1. CVIČENÍ, kapitoly 1 & 2

1 Úvod

1.1 Stereometrie - co to je

1.2 Tělesa - krychle, kvádr, hranol, rotační válec
čtyřstěn, jehlan, rotační kužel (-10-)

1.3 Volné rovnoběžné promítání

- průmětna, směr promítání, B' rovnoběžný průmět bodu B
(-12-)

Analogie: stín

Pravidla:

- shodné a rovnoběžné úsečky → shodné a rovnoběžné

(nebo je jejich průmětem bod)
↑
co?

- útvar v průmětně → shodný útvar
- útvar v ∥ průmětna → taky
„průčelná rovina"

Příklad 1

Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte

a) krychli s hranou délky $a = 4$ cm,

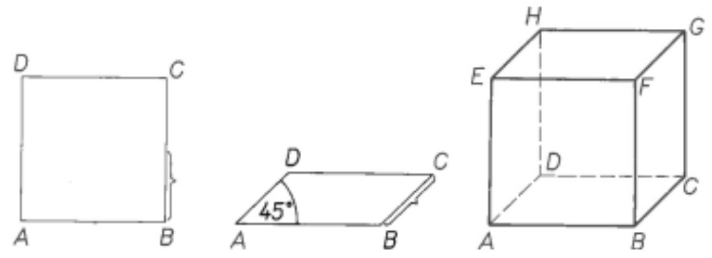
b) pravidelný čtyřstěn s hranou délky $a = 4$ cm,

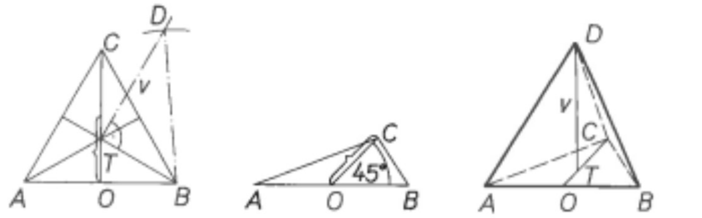
c) pravidelný šestiboký jehlan s podstavnou hranou délky $a = 2{,}5$ cm a výškou $v = 3$ cm.

Uvažujte svislou průmětnu ν a tělesa zobrazte v tzv. **průčelné poloze**: jednu stěnu (a, b), či podstavu tělesa (c) umístěte do vodorovné roviny, další stěnu (a), výšku (b) či hranu (c) umístěte do průčelné roviny.

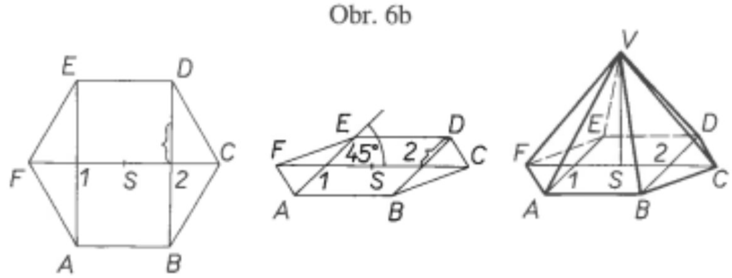
Řešení

Na obrázcích 6a, b, c jsou zobrazeny po řadě podstava tělesa, volný rovnoběžný průmět podstavy a volný rovnoběžný průmět tělesa.





Obr. 6b



Obr. 6c

Příklad 2

Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte

a) kružnici s poloměrem $r = 2{,}5$ cm,

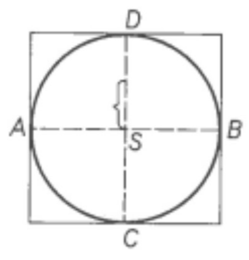
b) rotační válec s poloměrem podstavy $r = 2{,}5$ cm a výškou $v = 4{,}5$ cm,

c) rotační kužel s poloměrem podstavy $r = 2{,}5$ cm a výškou $v = 4{,}5$ cm.

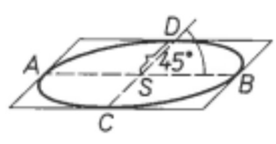
Pracujte se svislou průmětnou a kružnici (a), podstavu válce (b) i kužele (c) umístěte do vodorovné roviny.

Řešení

a) Obrazem kružnice k (obr. 7a) je v daném případě elipsa (obr. 7b). Elipsa je rovinná křivka, s níž se v matematice blíže seznámíte v analytické geometrii.



