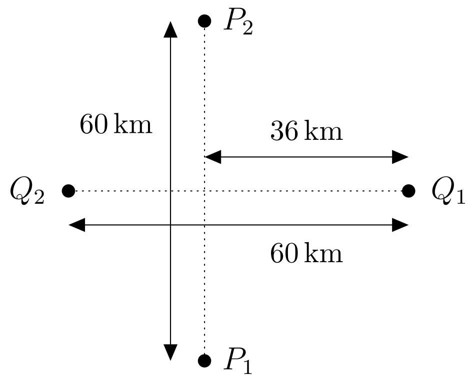
Kuželosečky – určení polohy (průsečík dvou hyperbol)

Zadání:

V krajině jsou rozmístěny čtyři přijímače P_1, P_2, Q_1 a Q_2 tak, že tvoří vrcholy deltoidu s úhlopříčkami P_1P_2 a Q_1Q_2. Známé vzdálenosti zachycuje obrázek 1.

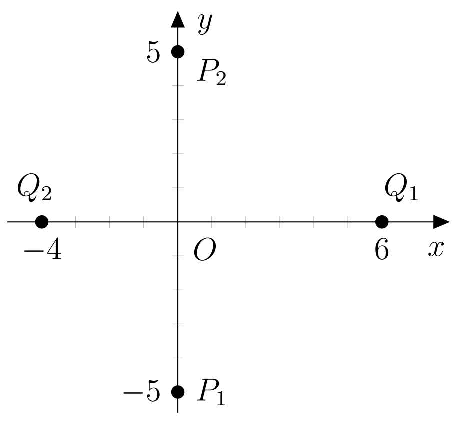


Obrázek 1: Zadání úlohy

Adamova turistická navigace vyšle signál ke všem čtyřem přijímačům. Jestliže signál dorazí k přijímači P_2 o 160 µs dříve než k přijímači P_1 a k přijímači Q_2 o 120 µs dříve než k přijímači Q_1, kde se Adam nachází? Polohu určete v souřadnicích ve vhodně zavedené soustavě souřadnic. Dále předpokládejte, že signál urazí 300 000 km za sekundu.

Řešení:

Nejprve zavedeme vhodnou kartézskou soustavu souřadnic. Umístíme počátek soustavy O do průsečíku úseček P_1P_2 a Q_1Q_2, kladný směr osy x bude určovat polopřímka OQ_1 a kladný směr osy y bude určovat polopřímka OP_2 (viz obrázek 2). Jednotka na osách bude shodná a bude odpovídat 6 km. Dostáváme tak $P_1[0;-5]$, $P_2[0;5]$, $Q_1[6;0]$ a $P_2[-4;0]$.



Obrázek 2: Zavedení soustavy souřadnic

Označme neznámou polohu Adama A. Protože Adamův signál dorazí k přijímači P_2 o 160 µs dříve než k přijímači P_1, nachází se Adam od přijímače P_1 o 48 km dále než od přijímače P_1. Množina všech bodů v rovině, které jsou od bodu P_2 vzdáleny o 8 jednotek (odpovídajících vzdálenosti 48 km) více než od bodu P_1, je jedna větev hyperboly h_1 s ohnisky P_1 a P_2 a středem O. Na této větvi pak musí ležet bod A a je zřejmé, že se jedná o větev bližší bodu P_2, tedy $y_A > 0$.

Obdobně odvodíme, že se Adam nachází od přijímače Q_1 o 36 km (tj. o 6 jednotek) dále než od přijímače Q_2, a proto bod A leží také na větvi hyperboly h_2 s ohnisky Q_1 a Q_2 a středem v bodě $S\,[1;0]$. Konkrétně se jedná o větev bližší bodu Q_2, tedy $x_A < 1$.

Určeme nyní parametry a středové rovnice obou hyperbol. Využijeme skutečnosti, že rozdíl $|AP_1| - |AP_2|$ (resp. rozdíl $|AQ_1| - |AQ_2|$) je dvojnásobkem velikosti hlavní poloosy hyperboly a dále vztahu platného v každé hyperbole $e^2 = a^2 + b^2$ (kde e je excentricita a a, b velikosti poloos).

