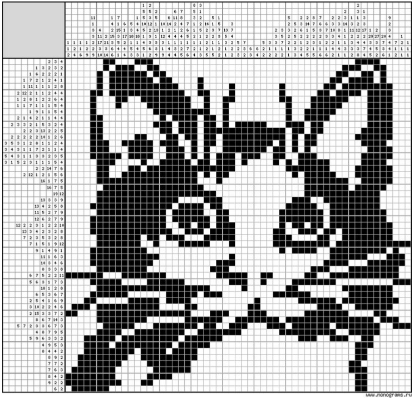
5			
6			
4			
	6	3	6

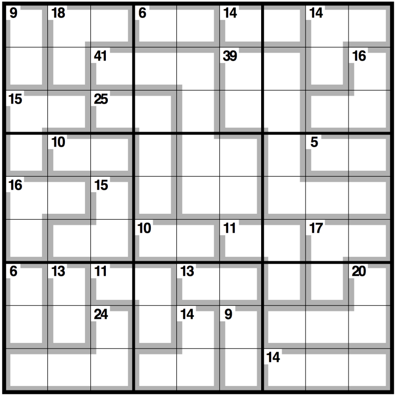
5			
6			
4			
	6	3	6

3	1	1
2	1	3
1	1	2

2	1	2
2	1	3
2	1	1

Griddler a Killer Sudoku





Johann Radon (1887-1956)

Každý dvourozměrný objekt může být jednoznačně zrekonstruován pomocí nekonečné množiny hodnot integrálu podle všech přímek.

–1917

CT vyšetření alias počítačová tomografie

1963 – Allan McLeod Cormack - první článek o principu CT
1971 – první přístroj pro vyšetření v nemocnicích (Sir Godfrey Hounsfield)
1979 – společná Nobelova cena za lékařství

Jeden paprsek

$$\mathrm{d}I(s) = -A(s)I(s)\,\mathrm{d}s$$

I intenzita záření

A absorpční koeficient

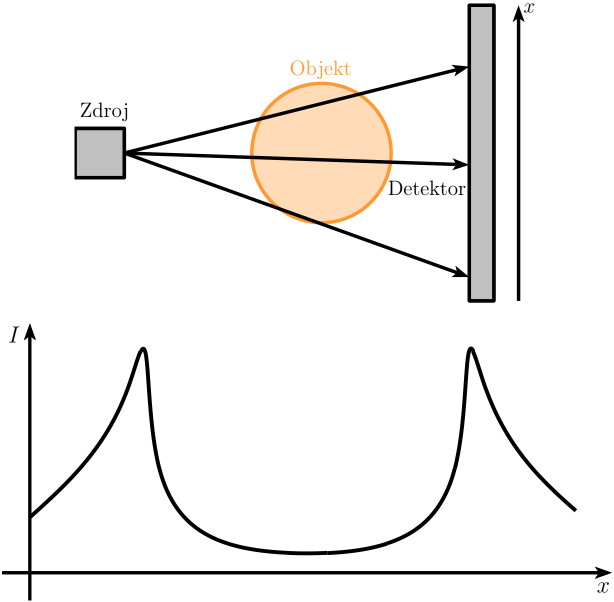
s vzdálenost

$$I(s_z) = I_z \qquad\qquad I(s_k) = I_k$$

$$\int_{s_z}^{s_k} \frac{\mathrm{d}I(s)}{I(s)} = -\int_{s_z}^{s_k} A(s)\,\mathrm{d}s$$

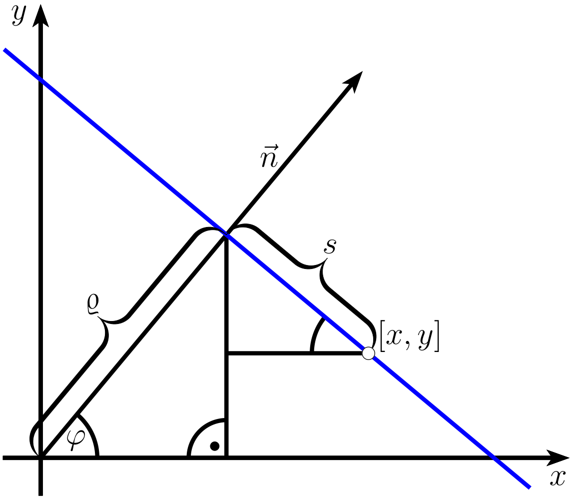
$$\ln\frac{I_z}{I_k} = \int_{s_z}^{s_k} A(s)\,\mathrm{d}s$$

