Diferenciální počet funkcí více proměnných

Lokální a absolutní extrémy

Petr Liška

Masarykova univerzita

7.10.2022

Lokální extrémy

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $[x_0, y_0]$ *lokálního maxima (minima)*, jestliže existuje okolí tohoto bodu takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.
Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $[x, y] \neq [x_0, y_0]$ ostré, mluvíme o *ostrých* lokálních maximech a minimech.
(Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrně *(ostré) lokální extrémy*.

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $[x_0, y_0]$ je *stacionární bod funkce* f, jestliže v bodě $[x_0, y_0]$ existují obě parciální derivace prvního řádu funkce f a platí

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Věta (Fermat)

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *lokální extrém. Pak všechny parciální derivace funkce* f*, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.*

Věta

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť* $[x_0, y_0]$ *je její stacionární bod. Jestliže*

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

pak má funkce f *v* $[x_0, y_0]$ *ostrý lokální extrém. Je-li* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$*, jde o minimum, je-li* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$*, jde o minimum.*
Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$*, pak v bodě* $[x_0, y_0]$ *lokální extrém nenastává.*

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $M \subset D(f)$. Řekneme, že bod $[x_0, y_0] \in M$ je bodem *absolutního minima (maxima)* funkce f na M, jestliže $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ $(f(x_0, y_0) \geq f(x, y))$ pro každé $[x, y] \in M$. Jsou-li nerovnosti pro $[x_0, y_0] \neq [x, y]$ ostré, mluvíme o *ostrých* absolutních extrémech.

Věta

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní množina a funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálního extrému ležících uvnitř M, nebo v některém hraničním bodě.