Metrické prostory

Zobecnění pojmu vzdálenost

Petr Liška

Masarykova univerzita

16.09.2022

Metrický prostor

Definice

Množinu $P \neq \emptyset$ a zobrazení $\varrho \colon P \times P \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna x, y, $z \in P$

1. $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$
3. $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$

se nazývá *metrický prostor*. Zobrazení ϱ se nazývá metrika, $\varrho(x, y)$ je pak vzdálenost bodů x, y v prostoru (P, ϱ).

Základní metriky na $\mathbb{R}^n$

Euklidovská metrika

$$\varrho(X, Y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

Součtová metrika

$$\varrho_1(X, Y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

Maximální metrika

$$\varrho_\infty(X, Y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$$

Základní metriky na $C[a,b]$

Metrika stejnoměrné konvergence

$$\varrho_C(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Integrální metrika

$$\varrho_I(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x$$

Definice

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pro $A, B \in P$, $A, B \neq \emptyset$ definujeme *vzdálenost množin* A a B

$$\varrho(A, B) = \inf \{\varrho(x, y), x \in A, y \in B\}$$

a *průměr* množiny A

$$d(A) = \sup \{\varrho(x, y), x, y \in A\}$$

Jestliže množina $d(A)$ není shora ohraničená, klademe $d(A) = \infty$.

Je-li $d(A) < \infty$ množina se nazývá *ohraničená* (omezená).

Definice

Nechť $\{x_n\}_1^\infty$ je posloupnost bodů v (P, ϱ). Řekneme, že posloupnost *konverguje* k bodu x_0 ($x_n \to x_0$), jestliže

$$\varrho(x_n, x_0) \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

Řekneme, že posloupost je *cauchyovská*, jestliže

$$\varrho(x_m, x_n) \to 0 \quad \text{pro} \quad \min\{m, n\} \to \infty.$$

Definice

Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou metriky na P. Řekneme, že metriky jsou *ekvivalentní*, jestliže

$$x_n \xrightarrow{\varrho_1} x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \xrightarrow{\varrho_2} x_0$$

Překvapení!

Věta (Někdy také definice)

Metriky ϱ_1, ϱ_2 na P jsou ekvivalentní, jestliže existují čísla $m, M > 0$ taková, že

$$m \cdot \varrho_1(X, Y) \leq \varrho_2(X, Y) \leq M \cdot \varrho_1(X, Y) \qquad \forall X, Y \in P.$$

Věta

Je-li P konečnědimenzionální vektorový prostor, pak všechny metriky na tomto prostoru jsou ekvivalentní.

Uzavřené množiny

Definice

Nechť $A \subseteq P$. Množina $\overline{A} = \{x \in P \colon \varrho(x, A) = 0\}$ se nazývá *uzávěr* množiny A. Množina A se nazývá *uzavřená*, pokud $A = \overline{A}$.

Věta

Nechť $A \subseteq P$. Množina A je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost prvků $x_n \in A$, $x_n \to x_0$ platí $x_0 \in A$.

Otevřené množiny a okolí bodu

Definice

Množina $A \subseteq P$ se nazývá *otevřená*, jestliže její komplement $P \setminus A$ je uzavřená množina.

Definice

Nechť $a \in P$ a $\varepsilon > 0$. Množinu

$$\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \{x \in P \colon \varrho(x, a) < \varepsilon\}$$

nazýváme (*epsilonovým*) *okolím bodu* a.

Definice

Množina $A \subseteq P$ se nazývá *otevřená*, jestliže pro každé $a \in A$ existuje $\mathcal{O}(a)$ takové, že $\mathcal{O}(a) \subset A$.

Definice

Nechť $A \subseteq P$, $a \in P$. Bod a se nazývá:

i) *Vnitřním bodem* množiny A, jestliže existuje $\mathcal{O}(a)$ takové, že $\mathcal{O}(a) \subset A$. Množina všech vnitřních bodů se nazývá *vnitřek* a značí se A^o.

ii) *Hraničním bodem* množiny A, jestliže pro každé okolí $\mathcal{O}(a)$ platí

$$\mathcal{O}(a) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathcal{O}(a) \cap (P \setminus A) \neq \emptyset.$$

Množina všech hraničních bodů se nazývá *hranice* a značí se $h(A)$.

iii) *Hromadným bodem* množiny A, jestliže každé okolí $\mathcal{O}(a)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A.

iv) *Izolovaným bodem* množiny A, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ takové, že $\mathcal{O}(a) \cap A = \{a\}$.

Množina je otevřená právě tehdy, když $A = A^o$. Množina je uzavřená právě tehdy, když obsahuje svoji hranici.

Úplný metrický prostor

Definice

Metrický prostor (P, ϱ) se nazývá úplný, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost má limitu, tj. každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Věta

Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $A \subseteq P$ je uzavřená množina. Pak A s metrikou, která je indukovaná metrikou ϱ, je úplný metrický prostor.

Definice

Metrický prostor (P, ϱ) se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat konvergentní podposloupnost. Množina $A \subseteq P$ se nazývá kompaktní, jestliže A s metrikou indukovanou metrikou ϱ je kompaktní prostor.

Věta

Je-li metrický prostor (P, ϱ) kompaktní, pak je úplný.

Věta

i) *Nechť A je kompaktní množina v metrickém prostoru (P, ϱ). Pak A je uzavřená a ohraničená.*

ii) *Nechť A je podmnožina v $\mathbb{E}^n$. Množina A je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a ohraničená.*