Víc paprsků



O hodně víc paprsků

Rovnoběžné paprsky a nová geometrie



$$(x(s), y(s)) = (\varrho \cos\varphi - s \sin\varphi, \varrho \sin\varphi + s \cos\varphi)$$

Přepsaná rovnice a Radonova transformace

$$\ln \frac{I_z}{I_k} = \int_{s_z}^{s_k} A(\varrho \cos \varphi - s \sin \varphi, \varrho \sin \varphi + s \cos \varphi) \, \mathrm{d}s$$

Radonova transformace

Pro funkci $f(\varrho, \varphi)$ definovanou na $\mathbb{R}^2$ s kompaktním nosičem je Radonova transformace definována pro $\varrho \in \mathbb{R}$ a $\varphi \in (0, 2\pi]$ jako

$$\mathcal{R}f(\varrho, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varrho \cos \varphi - s \sin \varphi, \varrho \sin \varphi + s \cos \varphi) \, \mathrm{d}s.$$

Něco pro experty

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\mathcal{B}\left\{\mathcal{F}^{-1}\left[|\varrho|\mathcal{F}(\mathcal{R}f)(\varrho,\varphi)\right]\right\}(x,y)$$

$\mathcal{B}$ zpětná projekce

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(x\cos\varphi + y\sin\varphi, \varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$\mathcal{F}$ Fourierova transformace

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}x$$

$\mathcal{F}^{-1}$ inverzní Fourierova transformace

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\mathrm{e}^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega$$

Lékařská diagnostika

Treating illnesses is why we became doctors. Treating patients is what makes most doctors miserables.

–Gregory House

Testy

senzitivita testu pravděpodobnost, že test odhalí nemoc, když ji mám

specifita testu pravděpodobnost, že test je negativní, když nemoc nemám

prevalence nemoci podíl počtu jedinců, kteří nemoc mají, a počtu všech jedinců v populaci

Komerční test na celiakii v obchodech

Senzitivita testu je 96,3 %. Specifita testu je 89,7 %. Počet celiaků v naší populaci je zhruba 1 %.
Jestliže je u mě test pozitivní, jaká je pravděpodobnost, že trpím celiakií?

Nechali jste se nachytat?

Komerční test na celiakii v obchodech

Senzitivita testu je 96,3 %. Specifita testu je 89,7 %. Počet celiaků v naší populaci je zhruba 1 %.
Jestliže je u mě test pozitivní, jaká je pravděpodobnost, že trpím celiakií?

Nástřel řešení

Představme si, že test aplikujeme na 100 000 lidí. Pak cca 99 000 lidí celiakii nemá a cca 1 000 ji má.
Test dá nesprávný výsledek u cca 10 % zdravých lidí, máme tedy 9 900 falešně pozitivních výsledků.
U 1 000 nemocných máme šanci na odhalení cca 96 %, tj. odhalíme 960 nemocných.
Celkem máme tedy 10 860 pozitivních výsledků, ale jen 960 opravdu nemocných, tj.

$$\frac{960}{10\,860} = 0,088 \Longrightarrow 8{,}8\,\%.$$

Podmíněná pravděpodobnost a Bayesova věta

Bayesova, ale objevil Laplace (1774)

Nechť A je náhodný jev a nechť $B_1, \ldots, B_n$ je úplný systém jevů. Jestliže $P(A) > 0$, $P(B_1) > 0, \ldots, P(B_n) > 0$, pak

$$P(B_k|A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Ještě jednou a pořádně

Komerční test na celiakii v obchodech

Senzitivita testu je 96,3 %. Specifita testu je 89,7 %. Počet celiaků v naší populaci je zhruba 1 %.
Jestliže je u mě test pozitivní, jaká je pravděpodobnost, že trpím celiakií?