Obr. 7a



Obr. 7b

2 POLOHOVÉ VLASTNOSTI

2.1 Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami

- „bod leží na přímce", „přímka prochází bodem"
- „přímka p leží v rovině"

Věta:
- $A \in p \wedge p \in \rho \Rightarrow A \in \rho$
- $A \neq B \wedge A \in \rho \wedge B \in \rho \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \rho$
- $A \neq B : \exists! p : A \in p \wedge B \in p$

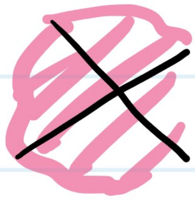
(-19-)

koment v rámečkům

Věta:
- Třemi různými A, B, C, které neleží na přímce, proch. právě jedna rovina

- 

  1ρ

-  1ρ

- 

Příklad 1

Je dána krychle $ABCDEFGH$ (obr. 17)

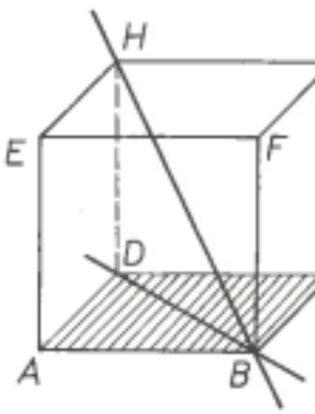
a) Určete různým způsobem rovinu dolní stěny krychle.

b) Rozhodněte, zda v této rovině leží přímky BD, BH.

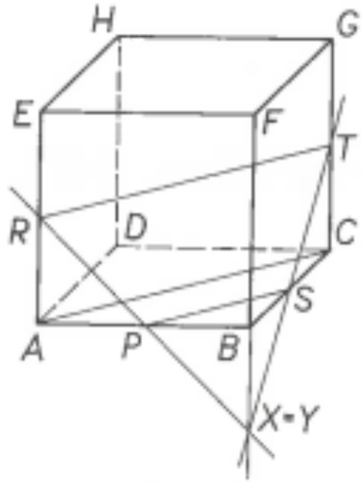
Řešení

a) Rovina dolní stěny může být určena třemi různými body (např. A, B, C), přímkou a bodem, který na ní neleží (např. přímkou AC a bodem B), dvěma různoběžkami (např. přímkami AB a BC), dvěma různými rovnoběžkami (např. přímkami AB a CD).

b) Přímka BD leží v rovině ABC, protože její body B, D leží v této rovině; přímka BH neleží v rovině ABC, protože bod H v této rovině neleží.



Obr. 17



Obr. 18

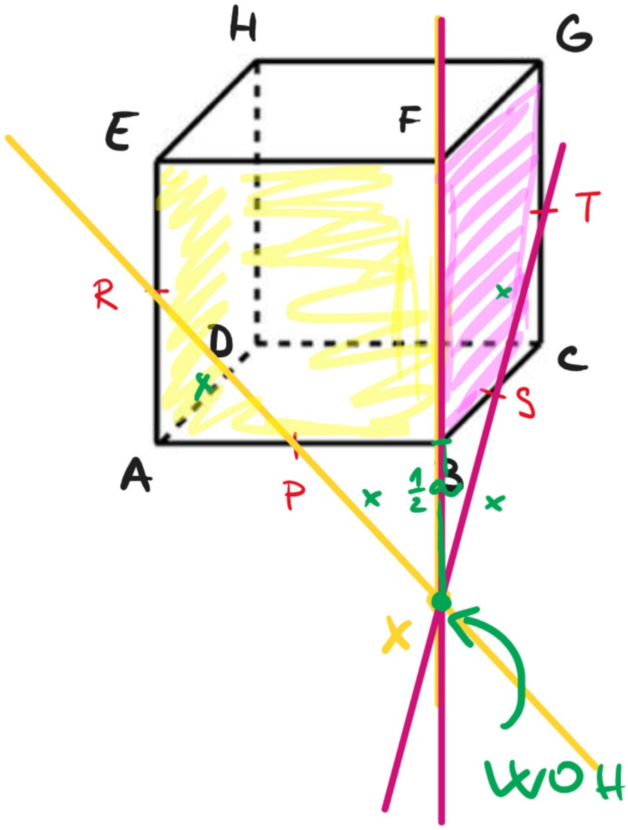
Příklad 2

Body P, R, S, T jsou po řadě středy hran AB, AE, BC, CG krychle $ABCDEFGH$ (obr. 18). Zjistěte, zda leží v téže rovině body a) P, R, S, T, b) A, C, E, F.

