

7. cvičení (31. 10. 2022)

Kuželosečky v projektivní rovině

Pojmy:

- polární sdruženost bodů vzhledem ke kuželosečce;
- singulární bod kuželosečky, regulární bod kuželosečky;
- polára bodu, pól přímky;
- tečna v regulárním bodu kuželosečky.

Úlohy:

1. Určete poláru bodu $A = (-3, -1, 1)$ vzhledem ke kuželosečce $k: 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$.
2. Určete pól přímky $p: 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$ vzhledem ke kuželosečce $k: 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$.
3. Určete tečny ke kuželosečce $k: 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 7x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2x_3 = 0$, které prochází bodem $M = (0, 0, 1)$. Určete také body dotyku.
4. Pomocí transformace projektivních homogenních souřadnic určete normální rovnice a projektivní typ kuželoseček. Určete transformační rovnice, které převádějí rovnici kuželosečky do normálního tvaru.

(a) $k_1: 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$

(b) $k_2: 3x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$

(c) $k_3: x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$

(d) $k_4: 5x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$

(e) $k_5: 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$

Řešení

Kuželosečky v projektivní rovině

1. $p_A: 11x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 0$
2. $P = (8, -5, 1)$
3. $t_1: 2x_1 + 5x_2 = 0, T_1 = (5, -2, -5)$
 $t_2: 2x_1 + x_2 = 0, T_2 = (1, -2, 3)$
4. (a) $k_1: y_1^2 = 0$, dvojnásobná přímka
(b) $k_2: y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$, reálná regulární kuželosečka
(c) $k_3: y_1^2 + y_2^2 = 0$, dvojice komplexně sdružených přímek
(d) $k_4: y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$, imaginární regulární kuželosečka
(e) $k_5: y_1^2 - y_2^2 = 0$, dvojice reálných přímek