Bayes v akci

$$P(+|C) = 0{,}96 \qquad P(-|C) = 0{,}04 \qquad P(+|N) = 0{,}1 \qquad P(-|N) = 0{,}9$$

$$P(C|+) = \frac{P(+|C)P(C)}{P(+|C)P(C) + P(+|N)P(N)} =$$
$$= \frac{0{,}96 \cdot 0{,}01}{0{,}96 \cdot 0{,}01 + 0{,}1 \cdot 0{,}99} = 0{,}088.$$

Co když se test opakuje?

počet testů	0	1	2	3	4	5
pravděpodobnost nemoci	0,01	0,09	0,48	0,91	0,99	1,00

Pro uklidnění

$$P(N|-) = \frac{P(-|N)P(N)}{P(-|N)P(N) + P(-|C)P(C)} =$$

$$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}99}{0{,}9 \cdot 0{,}99 + 0{,}04 \cdot 0{,}01} = 0{,}99955.$$

Struma vs. Hashimoto vs. rakovina štítné žlázy

Procento positivních odpovědí

Nemoc	1	2	3	4	5	6	7	8
Struma	30	20	50	70	40	80	10	60
Hashimoto	70	30	90	80	20	40	90	50
Rakovina	60	80	40	20	60	70	50	10

Výsledky testů

Test	1	2	3	4	5	6	7	8
Výsledek	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$P(A|1^-) = \frac{P(1^-|A)P(A)}{P(1^-|A)P(A) + P(1^-|B)P(B) + P(1^-|C)P(C)}$$

$$P(B|1^-) = \frac{P(1^-|B)P(B)}{P(1^-|A)P(A) + P(1^-|B)P(B) + P(1^-|C)P(C)}$$

$$P(C|1^-) = \frac{P(1^-|C)P(C)}{P(1^-|A)P(A) + P(1^-|B)P(B) + P(1^-|C)P(C)}$$

Struma vs. Hashimoto vs. rakovina štítné žlázy

Podmíněné pravděpodobnosti po provedení testů

	1	2	3	4	5	6	7	8
struma	0,50	0,26	0,25	0,35	0,32	0,46	0,79	0,90
Hashimoto	0,21	0,16	0,29	0,46	0,57	0,40	0,08	0,07
rakovina	0,29	0,58	0,46	0,19	0,11	0,14	0,13	0,03

Struma vs. Hashimoto vs. rakovina štítné žlázy

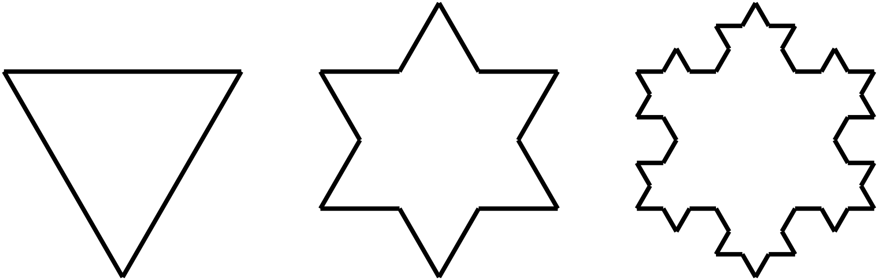
Podmíněné pravděpodobnosti po provedení testů

	1	2	3	4	5	6	7	8
struma	0,50	0,26	0,25	0,35	0,32	0,46	0,79	0,90
Hashimoto	0,21	0,16	0,29	0,46	0,57	0,40	0,08	0,07
rakovina	0,29	0,58	0,46	0,19	0,11	0,14	0,13	0,03

Špatná zpráva – na začátku jsme vybrali pacienta, který určitě má Hashimotovu nemoc.

1. Který test se má provést nejdřív?
2. Má se pořadí testů měnit již podle známých výsledků dřívějších testů?
3. Když je každý test jinak drahý, v jakém pořadí se mají provést?

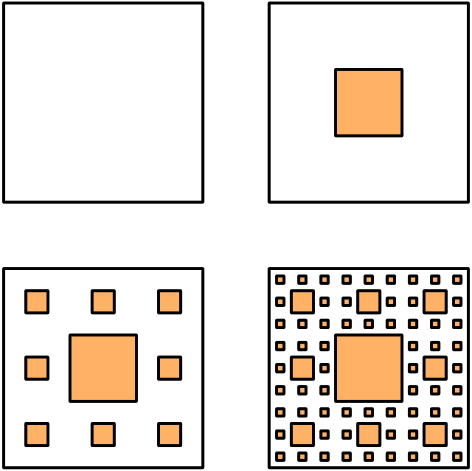
Podivná geometrie



— Helge von Koch, 1904

$$o_n = 3a \left(\frac{4}{3}\right)^n \longrightarrow \infty$$

$$S_n = \frac{S_0}{5}\left(8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \longrightarrow \frac{2a^2\sqrt{3}}{5}$$



— Wacław Sierpiński, 1916

$$S_n = a^2 \left(1 - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{8}{9}\right)^k \right) \longrightarrow 0$$

Geometrie popisující přírodu

Fraktály a dimenze

Intuitivní definice dimenze (pokrývací)

Řekneme, že objekt má dimenzi d, jestliže k jeho pokrytí čtverci (krychlemi) jejichž stranu zmenšíme n-krát potřebujeme n^d více čtverců (krychlí).