Řešení

a) Přímka PR leží v rovině přední stěny a protíná přímku BF v bodě X. Trojúhelníky PRA a PXB jsou shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky; proto $|BX| = \frac{1}{2}a$, kde a je délka hrany krychle. V rovině pravé boční stěny leží přímka ST a protíná přímku BF v bodě Y. Také trojúhelníky SYB a STC jsou shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky; proto také $|BY| = \frac{1}{2}a$. Tedy $X = Y$, přímky PR a ST jsou různoběžné a body P, R, S, T leží v téže rovině.

b) Body A, E, F určují rovinu přední stěny a bod C v této rovině neleží; proto body A, C, E, F neleží v téže rovině.

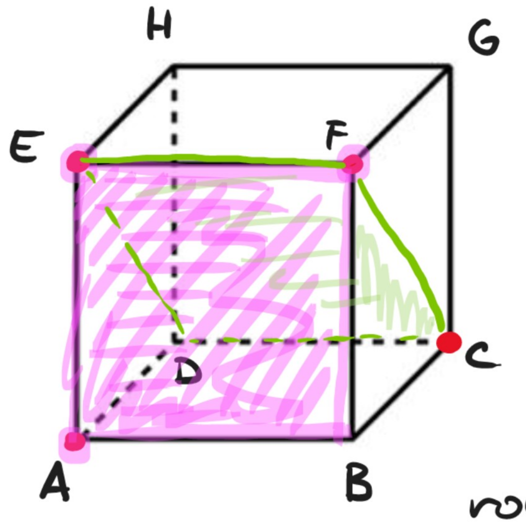


Přímky PR a ST jsou různoběžky (mají průsečík)

Dvě různoběžky určují rovinu

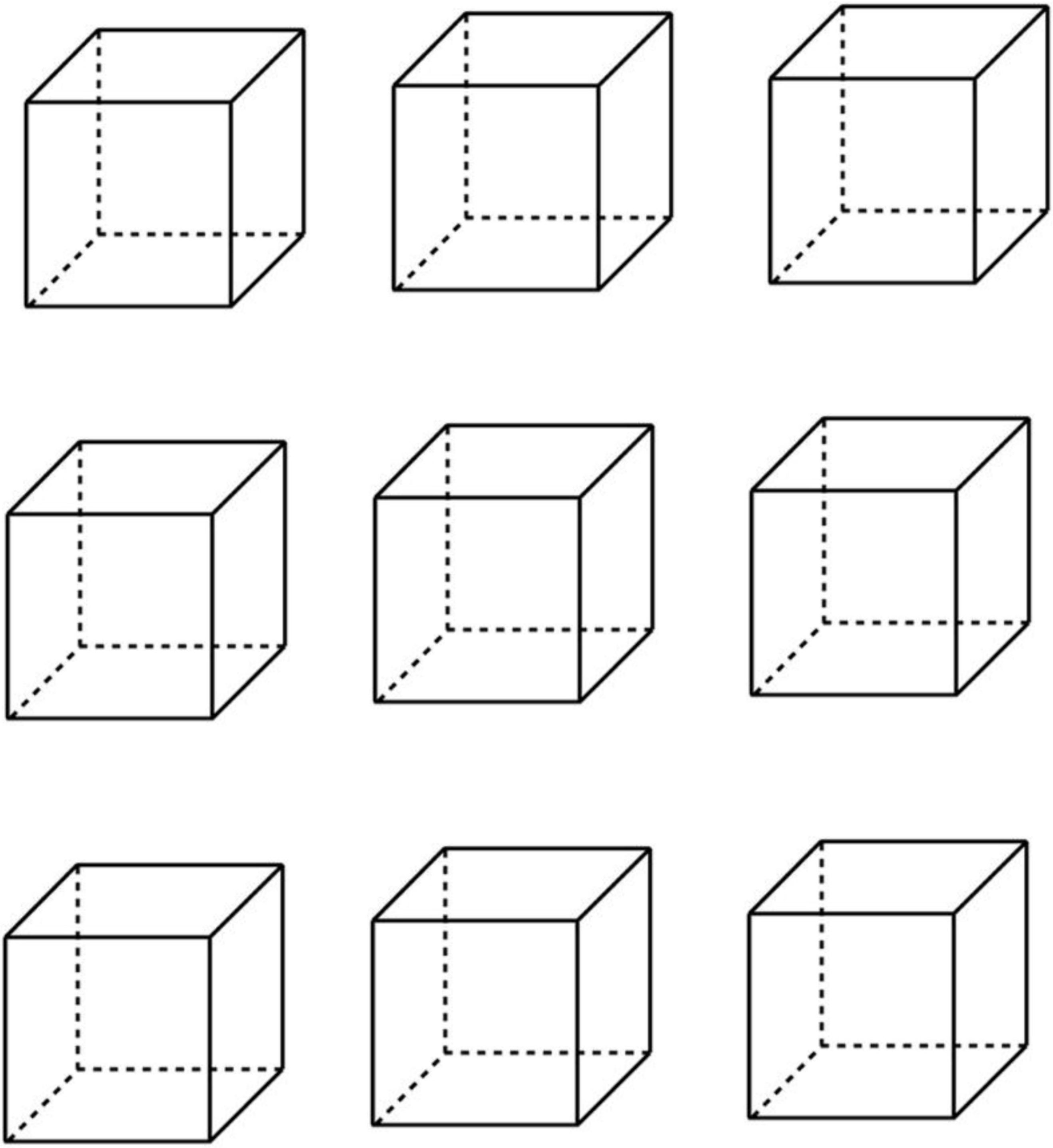
=> PRST leží v jedné rovině.

