

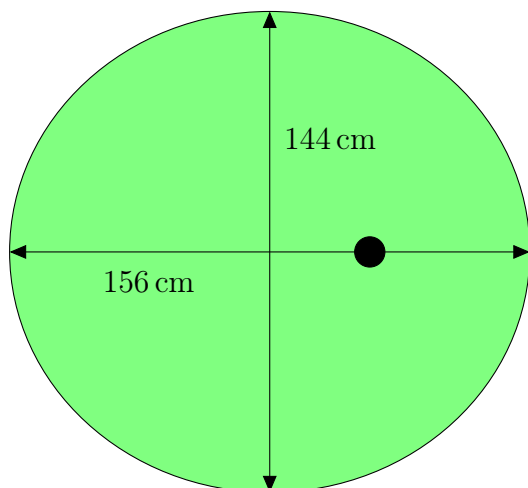
## Kuželosečky – eliptický kulečník

*Poznámka.* Tuto úlohu je lepší zařadit do výuky za úlohou o aplikaci elipsy v architektuře, kde si žáci osvojí některé potřebné poznatky. Sami tak budou moci přijít na princip této úlohy.

### Zadání:

Tomáš má pseudokulečnickový stůl ve tvaru elipsy o rozměrech uvedených na obrázku. Své kamarády ohromuje tím, že kouli postaví na stůl, zaváže si oči, soustředí se a silným šťouchem pošle kouli do díry. To se mu podaří vždy, bez ohledu na to, kam šťouch míří.<sup>1</sup>

- Kde přesně má Tomáš umístit kouli, aby se mu to pokaždé povedlo?
- Kolik různých drah může koule pro všechny možné směry urazit? Tyto dráhy určete.<sup>2</sup>



### Řešení:

Aby trik fungoval, musí být díra i počáteční pozice koule v ohniscích elipsy. Princip pak vyplývá ze zákona odrazu a z toho, že spojnice ohnisek s bodem elipsy svírají s tečnou v tomto bodě stejný úhel.

Z informací v obrázku známe velikost hlavní poloosy  $a$  a vedlejší poloosy  $b$ . Můžeme tak určit excentricitu  $e$  dosazením do vztahu  $a^2 = b^2 + e^2$ , který platí v každé elipse:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{78^2 - 72^2} \text{ cm} = 30 \text{ cm}.$$

Můžeme nyní odpovědět na první otázku – **Tomáš musí kouli umístit do ohniska elipsy, tj. na hlavní osu a 30 cm od středu (resp. 60 cm od díry).**

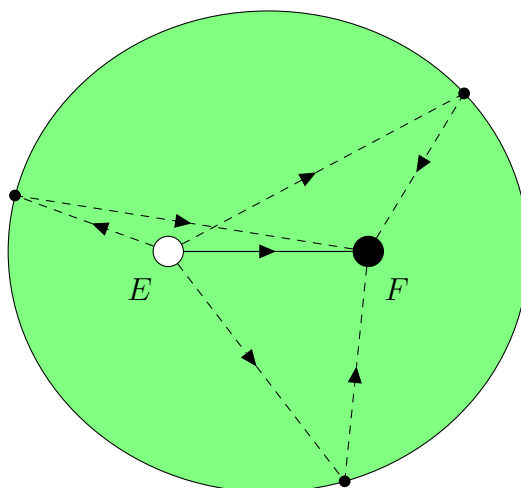
Je zřejmé, že jestliže Tomáš pošle kouli do díry přímo (tj. bez odrazu), urazí koule vzdálenost  $2e$ , tj. 60 cm. Šťouch kterýmkoliv jiným směrem povede k odrazu od okraje stolu směrem do díry. Z teoretických poznatků o elipse přitom víme, že pro každý bod  $X$

<sup>1</sup>Ilustrativní video: <https://www.youtube.com/watch?v=Wm9rpG2R60s>

<sup>2</sup>Pro upřesnění – dráhou myslíme délku trajektorie, po které se koule do díry dostane.

elipsy s ohnisky  $E$  a  $F$  platí  $|EX| + |FX| = 2a$ . To však znamená, že při každém takovém štouchu urazí koule vždy stejnou vzdálenost, a to 156 cm.

**Koule tedy může urazit dvě možné dráhy, a to 60 cm a 156 cm.** Na obrázku 1 jsou znázorněny čtyři různé trajektorie kulečnickové koule – zatímco ta značená plnou čarou měří 60 cm, každá ze tří trajektorií značených přerušovaně měří 156 cm.



Obrázek 1: Možné trajektorie kulečnickové koule