Fraktály a dimenze

Intuitivní definice dimenze (pokrývací)

Řekneme, že objekt má dimenzi d, jestliže k jeho pokrytí čtverci (krychlemi) jejichž stranu zmenšíme n-krát potřebujeme n^d více čtverců (krychlí).

Homotetická definice dimenze

Objekt má dimenzi

$$d = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}},$$

kde N je počet částí z kterých se objekt skládá a které vzniknou pomocí stejnolehlosti s koeficientem r z původního objektu.

Fraktály a dimenze

Intuitivní definice dimenze (pokrývací)

Řekneme, že objekt má dimenzi d, jestliže k jeho pokrytí čtverci (krychlemi) jejichž stranu zmenšíme n-krát potřebujeme n^d více čtverců (krychlí).

Homotetická definice dimenze

Objekt má dimenzi

$$d = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}},$$

kde N je počet částí z kterých se objekt skládá a které vzniknou pomocí stejnolehlosti s koeficientem r z původního objektu.

$$d_{Koch} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26 \qquad d_{Sierpinski} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1{,}89$$

Matematika ve filmu

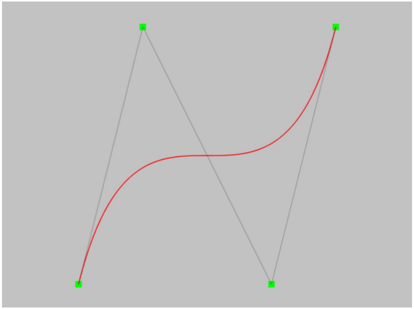
První celovečerní počítačem animovaný film

1995

NURBS

$m+1$ kontrolních bodů P_i a jejich váhy w_i, stupeň n křivky a uzlový vektor $t = (t_0, t_1, \dots, t_{n+m+1})$

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^{m} w_i P_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{m} w_i N_i^n(t)},$$



kde

$$t \in [t_n, t_{m+1}]$$

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$N_i^n(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+n} - t_i} N_n^{n-1}(t) + \\ + \frac{t_{i+n+1} - t}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t)$$

`http://nurbscalculator.in/`

And Oscar goes to...

1997

Dělení plochy

Edwin Catmull

Tony DeRose

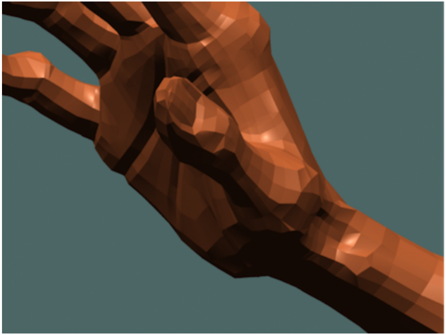
Jos Stam

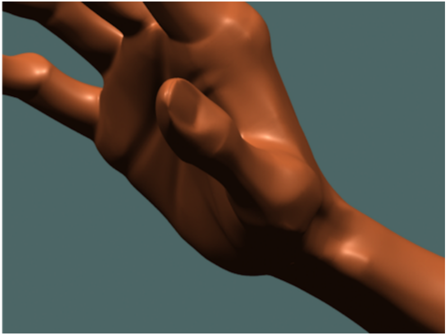
https://www.khanacademy.org/partner-content/pixar/modeling-character/modeling-subdivision/p/interactive-split-and-average

Catmull-Clark – základní algoritmus

1. Pro každou stěnu přidej *stěnový bod*, který je průměrem jejích vrcholů.
2. Pro každou hranu přidej *hranový bod*, který je průměrem jejích krajních bodů a sousedících *stěnových bodů*
3. Každý původní vrchol P přesuň do bodu
$$\frac{F + 2R + (n-3)P}{n},$$
kde F je průměr všech n *stěnových bodů*, které jsou ve stěnách sousedících s P, a R je průměr středů všech původních hran vycházejících z P
4. Každý *stěnový bod* se spojí s *hranovým bodem*, ten se spojí s novým vrcholem a sousedním *hranovým bodem* a zpět do *stěnového bodu*

A teď v praxi





https://www.khanacademy.org/partner-content/pixar/modeling-character/modeling-subdivision/p/interactive-subdivision-in-3d

Ale co pohyb?