WOHO! JEDEN PRŮSEČÍK



$C \in \rho(AEF)$

třemi různými body, třeba CFE prochází právě jedna rovina, to ale není tatáž rovina



2.2 Vzájemná poloha dvou přímek

• společné body 2 přímek
(-22-)

splývající

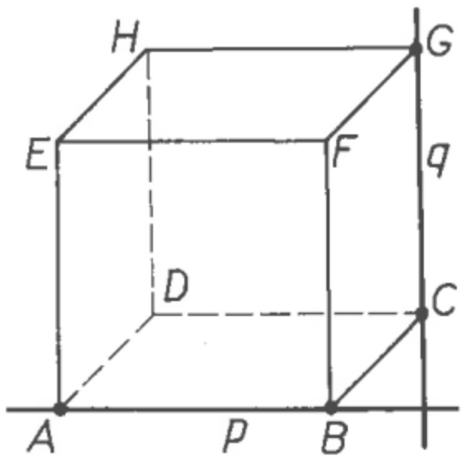
- rovnoběžné (různé v totožné)
- různoběžné (spol. bod „průsečík")
- mimoběžné

Příklad 1

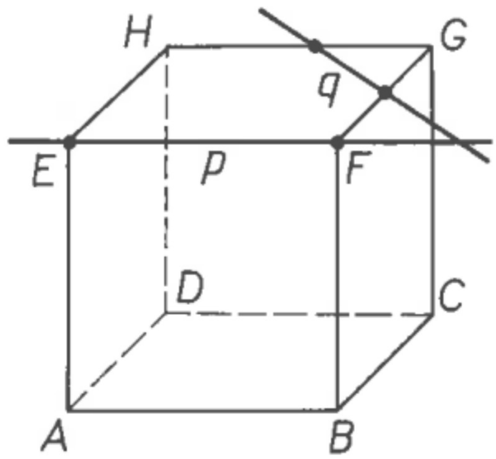
Určete vzájemnou polohu přímek vyznačených na obr. 21a-g. Jsou-li přímky rovnoběžné nebo různoběžné, určete rovinu, v níž přímky leží, pomocí vrcholů krychle. Jsou-li přímky mimoběžné, určete pomocí vrcholů krychle přímku, která obě přímky protíná (tzv. **příčku mimoběžek**).

Řešení

Na obr. 21c jsou přímky p, q rovnoběžné, neleží v žádné rovině, kterou bychom mohli určit pomocí vrcholů krychle.



