6. cvičení (24. 10. 2022)

Kuželosečky v projektivní rovině

Pojmy:

- kuželosečka;
- regulární a singulární kuželosečky.

Úlohy:

1. Určete společné body kuželosečky k a přímky p. Je kuželosečka k regulární?

   (a) $k_1 : x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3 = 0$
   $p_1 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

   (b) $k_2 : x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0$
   $p_2 : x_1 - x_2 + x_3 = 0$

2. Určete vzájemnou polohu přímky AB a kuželosečky k.
   $k : x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0$
   $A = (2, -1, 3)$
   $B = (0, 0, 1)$

3. Určete rovnici kuželosečky k, která prochází body $A = (0, 0, 1)$, $B = (0, 3, 1)$, $C = (6, 0, 1)$, $D = (2, 2, 1)$ a $E = (-2, 1, 1)$.

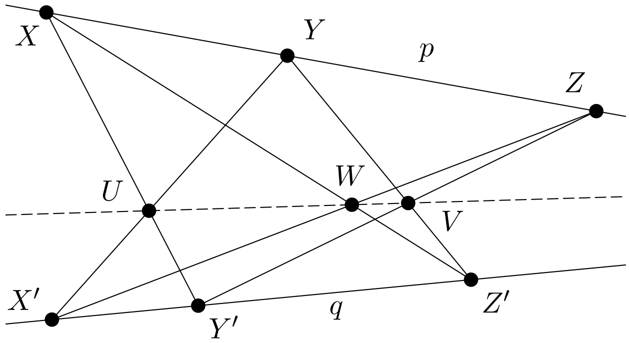
4. Dokažte, že tři různé body reálné projektivní roviny $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ a $C = (c_1, c_2, c_3)$ jsou kolineární právě tehdy, když platí

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Buď A, B, C, D čtyři libovolné po dvou různé body reálné projektivní roviny, z nichž žádné tři nejsou kolineární. Dokažte, že existuje aritmetická báze aritmetického nosiče projektivní roviny, ve které platí $A = (1; 0; 0)$, $B = (0; 1; 0)$, $C = (0; 0; 1)$, $D = (1; 1; 1)$.

6. Dokažte, že v reálné projektivní rovině platí tzv. Pappův axiom:

   Buď p, q dvě libovolné různé přímky projektivní roviny. Zvolme na přímce p tři libovolné, navzájem různé body X, Y, Z, které neleží na přímce q, a na přímce q tři libovolné, navzájem různé body X', Y', Z', které neleží na přímce p. Pak jsou body $U \in XY' \cap X'Y$, $V \in YZ' \cap Y'Z$ a $W \in XZ' \cap X'Z$ kolineární.



Řešení

Kuželosečky v projektivní rovině

1. (a) $A = (1; 0; 1)$, $B = (1; -1; -1)$, je regulární
   (b) $p_2 \subseteq k_2$, je singulární
2. $AB \subseteq k$
3. $k : x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 12x_2x_3 = 0$