Ale co pohyb?

Velká myšlenka

Změna souřadnic jednotlivých bodů změní obrázek!

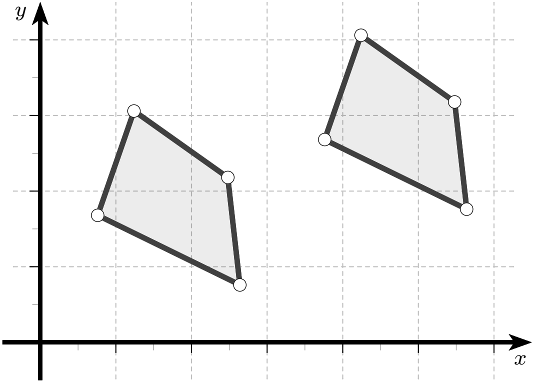
Ale co pohyb?

Velká myšlenka

Změna souřadnic jednotlivých bodů změní obrázek!

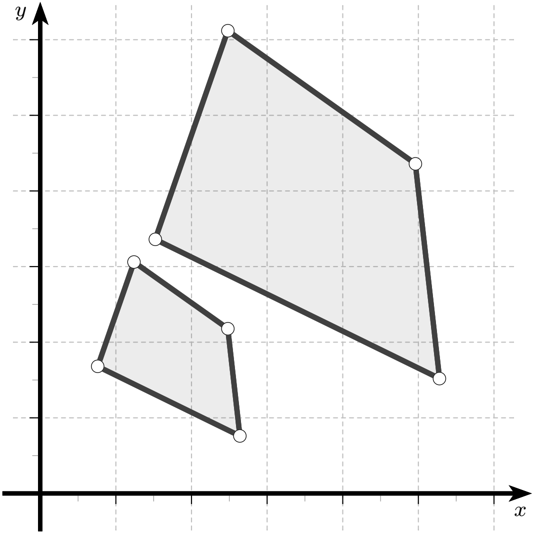
Posunutí

$$X' = X + \vec{u}$$



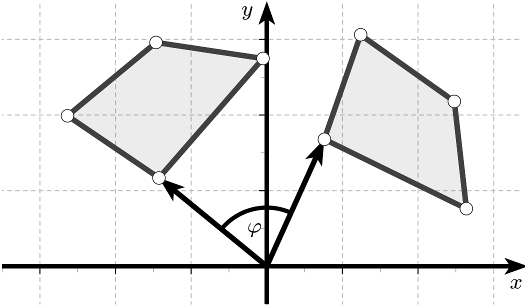
Přiblížení

$$X' = k \cdot X$$



Rotace

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Komplexní čísla a kvaterniony

Rotace jako násobení komplexních čísel

$$x' + iy' = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(x+iy)$$

Kvaterniony alias $q = a + bi + cj + dk$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

— Sir William Rowan Hamilton, 16.11.1843

Rotace ve 3D

Bod $X = [x, y, z]$ otáčíme kolem osy procházející počátkem a bodem o souřadnicích $[a, b, c]$ o úhel φ do bodu $X' = [x', y', z']$.

$$u = xi + yj + zk \qquad \text{a} \qquad v = x'i + y'j + z'k$$

Pak platí

$$v = q_1 \cdot u \cdot q_2,$$

kde

$$q_1 = \cos\frac{\varphi}{2} + (ai + bj + ck)\sin\frac{\varphi}{2}$$
$$q_1 = \cos\frac{\varphi}{2} - (ai + bj + ck)\sin\frac{\varphi}{2}$$

A další triky (tentokráte spíše obrázkové)

$$M(t) = (1 - t)A + tZ, \qquad t \in [0, 1]$$

A další triky (tentokráte spíše obrázkové)

$$M(t) = (1-t)A + tZ, \qquad t \in [0,1]$$

$M(0) = A$

$M(0.13)$

$M(0.25)$

$M(0.38)$

$M(0.50)$

$M(0.63)$

$M(0.75)$

$M(0.88)$

$M(1) = Z$

Matematika a hlasování
aneb
existuje spravedlivý systém?

Jak si správně vybrat?

Jak si správně vybrat?

