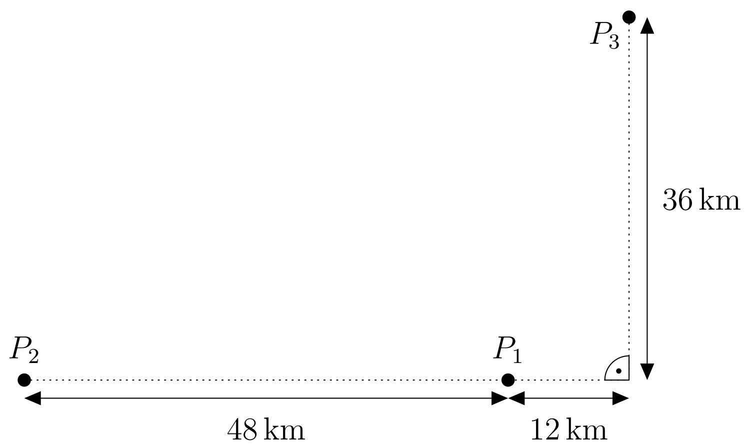
Kuželosečky – určení polohy (průsečík přímky a hyperboly)

Zadání:

V krajině jsou rozmístěny tři přijímače P_1, P_2 a P_3. Známé vzdálenosti zachycuje obrázek 1.



Obrázek 1: Zadání úlohy

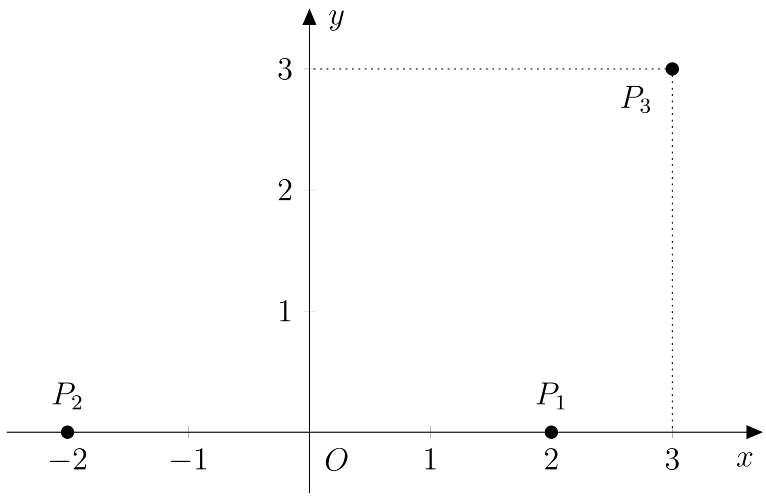
Adamova turistická navigace vyšle signál ke všem třem přijímačům. Jestliže signál dorazí k přijímači P_2 o 80 µs později než k přijímači P_1 a k přijímači P_3 dorazí signál ve stejnou dobu jako k přijímači P_1, kde se Adam nachází? Polohu určete ve vhodně zavedené soustavě souřadnic. Předpokládejte, že signál urazí 300 000 km za sekundu.

Řešení:

Nejprve v obrázku vhodně zvolíme kartézskou soustavu souřadnic. Volbu zdůvodníme takto: protože se Adam nachází stejně daleko od P_1 jako od P_3, nachází se jeho poloha na ose úsečky P_1P_3. A protože se nachází od P_2 o danou vzdálenost[1] dále než od P_1, nachází se jeho poloha také na větvi hyperboly h s ohnisky P_1 a P_2. Proto je výhodné umístit počátek do středu úsečky P_1P_2, aby měla hyperbola h co nejjednodušší rovnici.

Označme tedy počátek soustavy O a položme jej do středu úsečky P_1P_2, kladný směr osy x bude určovat polopřímka OP_1 a kladný směr osy y zvolíme tak, aby byla druhá souřadnice bodu P_3 kladná. Jednotky na obou osách budou odpovídat vzdálenosti 12 km. Situaci znázorňuje obrázek 2.

[1] Tato vzdálenost odpovídá zpoždění signálu o 80 µs.



Obrázek 2: Zavedení soustavy souřadnic

Označme neznámou polohu Adama A. Víme, že bod A leží na ose úsečky P_1P_3, proto si tuto osu (označme ji o) vyjádříme parametricky:

$$o\colon X = S_{P_1P_3} + t \cdot \overrightarrow{u_o}, \text{ kde } S_{P_1P_3}\left[\tfrac{5}{2}; \tfrac{3}{2}\right] \text{ a } \overrightarrow{u_o} = (3; -1)$$

$$x = \tfrac{5}{2} + 3t$$
$$y = \tfrac{3}{2} - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Protože Adamův signál dorazí k přijímači P_2 o 80 µs později než k přijímači P_1, nachází se Adam od přijímače P_2 o 24 km (tedy dvě jednotky) dále než od přijímače P_1. Jak bylo řečeno dříve, množina všech bodů v rovině, které jsou od bodu P_1 vzdáleny o dvě jednotky více než od bodu P_2, je jedna větev hyperboly h. Určeme její rovnici.

