Diferenciální počet funkcí více proměnných

Funkce, limita, spojitost

Petr Liška

Masarykova univerzita

23.9.2022

Pojem funkce

Wind-chill index

T/v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10
-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17
-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24
-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31
-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38
-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45
-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52

$$W = 13{,}12 + 0{,}6215\,T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965\,Tv^{0{,}16}$$

Funkce

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$ se nazývá *(reálná) funkce n (reálných) proměnných*. Množina M se nazývá *definiční obor* funkce f.

Funkce

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f \colon M \to \mathbb{R}$ se nazývá *(reálná) funkce n (reálných) proměnných*. Množina M se nazývá *definiční obor* funkce f.

Definice (Speciálně)

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $D \neq \emptyset$. Předpis f, který každému bodu roviny $[x, y] \in D$ přiřazuje právě jedno $z \in \mathbb{R}$, nazýváme *funkcí dvou proměnných*. Tuto funkci označujeme

$$z = f(x, y).$$

Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f.

Graf funkce

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : M \to \mathbb{R}$. Pak

$$G(f) = \{[x_1, \dots, x_n, y]; [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n; y = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

se nazývá *graf funkce f*.

Graf funkce

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon M \to \mathbb{R}$. Pak

$$G(f) = \{[x_1, \dots, x_n, y]; [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n; y = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

se nazývá *graf funkce* f.

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = \{[x, y] \in M\colon f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice* funkce f na úrovni c.

Limita a spojitost

Limita

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in (\mathbb{R}^\star)^n$ je hromadný bod definičního oboru f. Řekneme, že f má v bodě a limitu L, $L \in \mathbb{R}^\star$, jestliže ke každému $\mathcal{O}(L)$ existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$ takové, že pro každý bod $x \in \mathcal{O}(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Limita

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in (\mathbb{R}^\star)^n$ je hromadný bod definičního oboru f. Řekneme, že f má v bodě a limitu L, $L \in \mathbb{R}^\star$, jestliže ke každému $\mathcal{O}(L)$ existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$ takové, že pro každý bod $x \in \mathcal{O}(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $[x_0, y_0] \in D(f)$ je hromadný bod $D(f)$. Řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ limitu L, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že

$$\forall (x,y) \in D(f)\colon 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \text{platí} \quad |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Píšeme

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = L\,.$$

Věta

Funkce f má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Věta

Funkce f má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Věta

Nechť $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ *a v nějakém ryzím okolí bodu* $[x_0, y_0]$ *platí, že* $|g(x,y)| \le K$*. Pak* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0$*.*

Věta

Funkce f má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Věta

Nechť $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ *a v nějakém ryzím okolí bodu* $[x_0, y_0]$ *platí, že* $|g(x,y)| \leq K$*. Pak* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0$.

Věta

Nechť $h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ *v nějakém ryzím okolí bodu* $[x_0, y_0]$ *a platí* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$*. Pak* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Věta

Funkce f má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Věta

Nechť $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ *a v nějakém ryzím okolí bodu* $[x_0, y_0]$ *platí, že* $|g(x,y)| \leq K$. *Pak* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0$.

Věta

Nechť $h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ *v nějakém ryzím okolí bodu* $[x_0, y_0]$ *a platí* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$. *Pak* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Věta

Má-li funkce f v bodě $[x_0, y_0] \in (\mathbb{R}^\star)^2$ *vlastní limitu, pak existuje ryzí okolí bodu* $[x_0, y_0]$ *v němž je funkce f ohraničená.*

Věta

Nechť $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$ *a* $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. *Pak pro každé* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)) = c_1 L_1 + c_2 L_2$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) g(x,y) = L_1 \cdot L_2$$

a je-li $L_2 \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}\,.$$

Věta

Nechť $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$ *a* $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. *Pak pro každé* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)) = c_1 L_1 + c_2 L_2$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) g(x,y) = L_1 \cdot L_2$$

a je-li $L_2 \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Věta

Funkce f *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *limitu rovnu* L, *jestliže existuje nějaká funkce* $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *splňující* $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ *taková,že* $|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L| < g(r)$ *pro libovolné* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *a* $r > 0$ *dostatečně malé.*

Spojitost

Definice

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže pro každý bod $[x_0, y_0] \in M$, který je jejím hromadným bodem, platí

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in M}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Spojitost

Definice

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže pro každý bod $[x_0, y_0] \in M$, který je jejím hromadným bodem, platí

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in M}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Věta (Weierstrass)

Nechť funkce f je spojitá na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak nabývá na M své nejmenší a největší hodnoty.

Spojitost

Definice

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže pro každý bod $[x_0, y_0] \in M$, který je jejím hromadným bodem, platí

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in M}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Věta (Weierstrass)

Nechť funkce f je spojitá na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak nabývá na M své nejmenší a největší hodnoty.

Věta (Bolzano)

Nechť funkce f je spojitá na otevřené souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Nechť pro $A, B \in M$ platí $f(A) \neq f(B)$. Pak ke každému číslu c ležícímu mezi $f(A)$ a $f(B)$ existuje $C \in M$ tak, že $f(C) = c$.