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
a	a	a	b	d	d	e
d	c	c	c	b	b	d
c	b	b	d	c	c	b
b	e	e	a	e	a	c
e	d	d	e	a	e	a

Příklady a formalizace

- Parlament ČR
- Mezinárodní měnový fond
- Rada Evropské unie
- Bundestag vs. Bundesrat
- Rada bezpečnosti OSN

Příklady a formalizace

- Parlament ČR
- Mezinárodní měnový fond
- Rada Evropské unie
- Bundestag vs. Bundesrat
- Rada bezpečnosti OSN

Definice

Hlasovací systém je dvojice $(V, \mathcal{V})$, kde V je konečná množina *hlasujících* a $\mathcal{V} \subset 2^V$. Podmnožiny V se nazývají *koalice*, množiny obsažené ve $\mathcal{V}$ se nazývají *vítězné koalice*, ostatní jsou pak *prohrávající koalice*.

Vážený hlasovací systém

Definice

Hlasovací systém $(V, \mathcal{V})$ se nazývá *vážený hlasovací systém*, jestliže existuje funkce $w\colon V \longrightarrow [0, \infty)$, tzv. váhová funkce, a číslo q, tzv. kvóta, tak, že

$$A \in \mathcal{V} \quad \iff \sum_{v \in A} w(v) \geq q.$$

Vážený hlasovací systém

Definice

Hlasovací systém $(V, \mathcal{V})$ se nazývá *vážený hlasovací systém*, jestliže existuje funkce $w\colon V \longrightarrow [0, \infty)$, tzv. váhová funkce, a číslo q, tzv. kvóta, tak, že

$$A \in \mathcal{V} \quad \Longleftrightarrow \sum_{v \in A} w(v) \geq q.$$

Rada EHS (1957-1973)

Země	Hlasy
Belgie	2
Franice	4
Itálie	4
Lucembursko	1
Německo	4
Nizozemí	2

Kvóta byla 12.

Jaká je síla jednotlivých zemí?

Je tu něco podezřelého?

Rozhodující voliči

Definice

Nechť $(V, \mathcal{V})$ je hlasovací systém, $A \subset V$ je koalice a $v \in V$ volič.

- Řekneme, že v je *rozhodující pro vítězství* koalice A, jestliže $v \notin A$, $A \notin \mathcal{V}$ a $A \cup \{v\} \in \mathcal{V}$.

$$\mathcal{D}^+(v) := \{A \subset V \,|\, v \notin A,\ A \notin \mathcal{V},\ A \cup \{v\} \in \mathcal{V}\}$$

- Řekneme, že v je *rozhodující pro porážku* koalice A, jestliže $v \in A$, $A \in \mathcal{V}$ a $A \setminus \{v\} \notin \mathcal{V}$.

$$\mathcal{D}^-(v) := \{A \subset V | v \in A, A \in \mathcal{V}, A \setminus \{v\} \notin \mathcal{V}\}$$

- Řekneme, že v je *rozhodující* pro koalici A, jestliže je rozhodující pro vítězství nebo porážku koalice A.

$$\mathcal{D}(v) := \mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$$

Penrose-Banzhafova síla a index voliče

Definice (Penrose 1946, Banzhaf 1965)

Nechť $(V, \mathcal{V})$ je hlasovací systém, $N = |V|$ a $v \in V$. *Penrose-Banzhafovu sílu* voliče v definujeme jako

$$PB(v) = \frac{|\mathcal{D}(v)|}{2^N} = \frac{|\mathcal{D}^+(v)|}{2^{N-1}} = \frac{|\mathcal{D}^-(v)|}{2^{N-1}}.$$

Funkci $NPB\colon V \to [0,1]$ definovanou jako

$$NPB(v) := \frac{PB(v)}{\sum_{w \in V} PB(w)}$$

nazveme *Penrose-Banzhafovým indexem* voliče v.

$$\sum_{v \in V} NPB(v) = 1$$

Rada EHS (1957-1973)

Země	Hlasy	PB	NPB
Belgie	2	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{21}$
Franice	4	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{21}$
Itálie	4	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{21}$
Lucembursko	1	0	0
Německo	4	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{21}$
Nizozemí	2	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{21}$

Rada EHS (1957-1973)

Země	Hlasy	PB	NPB
Belgie	2	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{21}$
Franice	4	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{21}$
Itálie	4	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{21}$
Lucembursko	1	0	0
Německo	4	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{21}$
Nizozemí	2	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{21}$

Věta

Nechť $(V, \mathcal{V})$ je hlasovací systém s N voliči, kde každý má váhu 1, a s pravidlem prosté většiny. Pak Penrose-Banzhafova síla je nezávislá na konkrétním voliči a platí

$$PB(v) \equiv \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{N}} \qquad \text{pro} \qquad N \to \infty.$$