Jelikož jsou body P_1 a P_2 ohniska hyperboly h, je středem hyperboly bod O a její excentricita e je rovna polovině $|OP_1|$, tedy $e = 2$. Dále, protože je rozdíl $|AP_1| - |AP_2| = 2$ dvojnásobkem hlavní poloosy hyperboly, je hlavní poloosa a rovna 1. Velikost vedlejší poloosy b vypočítáme dosazením do vztahu $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Můžeme tak napsat rovnici hledané hyperboly

$$h : x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Bod A leží na její „pravé“ větvi, tj. nutně musí být jeho první souřadnice $x_A > 0$.

Vypočítejme nyní souřadnice průsečíků přímky o a hyperboly h – dosazením parametrických rovnic úsečky do rovnice hyperboly tak dostáváme

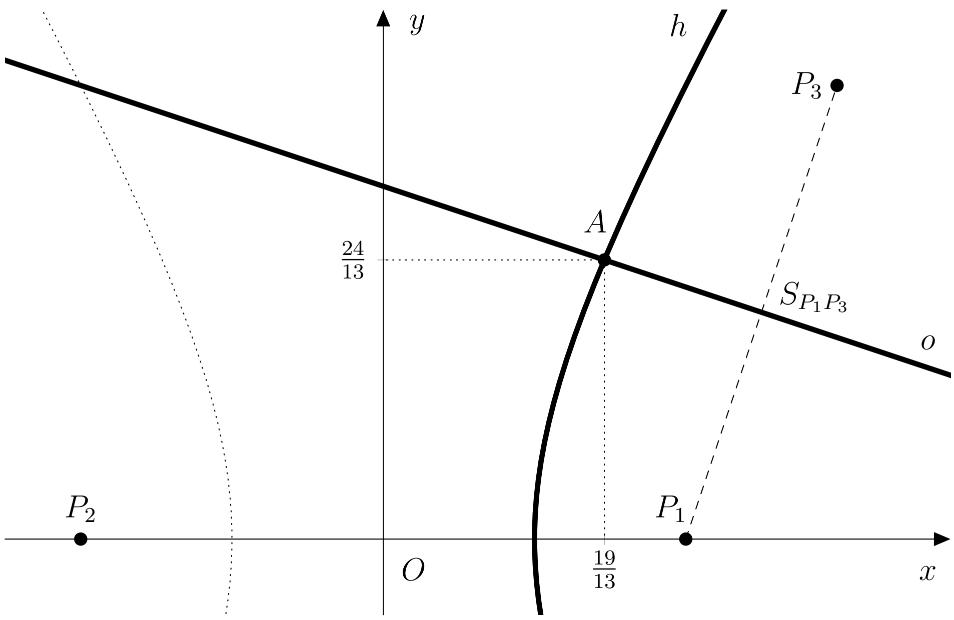
$$\left(\frac{5}{2}+3t\right)^2 - \frac{\left(\frac{3}{2}-t\right)^2}{3} = 1$$
$$3\cdot\left(\frac{5}{2}+3t\right)^2 - \left(\frac{3}{2}-t\right)^2 = 3$$
$$52t^2+96t+27=0$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou $t_1 = -\frac{9}{26}$ a $t_2 = -\frac{3}{2}$. Dosadíme t do parametrických rovnic:

$$x_1 = \tfrac{5}{2} + 3\cdot\left(-\tfrac{9}{26}\right) = \tfrac{19}{13} \qquad x_2 = \tfrac{5}{2} + 3\cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right) = -2$$
$$y_1 = \tfrac{3}{2} - \left(-\tfrac{9}{26}\right) = \tfrac{24}{13} \qquad y_2 = \tfrac{3}{2} - \left(-\tfrac{3}{2}\right) = 3$$

$$A_1\left[\tfrac{19}{13};\tfrac{24}{13}\right] \qquad A_2\left[-2;3\right]$$

Bod A_2 však nevyhovuje podmínce $x_A > 0$ (leží na druhé větvi hyperboly), **tedy dostáváme jedinou možnou Adamovu polohu, a to** $A\left[\frac{19}{13};\frac{24}{13}\right]$. Řešení je znázorněno na obrázku 3.



Obrázek 3: Řešení úlohy

Poznámka. Jestliže by Adam nebyl stejně vzdálený od přijímačů P_1 a P_3, řešit úlohu by znamenalo hledat průsečíky větví dvou hyperbol. To je však pro zadanou polohu přijímačů nad rámec středoškolské matematiky. Technické podrobnosti k metodě v obecném případě lze nalézt např. v článku [1].

Literatura

[1] K. Fujii, Y. Sakamoto, W. Wang, H. Arie, A. Schmitz, S. Sugano: *Hyperbolic Positioning with Antenna Arrays and Multi-Channel Pseudolite for Indoor Localization*. Sensors 2015, 15(10), str. 25157–25175.