4. cvičení (10. 10. 2022)

Bilineární formy

Pojmy:

- bilineární forma;
- symetrická a antisymetrická forma;
- věta o jedinečném rozkladu bilineární formy na symetrickou a antisymetrickou bilineární formu;
- matice bilineární formy;
- matice přechodu od báze B k bázi B' *(opakování z Analytické geometrie 1 a 2)*;
- singulární vektory bilineární formy.

Úlohy:

1. V kanonické bázi na $\mathbb{R}^3$ je dána bilineární forma

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3.$$

   Určete symetrickou formu f_S a antisymetrickou formu f_A, pro které platí $f = f_S + f_A$.

2. V kanonické bázi na $\mathbb{R}^3$ je dána bilineární forma

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_3.$$

   Určete rovnice této bilineární formy v bázi $\mathbf{u}_1 = (1; 0; 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0; 1; 1)$ a $\mathbf{u}_3 = (1; 1; 0)$.

3. Určete hodnost a singulární vektory bilineární formy

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 5x_1y_2 + 3x_1y_3 + 5x_2y_1 - 6x_2y_2 + 16x_2y_3 + 3x_3y_1 + 16x_3y_2 - 10x_3y_3.$$

Kvadratické formy

Pojmy:

- kvadratická forma a její polární bilineární forma;
- polární báze kvadratické formy, normovaná polární báze;
- normální tvar kvadratické formy;
- signatura a typ kvadratické formy.

Úlohy:

4. Určete polární bilineární formu kvadratické formy $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2$.

5. Určete hodnost a singulární vektory kvadratické formy $F(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$.

6. V nějaké bázi na reálném vektorovém prostoru V_4 jsou dány kvadratické formy F_1, F_2 a F_3. Určete jejich normované polární báze, normální tvary rovnic, typy forem, signatury a transformační rovnice přechodu k normovaným polárním bázím.

$$F_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 3x_3x_4$$

$$F_2(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 2x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 - 4x_3x_4$$

$$F_3(\mathbf{x}) = 3x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

Řešení

Bilineární a kvadratické formy

1. $f_S(\mathbf{x};\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 + x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_3$

   $f_A(\mathbf{x};\mathbf{y}) = 2x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_2y_1 - x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$

2. $f(\mathbf{x}';\mathbf{y}') = -x_1'y_2' + x_1'y_3' + 2x_2'y_1' + 4x_2'y_2' + 2x_2'y_3' + 4x_3'y_1' + 5x_3'y_2' + 3x_3'y_3'$

3. hodnost je 2; singulární vektory tvoří množinu $\{(-2t;t;t), t \in \mathbb{R}\}$

4. $f(\mathbf{x};\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_2y_3 + 2x_3y_1 - 3x_3y_2 + 3x_3y_3$

5. hodnost je 2; singulární vektory tvoří množinu $\{(t;-t;t), t \in \mathbb{R}\}$

6. $F_1'(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$; signatura $(2,2)$; indefinitní forma

   $F_2'(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$; signatura $(2,0)$; pozitivně semidefinitní forma

   $F_3'(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$; signatura $(2,2)$; indefinitní forma