Parametry hyperboly h_1:

- excentricita $e_1 = |OP_1| = 5$;
- hlavní poloosa $b_1 = \frac{|AP_2|-|AP_1|}{2} = 4$;
- vedlejší poloosa $a_1 = \sqrt{e_1^2 - b_1^2} = 3$.

Středová rovnice hyperboly:

$$h_1\colon \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Parametry hyperboly h_2:

- excentricita $e_2 = |SQ_1| = 5$;
- hlavní poloosa $a_2 = \frac{|AQ_2|-|AQ_1|}{2} = 3$;
- vedlejší poloosa $b_2 = \sqrt{e_2^2 - a_2^2} = 4$.

Středová rovnice hyperboly:

$$h_2\colon \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

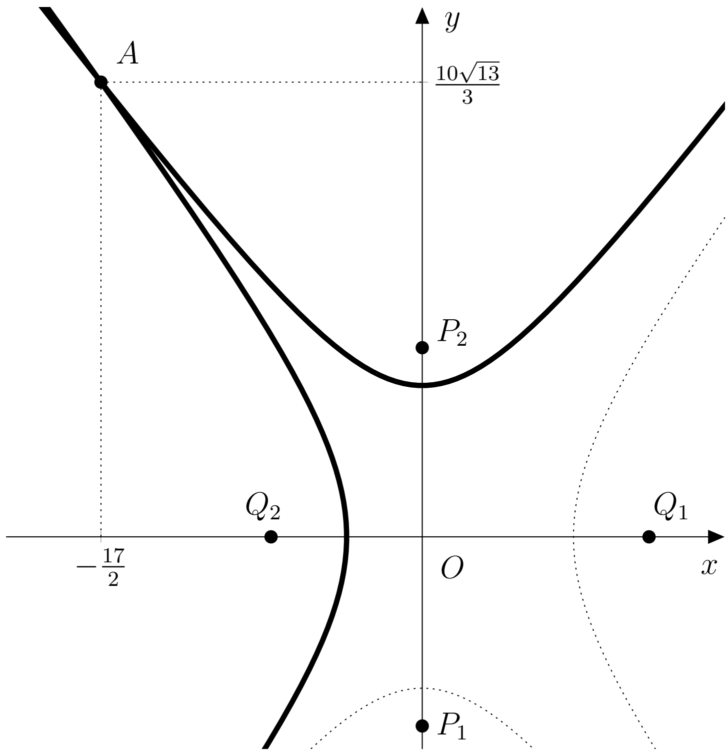
Bod A je průsečíkem obou hyperbol, tedy je řešením soustavy dvou kvadratických rovnic výše. Vyjádřeme z rovnice hyperboly h_1 člen $\frac{y^2}{16}$ a dosaďme do rovnice h_2:

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)^2}{9} - \left(1 + \frac{x^2}{9}\right) &= 1 \\ (x-1)^2 - x^2 - 18 &= 0 \\ -2x - 17 &= 0 \end{aligned}$$

Jediné řešení je $x = -\frac{17}{2}$, které vyhovuje dříve vyslovené podmínce $x_A < 1$. Vypočteme zbylou souřadnici dosazením do rovnice hyperboly h_1:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{16} - \frac{\left(-\frac{17}{2}\right)^2}{9} &= 1 \\ y^2 &= 16 + \frac{16}{9} \cdot \left(-\frac{17}{2}\right)^2 \\ y^2 &= \frac{1300}{9} \end{aligned}$$

Podmínce $y_A > 0$ vyhovuje jediné řešení, a to $y = \frac{10\sqrt{13}}{3}$. **Hledaný bod A má proto souřadnice $\left[-\frac{17}{2}; \frac{10\sqrt{13}}{3}\right]$.** Řešení je znázorněno na obrázku 3.



Obrázek 3: Řešení úlohy

Poznámka. V praxi stačí k určení polohy tři přijímače rozmístěné libovolným způsobem v krajině. Řešení takového obecného zadání je však mimo rámec středoškolské matematiky. Technické podrobnosti k metodě lze nalézt např. v článku [1].

Literatura

[1] K. Fujii, Y. Sakamoto, W. Wang, H. Arie, A. Schmitz, S. Sugano: *Hyperbolic Positioning with Antenna Arrays and Multi-Channel Pseudolite for Indoor Localization.* Sensors 2015, 15(10), str. 25157–25175.