Lokální příklad

Poslanecká sněmovna ČR (současnost)

Strana	ANO	ODS	Piráti	SPD	ČSSD	KSČM	KDU-ČSL	TOP 09	STAN
Váha	78	25	22	22	15	15	10	7	6
PB	0,898	0,102	0,094	0,094	0,063	0,063	0,055	0,039	0,023
NPB	0,628	0,071	0,066	0,066	0,044	0,044	0,038	0,027	0,016

Existuje celkem 512 koalic, vítězných je 252. Vypočteno pomocí *Indices of Power*, dostupné na `http://www.tbraeuninger.de`.

Rada Evropské unie – Co je více fér?

Smlouva z Nice (2007-2013)

DE	FR	UK	IT	ES	PL	RO	NL	BE	EL	CZ	PT	HU	SE
29	29	29	29	27	27	14	13	12	12	12	12	12	10
AT	BG	DK	FI	SK	IE	HR	LT	SI	LV	EE	CY	LU	MT
10	10	7	7	7	7	7	7	4	4	4	4	4	3

Návrh projde, jsou-li splněny tři podmínky:

1. Koalici tvoří nadpoloviční většina států.
2. Součet vah států v koalici je alespoň 260 (tj. cca 74 %).
3. Státy reprezentují alespoň 62 % obyvatel EU.

Lisabonská smlouva

Návrh projde, jsou-li splněny dvě podmínky:

1. Koalici tvoří alespoň 55 % států (tj. alespoň 16 (15) států)
2. Státy reprezentují alespoň 65 % obyvatel EU.

nebo ho podpoří 25 z 28 (27) států.

Co je více fér?

Země	Popu	Nice	Lisa	Brex	Země	Popu	Nice	Lisa	Brex
Německo	15,9	7,6	10,2	11,9	Rakousko	1,7	3	2,6	2,7
Francie	13	7,6	8,4	9,9	Bulharsko	1,4	3	2,5	2,5
UK	12,7	7,6	8,3	-	Dánsko	1,1	2,1	2,3	2,3
Itálie	12	7,6	7,9	9,2	Finsko	1,1	2,1	2,3	2,3
Španělsko	9,2	7,2	6,2	7,7	Slovensko	1,1	2,1	2,3	2,3
Polsko	7,5	7,2	5,1	6,6	Irsko	0,9	2,1	2,2	2,2
Rumunsko	3,9	4,2	3,8	4,4	Chorvatsko	0,8	2,1	2,2	2,2
Nizozemí	3,3	3,9	3,5	3,7	Lotyšsko	0,6	2,1	2	2,0
Belgie	2,2	3,6	2,9	3	Slovinsko	0,4	1,2	2	1,9
Řecko	2,2	3,6	2,9	3	Litva	0,4	1,2	2	1,9
Česko	2,1	3,6	2,8	2,9	Estonsko	0,3	1,2	1,9	1,8
Portugalsko	2,1	3,6	2,8	2,9	Kypr	0,2	1,2	1,8	1,8
Maďarsko	1,9	3,6	2,8	2,9	Lucembursko	0,1	1,2	1,8	1,7
Švédsko	1,9	3	2,7	2,8	Malta	0,1	0,9	1,8	1,7

Dvoustupňový hlasovací systém

Definice

Nechť $(\mathrm{S}_1, \mathcal{S}_1)$, ..., $(\mathrm{S}_\mathrm{m}, \mathcal{S}_m)$ jsou hlasovací systémy a nechť

$$\mathrm{S} := \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{S}_i.$$

Dále nechť $(\mathrm{C}, \mathcal{C})$, kde $\mathrm{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ je také hlasovací systém. Pro koalici $A \subset \mathrm{S}$ definujeme

$$\Phi(A) = \{c_i \,|\, A \cap \mathrm{S}_i \in \mathcal{S}_i\}$$

a

$$\mathcal{S} = \{A \subset \mathrm{S} \,|\, \Phi(A) \in \mathcal{C}\}\,.$$

Potom $(\mathrm{S}, \mathcal{S})$ se nazývá *dvoustupňový hlasovací systém*. Jsou-li navíc množiny S_i po dvou disjunktní a $\mathcal{S}_i$ jsou většinové hlasovací systémy, pak se $(\mathrm{S}, \mathcal{S})$ nazývá *jednoduchý dvoustupňový hlasovací systém*.

