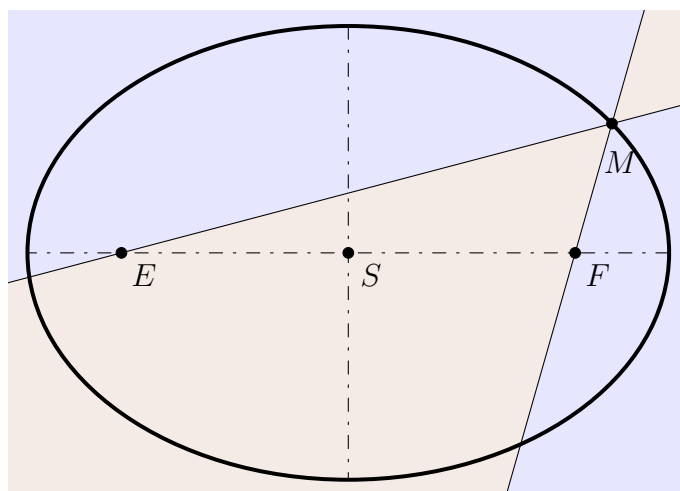


Kuželosečky – pomocná věta (elipsa)

Pomocné definice:

Buď M libovolný bod elipsy s ohnisky E, F a středem S . *Průvodiči* bodu M rozumíme přímky ME a MF . *Vnitřními úhly* průvodičů rozumíme úhel svíraný průvodiči, který obsahuje bod S , a příslušný vrcholový úhel. *Vnějšími úhly* průvodičů rozumíme úhly vedlejší k vnitřním úhlům.¹

Poznámka: Splývá-li bod M s některým z hlavních vrcholů elipsy, pokládáme oba vnitřní úhly za nulové, zatímco vnější úhly pokládáme za přímé.



Věta:

Tečna k elipse pólí vnější úhly průvodičů svého tečného bodu.

Důkaz:

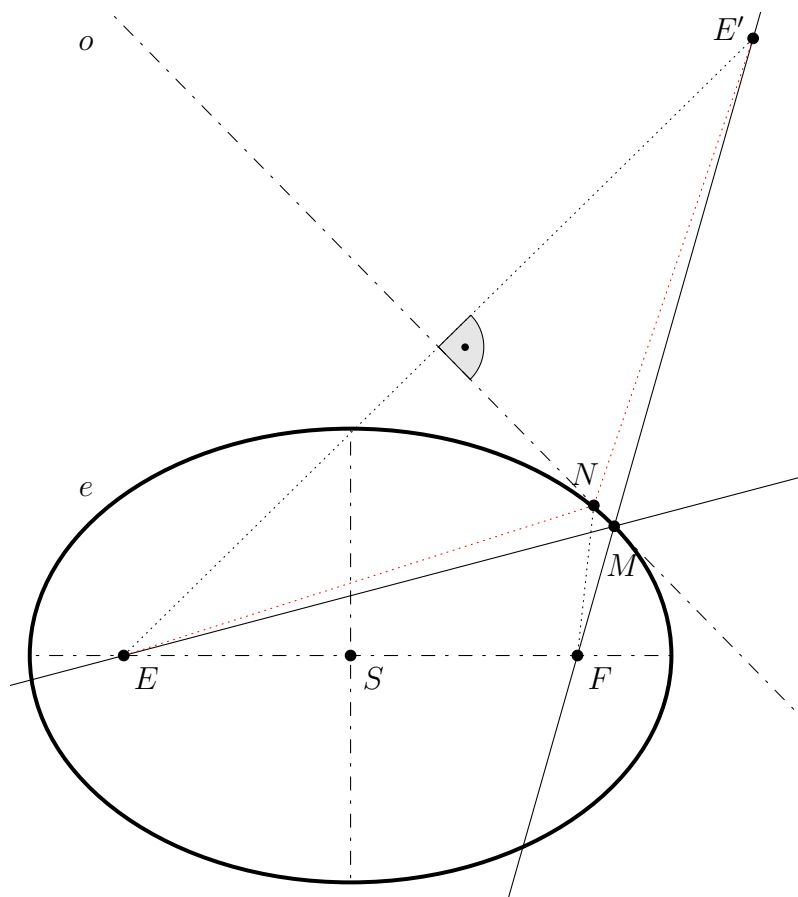
Buď e elipsa s ohnisky E a F a buď M libovolný bod elipsy. Uvažme dále přímku o , která je osou vnějších úhlů průvodičů bodu M . Ukážeme, že přímka o má s elipsou společný právě bod M , tzn. je tečnou elipsy.²

Zvolme na přímce o libovolný bod N různý od bodu M a zobrazme ohnisko E v osově souměrnosti podle přímky o . Protože je o osou vnějších úhlů průvodičů, leží obraz E' na průvodiči FM . Situaci zachycuje obrázek 1. Poznamenejme zde, že z definice elipsy platí $|EM| + |FM| = d$, kde d je reálná konstanta, a protože $|EM| = |E'M|$, platí také $|E'M| + |FM| = |E'F| = d$.

Součet $|EN| + |FN|$ se nicméně d nerovná, neboť $|EN| + |FN| = |E'N| + |FN|$ a z trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku $E'NF$ plyne $|E'N| + |FN| > |E'F| = d$. Bod N tedy na elipse ležet nemůže a přímka o má s elipsou společný pouze bod M .

¹Vnitřní úhly průvodičů bodu M jsou na ilustrativním obrázku vyznačeny červeně, vnější úhly modře.

²Platnost věty pak plyne z toho, že má elipsa ve svém libovolném bodě jedinou tečnu. To považujeme za zřejmé.



Obrázek 1: Ilustrace důkazu věty