Existence a jednoznačnost řešení počáteční úlohy

Picardova-Lindelöfova věta

Petr Liška

Masarykova univerzita

11.11.2022

Definice

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $F\colon P \to P$. Řekneme, že bod $x \in P$ je *pevným bodem zobrazení* F, jestliže platí:

$$F(x) = x.$$

Definice

Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory a $F\colon P \to Q$. Pak zobrazení F je *lipschitzovské*, jestliže existuje $L \in \mathbb{R}_0^+$ takové, že

$$\sigma\left(F(x), F(y)\right) \leq L \cdot \varrho\left(x, y\right) \qquad \forall\, x, y \in P$$

Je-li navíc $L < 1$, nazveme zobrazení F *kontrakce*.

Banachova věta (1922)

Věta

Nechť (P, ϱ) *je úplný metrický prostor a nechť zobrazení* $F\colon P \to P$ *je kontrakce. Pak zobrazení* F *má právě jeden pevný bod.*

Picard-Lindelöfova věta (1890-1893)

Věta

Nechť je dána množina

$$R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}^+$ *a* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. *Předpokládejme, že* $f\colon R \to \mathbb{R}$ *je spojitá a lipschitzovská vzhledem k proměnné* y, *tj.* $\exists\, L \in \mathbb{R}_0^+$ *takové, že*

$$\forall\, [x, y_1], [x, y_2] \in R \text{ platí, že } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|\,.$$

Pak existuje právě jedno řešení Cauchyho úlohy

$$y' = f(x, y), \qquad\qquad y(x_0) = y_0,$$

které je definované na intervalu $I = \langle x_0, x_0 + \delta\rangle$, *kde* $\delta = \min\{a, \frac{b}{m}\}$ *pro* $m = \max\limits_{[x,y] \in R} |f(x, y)|$.

Věta (**Peanova**)

Nechť je dána množina

$$R = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\right\},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}^+$ *a* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. *Dále mějme funkci* $f\colon R \to \mathbb{R}$, *která je spojitá na* R. *Pak existuje řešení Cauchyho úlohy*

$$y' = f(x, y), \qquad\qquad y(x_0) = y_0,$$

které je definované na intervalu $I = \langle x_0, x_0 + \delta\rangle$, *kde* $\delta = \min\{a, \frac{b}{m}\}$ *pro* $m = \max\limits_{[x,y] \in R} |f(x, y)|$.