Diferenciální rovnice

Proč se lineární rovnice jmenuje lineární?
Exaktní rovnice a proč nemůžeme většinu rovnic vyřešit?
Geometrická interpretace a numerické řešení

Petr Liška

Masarykova univerzita

4.11.2022

Lineární rovnice

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Je-li $q(x) \equiv 0$ mluvíme o homogenní lineární diferenciální rovnici.

Zavedeme tzv. *operátorovou* symboliku

$$L[y](x) = y'(x) + p(x)y\,.$$

Operátor L je lineární, tj.

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]\,.$$

pro libovolné $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ a $y_1,\ y_2 \in C^1(a,b)$.

Princip superpozice

Věta

Nechť

$$y_1 \text{ je řešením rovnice } y' + p(x)y = q_1(x)$$
$$y_2 \text{ je řešením rovnice } y' + p(x)y = q_2(x).$$

Pak funkce

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

je řešením rovnice

$$y' + p(x)y = c_1 q_1(x) + c_2 q_2(x)$$

pro libovolné $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Důsledky

1. Je-li funkce y_0 řešením HLDR, tak i cy_0, $c \in \mathbb{R}$ je řešením.
2. Je-li funkce y_p řešení LDR a y_0 je řešení příslušné HLDR, pak funkce $y = y_0 + y_p$ je řešení LDR.
3. Jsou-li funkce y_1, y_2 dvě různá řešení LDR, pak $y = c(y_1 - y_2)$ je obecné řešení příslušné HLDR.

Věta

Je-li y_p libovolné partikulární řešení LDR a y_0 obecné řešení příslušné HLDR, pak funkce

$$y = y_0 + y_p$$

je obecným řešením LDR.

Bernoulliova rovnice

Definice

Nechť $p(x), q(x)$ jsou spojité funkce na nějakém otevřeném intervalu I a nechť $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Pak diferenciální rovnici prvního řádu ve tvaru:

$$y' + p(x)y = q(x)y^r$$

nazýváme *Bernoulliovou rovnicí.*

Substituce

$$u = y^{1-r}$$

převede Bernoulliovu rovnici na lienární diferenciální rovnici prvního řádu.

Exaktní diferenciální rovnice

Definice

Nechť P, Q jsou funkce dvou proměnných x, y a nechť mají spojité parciální derivace prvního řádu. Potom rovnici

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$$

nazýváme *exaktní diferenciální rovnicí*, je-li

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)\,.$$

Eulerova metoda

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

$$\begin{aligned}
y(x_0) &= y_0 \\
y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) \\
y_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) \\
&\vdots \\
y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n)
\end{aligned}$$

Vylepšená Eulerova metoda

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_n + h, y_k + hf(x_n, y_n)\right)\right]$$

Runge-Kutta (druhého řádu)

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right)_{x_n, y_n}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n))$$