Obr. 21a



Obr. 21b

2.3 Vzájemná poloha přímky a roviny

• na krychli, 0, 1, ∞ spol. bodů

2.4 Vzájemná poloha dvou rovin

• společný bod => společná celá přímka

Příklad 1

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze rovin

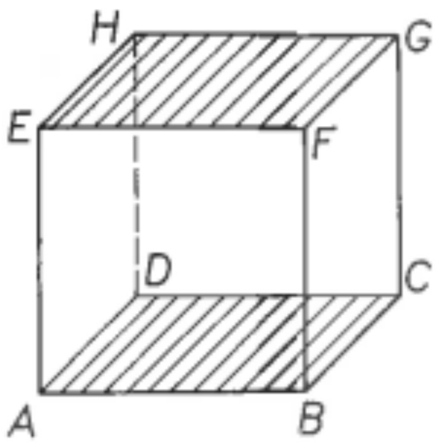
a) ABC, EFH, b) ABC, BCD, c) ADH, BCE.

Řešení

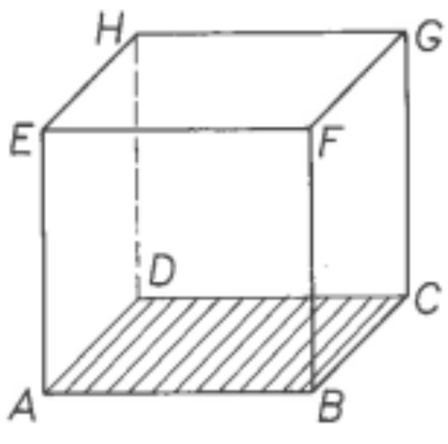
a) Roviny ABC a EFH nemají žádný společný bod (obr. 28a), jsou rovnoběžné různé.

b) Roviny ABC a BCD mají všechny body společné (obr. 28b), jsou totožné.

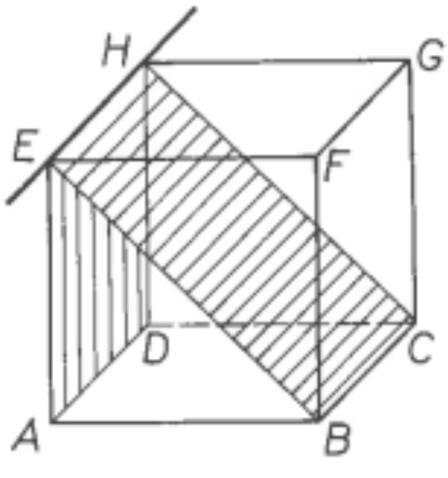
c) Roviny ADH a BCE jsou různoběžné, jejich průsečnice je přímka EH (obr. 28c).



Obr. 28a



Obr. 28b



Obr. 28c

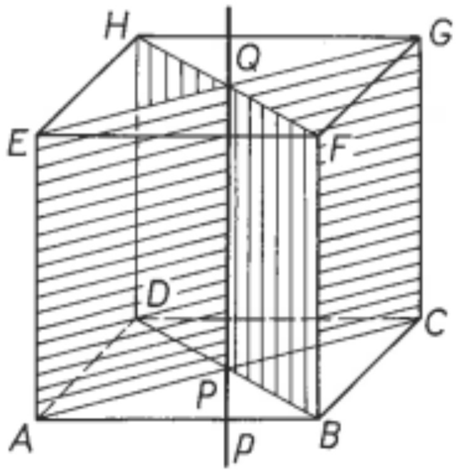
V případě různoběžných rovin ρ a σ je třeba umět sestrojit jejich průsečnici p. Znamená to najít její dva různé body. A jak? V rovině ρ najdeme přímku r a v rovině σ přímku s tak, aby přímky r, s byly různoběžné. Společný bod přímek r, s je jeden bod průsečnice. Stejným způsobem najdeme její další bod.

Příklad 2

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete průsečnici rovin *ACE* a *BDF*.

Řešení (obr. **29**)

Přímka *AC* roviny *ACE* a přímka *BD* roviny *BDF* leží v rovině dolní stěny; jsou různoběžné a jejich průsečík je bod *P* – je to jeden bod průsečnice. Druhý bod průsečnice je bod *Q*. Je průsečíkem různoběžných přímek *EG* roviny *ACE* a *FH* roviny *BDF*.



Obr. 29

Přímku můžeme určit nejen pomocí dvou různých bodů, ale i jako průsečnici dvou různoběžných rovin. Toto určení přímky je běžné zejména v analytické geometrii, se kterou se budete v matematice seznamovat později.

2.5 Rovnoběžnost přímek a rovin

PŘÍŠTĚ