

5. cvičení (17. 10. 2022)

Ortogonalní transformace kvadratické formy

Pojmy:

- vlastní čísla a vlastní směry (*opakování z lineární algebry*);
- Gram-Schmidtův ortogonalizační proces (*opakování z lineární algebry*);
- ortogonalní transformace kvadratické formy.

Úlohy:

1. Určete charakteristickou rovnici, vlastní čísla a podprostory vlastních směrů daných matic. Každý vlastní podprostor navíc vyjádřete jako lineární obal ortonormálních vektorů.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. V ortonormální bázi na euklidovském vektorovém prostoru V_3 jsou dány kvadratické formy F_1 , F_2 a F_3 . Pomocí ortonormálních transformací určete kanonický tvar rovnic, typ formy, ortonormální polární bázi a rovnice transformace souřadnic, které převádí formu do kanonického tvaru.

$$F_1(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

$$F_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$$F_3(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Řešení

Ortogonální transformace kvadratické formy

1. matice A : $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$, $\lambda_{1,2,3} = 2$, podprostor vlastních směrů je generován vektory $(1; 2; 0)$ a $(0; 0; 1)$.

matice B : $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0$, $\lambda_{1,2} = 4$, $\lambda_3 = -2$ podprostor vlastních směrů příslušný $\lambda_{1,2}$ je generován vektory $(1; 0; 2)$ a $(1; 2; 0)$ a podprostor vlastních směrů příslušný λ_3 je generován vektorem $(-2; 1; 1)$.

matice C : $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 16\lambda - 16 = 0$, $\lambda_{1,2,3} = 2$, $\lambda_4 = -2$ podprostor vlastních směrů příslušný $\lambda_{1,2,3}$ je generován vektory $(1; 0; 0; 1)$, $(0; 1; 0; -1)$ a $(0; 0; 1; -1)$ a podprostor vlastních směrů příslušný λ_4 je generován vektorem $(1; -1; -1; -1)$.

2. $F_1 : 3y_1^2 + 2y_2^2$, kladně semidefinitní forma,

$F_2 : y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$, indefinitní forma,

$F_3 : 6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$, indefinitní forma,