Penrose (1946)

Nechť $(\mathrm{S}, \mathcal{S})$ je jednoduchý dvoustupňový hlasovací systém skládající se z $(\mathrm{S}_1, \mathcal{S}_1)$, ..., $(\mathrm{S}_\mathrm{m}, \mathcal{S}_m)$ a $(\mathrm{C}, \mathcal{C})$, kde $\mathrm{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$. Nechť $N_i = |\mathrm{S}_i|$ a $N_{min} = min_{1 \leq i \leq m} N_i$.
Jestliže PB_i je Penrose-Banzhafova síla c_i v $(\mathrm{C}, \mathcal{C})$, potom Penrose-Banzhafova síla libovolného voliče $v \in \mathrm{S}_k$ v $(\mathrm{S}, \mathcal{S})$ je

$$PB(v) \equiv \frac{2}{\sqrt{2\pi N_k}} PB_k \qquad \text{pro } N_{min} \to \infty.$$

Penrose (1946)

Nechť $(\mathrm{S}, \mathcal{S})$ je jednoduchý dvoustupňový hlasovací systém skládající se z $(\mathrm{S}_1, \mathcal{S}_1)$, ..., $(\mathrm{S}_\mathrm{m}, \mathcal{S}_m)$ a $(\mathrm{C}, \mathcal{C})$, kde $\mathrm{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$. Nechť $N_i = |\mathrm{S}_i|$ a $N_{min} = min_{1 \leq i \leq m} N_i$.
Jestliže PB_i je Penrose-Banzhafova síla c_i v $(\mathrm{C}, \mathcal{C})$, potom Penrose-Banzhafova síla libovolného voliče $v \in \mathrm{S}_k$ v $(\mathrm{S}, \mathcal{S})$ je

$$PB(v) \equiv \frac{2}{\sqrt{2\pi N_k}} PB_k \qquad \text{pro } N_{min} \to \infty.$$

Penroseův zákon druhé odmocniny

Penrose-Banzhafova síla $PB(v)$ v systému $(\mathrm{S}, \mathcal{S})$ voliče $v \in \mathrm{S}_k$ je nezávislá na k právě tehdy, když Penrose-Banzhafova síla zástupce c_i je $C\sqrt{N_i}$ pro všechna i a nějakou konstantu C.

Oba nejsou fér!

Země	PRSE	Nice	Lisa	Země	PRSE	Nice	Lisa
Německo	9,1	-16,5	12,2	Rakousko	3	0	-11,3
Francie	8,2	-7,3	2,5	Bulharsko	2,7	11,1	-8,6
UK	8,1	-6,2	1,6	Dánsko	2,4	-12,5	-3,2
Itálie	7,9	-3,8	0	Finsko	2,4	-12,5	-2,6
Španělsko	6,9	4,3	-9,8	Slovensko	2,4	-12,5	-2,1
Polsko	6,2	16,1	-18,5	Irsko	2,2	-3,2	2,2
Rumunsko	4,5	-6,7	-15,9	Chorvatsko	2,1	0	4,6
Nizozemí	4,2	-7,1	-16,4	Lotyšsko	1,7	23,5	12,3
Belgie	3,4	5,9	-14,6	Slovinsko	1,5	-20	40,9
Řecko	3,3	9,1	-14,3	Litva	1,4	-14,3	36,7
Česko	3,3	9,1	-14	Estonsko	1,2	0	61,9
Portugalsko	3,3	9,1	-15,6	Kypr	0,9	33,3	95,5
Maďarsko	3,2	12,5	-11,5	Lucembursko	0,8	50	140
Švédsko	3,1	-3,2	-13	Malta	0,7	28,6	170,8

O čem by se dalo ještě „snadno“ mluvit?

- perspektiva a filmové triky
- lineární rovnice (a matice a vlastní čísla) aneb PageRank
- cestování a teorie grafů
- prvočísla a šifrování
- teorie her aneb jak přežít
- teorie uzlů, tj. proč se sluchátka zamotají?
- matematika žonglování
- optimální řešení v medicíně
- big data
- komprese a komunikace
- ...

Zajímavé odkazy

Celkem normální

http://blog.kleinproject.org/
https://plus.maths.org/
http://www.whydomath.org/
https://www.gresham.ac.uk/attend/
http://www.numberphile.com/
https://www.khanacademy.org/partner-content/pixar

A pro odvážné

http://www.maths-in-industry.org/miis/view/subjects/subjects.html
http://graphics.pixar.com/library/